Appendice D

Cenni sulle Trasformate di Fourier

D.1 Serie trigonometriche di Fourier

Qualunque funzione periodica con periodo $T = 2\pi$ che soddisfi alle condizioni $f(2\pi) = f(0)$, $f'(2\pi) = f'(0)$ può essere sviluppata in serie trigonometrica del tipo

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}a_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) \;+\; b_n \sin(nx)\right) \tag{D.1}$$

con

$$a_0 \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; dx \tag{D.2}$$

$$a_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\; dx \qquad n \;=\; 0,\; 1,\; 2,\; .... \tag{D.3}$$

e

$$b_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\; dx \qquad n \;=\; 1,\; 2,\; .... \tag{D.4}$$

La (D.1) è un esempio particolare di *serie di Fourier*, come derivante dal *teorema di Fourier: una funzione f(x), di periodo* 2π *ma forma arbitraria sopra una lunghezza uguale al periodo, può ottenersi come somma di funzioni sinusoidali con periodi pari a sottomultipli di* T *(cioè* T, $T/2$, $T/3$, *...).*

(Si noti che le funzioni $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)$ e $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$ con $m = 0, 1, 2, ..$ e $n = 0, 1, 2, ..$, ortonormali sull'intervallo $(-\pi,\ \pi)$, costituiscono una base ortonormale sullo stesso intervallo).

Si può dimostrare che se $f(x)$ è sommabile nell'intervallo $x(0, 2\pi)$ ed è di classe C^1 nell'intorno di un punto x_0, la serie di Fourier corrispondente converge puntualmente a

$$f(x_0) \;=\; \frac{1}{2}\Big[f(x_0^+) \;+\; f(x_0^-)\Big] \tag{D.5}$$

avendo indicato con $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$ i limiti destro e sinistro della funzione in x_0. Una funzione *pari* nell'intervallo $(0,\ 2\pi)$ si sviluppa in serie di soli coseni, mentre una funzione *dispari* si sviluppa in serie di soli seni.

Per le formule trigonometriche di Eulero, la (D.1) si può equivalentemente scrivere nella forma

$$f(x) \;=\; \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{inx} \tag{D.6}$$

Per calcolare i coefficienti A_n moltiplichiamo ambo i membri della (D.6) per e^{-imx} e integriamo tra 0 e 2π. Usando la *relazione di ortonormalità*

$$\int_0^{2\pi} e^{ix(n-m)}\ dx \;=\; 2\ \pi\ \delta_{nm} \tag{D.7}$$

ove δ_{nm} è il *simbolo di Kronecker* e vale 0 se $n \neq m$, 1 se $n = m$, abbiamo

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ixm}\ dx \;=\; \sum_{-\infty}^{\infty} A_n\delta_{nm} \;=\; A_m \tag{D.8}$$

Se ora consideriamo lo sviluppo (D.6) e usiamo la (D.7) abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(x) \mid \;&=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{n,m} A_n A_m^* \int_0^{2\pi} e^{ix(n-m)}\ dx \\ &=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid A_n \mid^2 \end{aligned} \tag{D.9}$$

che stabilisce la *completezza* della serie di Fourier e prende il nome di *teorema di Parseval.* Di consueto, per simmetria, si considera lo sviluppo nell'intervallo simmetrico $(-\pi, \pi)$, per cui le (D.6) e (D.8) diventano

$$f(x) \;=\; \sum_n A_n e^{inx} \tag{D.10}$$

$$A_n \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ixn}\ dx \tag{D.11}$$

D.2 Integrale di Fourier

Le considerazioni precedenti possono essere estese al caso di una funzione qualsiasi (cioè non periodica o , che è lo stesso, periodica con periodo infinito) se, formalmente facciamo il limite $T \to \infty$ nelle equazioni precedenti. Per questo poniamo

$$\frac{2\pi n}{T} \equiv k_n \tag{D.12}$$

e

$$A_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-ik_n x} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(k_n)\, \Delta k \tag{D.13}$$

ove

$$F(k_n) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-ik_n x} f(x)\, dx \tag{D.14}$$

e $\Delta k = 2\pi/\mathrm{T}$. Le (D.10) e (D.11) divengono allora quando $T \to \infty$ e supponendo convergenti tutti i limiti coinvolti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{ikx}\, dk \tag{D.15}$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \tag{D.16}$$

Convenzionalmente si dice che $F(k)$ è la *trasformata di Fourier* di $f(x)$ e che $f(x)$ è l' *antitrasformata di Fourier* di $F(k)$.

Considerando le condizioni sotto le quali il passaggio al limite dal caso discreto al caso continuo può essere effettuato, si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione ammetta trasformata di Fourier è che essa sia di classe L^2, cioè che l'integrale del suo modulo quadro tra $-\infty$ e $+\infty$ sia finito.

In maniera analoga e sotto condizioni del tutto simili, il formalismo delle trasformate di Fourier si estende al caso tridimensionale:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int F(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3\vec{k} \tag{D.17}$$

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3\vec{r} \tag{D.18}$$

Per una descrizione più completa dell'argomento si faccia riferimento agli appunti del Corso di Metodi Matematici 1 (reperibili all'indirizzo: http://www.ph.unit.it/ccl/riforma/progr_2000_comdid.html)