Appendice B

Teoremi notevoli del Calcolo Differenziale

Sia $f(x, y, z)$ uno scalare qualsiasi; consideriamone una *superficie di livello*, cioè una superficie tale che su di essa sia $f(x, y, z) = cost$. Per definizione di superficie di livello, su di essa $df = 0$, ovvero, se $d\vec{s}$ è l'elemento infinitesimo di arco su tale superficie

$$d\vec{s} = dx\ \vec{i} + dy\ \vec{j} + dz\ \vec{k} \tag{B.1}$$

si avrà:

$$0 \equiv df = d\vec{s} \cdot \nabla f \tag{B.2}$$

come già visto dalla definizione di gradiente (A.9) e di derivata direzionale (A.12).

Si definisce la *circuitazione* di un vettore $\vec{v}$ come l'integrale di $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ valutato lungo una qualche linea s:

$$I = \int_s \vec{v} \cdot d\vec{s} \tag{B.3}$$

Se $\vec{v}$ è tale che

$$\vec{v} = \nabla f \tag{B.4}$$

abbiamo

$$df = \nabla f \cdot d\vec{s} \tag{B.5}$$

Quindi, se P_1 e P_2 sono gli estremi della curva s, la circuitazione I definita in (B.3) diventa semplicemente

$$I = \int_{P_1}^{P_2} df = f(P_2) - f(P_1) \tag{B.6}$$

cioè dipende solo dagli estremi della curva e non dal cammino seguito pare passare da P_1 a P_2. Pertanto, tutte le volte che

$$\vec{v} \;=\; \nabla f \tag{B.7}$$

si ha che la sua circuitazione lungo una linea chiusa è nulla:

$$\oint \nabla f \cdot d\vec{s} \;=\; 0 \tag{B.8}$$

in tal caso si dice che il vettore è *conservativo.*

Si definisce *flusso* di un vettore $\vec{v}$ attraverso una superficie S, l'integrale di superficie

$$\phi_S(\vec{v}) \;=\; \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\; dS \tag{B.9}$$

ove $\vec{n}$ è il versore avente in ogni punto (si S) la direzione normale alla superficie S in quel punto e rivolto sempre dalla stessa parte di S. Se ora S è una superficie *chiusa e orientabile*, con normale esterna $\vec{n}$, che costituisce la frontiera di un solido (nello spazio a tre dimensioni) di volume V, e $\vec{v}$ è un campo vettoriale differenziabile con continuità definito in V, si ha il teorema di Gauss o *della divergenza* (cfr. Apostol, volume 3, p.430 oppure dispensa Prof. Zampieri, pag. 55)

$$\phi_S(\vec{v}) \;=\; \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\; dS \;=\; \int_V (\nabla \cdot \vec{v})\; dV \tag{B.10}$$

che permette di sostituire un integrale di volume ad un integrale di superficie (o viceversa) e fornisce il significato fisico dell'operatore *divergenza* definito dalla (A.13). Dal teorema della divergenza seguono le relazioni:

$$\int_S f\vec{n}\; dS \;=\; \int_V \nabla f\; dV \tag{B.11}$$

e

$$\int_S \vec{n} \times \vec{v}\; dS \;=\; \int_V \nabla \times \vec{v}\; dV \tag{B.12}$$

per la cui dimostrazione è sufficiente moltiplicare scalarmente i due membri delle equazioni con un vettore costante $\vec{a}$ e poi applicare le (A.19) e (A.26), rispettivamente, ricordando la definizione di prodotto misto nel caso della (B.12), ed il teorema della divergenza (B.10).

Di grande utilità è anche il *teorema o lemma di Green* che, di nuovo, permette di trasformare un integrale di volume in uno di superficie o un integrale di superficie in uno di linea. Considerando una superficie S ed un volume V del tipo descritto nel teorema della divergenza, se f e g sono due campi scalari differenziabili con continuità e definiti in V, allora:

$$
\begin{aligned}
\int_V (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g)\ dV &= \int_V \nabla\cdot(g\nabla f - f\nabla g)\ dV \\
&= \int_S (g\nabla f - f\nabla g)\cdot\vec{n}\ dS
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

in cui $\vec{n}$ è la normale esterna a S; parimenti, considerando una superficie regolare nel piano, S, ed il suo contorno s, se f e g sono due campi scalari differenziabili con continuità e definiti in S, allora:

$$
\begin{aligned}
\int_S (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g)\ dS &= \int_S \nabla\cdot(g\nabla f - f\nabla g)\ dS \\
&= \oint_s (g\nabla f - f\nabla g)\cdot\vec{n}\ ds
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

in cui $\vec{n}$ è il versore normale a s. Si può facilmente osservare (cfr. anche Apostol, volume 3, pag. 437, esercizio 7) che questo lemma è conseguenza del teorema della divergenza (B.10) e della relazione

$$\nabla\cdot(f\nabla g) \ = \ \nabla f\cdot\nabla g \ + \ f\nabla^2 g \tag{B.15}$$

che segue dalla (A.19) nel caso in cui $\vec{u} \ = \ \nabla g$.

Tornando alla definizione di *circuitazione* (B.3), un altro teorema importante, il teorema di *Stokes* o della *circuitazione* (cfr. Apostol, volume 3, pag. 408 oppure dispensa Prof. Zampieri pag. 47), asserisce che se S è una superficie parametrica semplice e regolare, $\vec{v}$ è un campo vettoriale differenziabile definito su S e s è la frontiera orientata (percorsa in senso antiorario) di S, allora:

$$\oint_s \vec{v}\cdot d\vec{s} \ = \ \int_S (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\ dS \tag{B.16}$$

che permette di sostituire un integrale di superficie ad un integrale di linea (o viceversa), fornendo al contempo l'interpretazione fisica dell'operatore *rotore* introdotto dalla (A.14), e che dice che la circuitazione di un vettore $\vec{v}$ lungo una linea chiusa s è uguale al flusso del vettore $\nabla\times\vec{v}$ attraverso una **qualsiasi** superficie S *avente per contorno la linea* s. In particolare ciò mostra che il flusso del vettore $\nabla\times\vec{v}$ dipende solo dal contorno e non dalla particolare forma della superficie S.

Si noti ancora, alla luce delle (B.8) e (B.16), come un vettore conservativo (B.7) sia anche *irrotazionale* (A.29)

$$\nabla\times\nabla f \ = \ 0 \tag{B.17}$$

Inoltre le due espressioni

$$\vec{v} \ = \ \nabla f \quad o \quad \nabla\times\vec{v} \ = \ 0 \tag{B.18}$$

hanno lo stesso significato e una segue dall'altra.

Dal teorema della circuitazione seguono le relazioni:

$$\oint_s f d\vec{s} \;=\; \int_S \vec{n} \cdot \nabla f \; dS \tag{B.19}$$

e

$$\oint_s d\vec{s} \times \vec{v} \;=\; \int_S dS(\vec{n} \times \nabla) \times \vec{v} \tag{B.20}$$

per la cui dimostrazione è sufficiente moltiplicare scalarmente i due membri delle equazioni con un vettore costante $\vec{a}$, ricordando la definizione di prodotto misto, e poi applicare la (A.20), nel caso della (B.18), ed il teorema della circuitazione (B.16).