Appendice E

Cenni sui tensori

E.1 Generalità sui tensori

Un *tensore* è una entità costituita da componenti che, in genere, sono funzioni di un certo numero di variabili indipendenti (le coordinate in un certo spazio, che individuano un punto dello spazio). L'insieme delle componenti si comporta come un tensore o meno a seconda del *modo in cui le componenti si trasformano per un cambiamento di coordinate.*

In uno spazio a n dimensioni (cioè n variabili o coordinate) un tensore di rango r ha n^r componenti. Un tensore di rango zero ha una sola componente A ed è chiamato *scalare.* Un tensore di rango 1 ha n componenti $(A_1, A_2, ...A_n)$ ed è chiamato *vettore.* Un tensore di rango 2 ha n^2 componenti e si può rappresentare sotto forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & .... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Il tensore è detto singolare se il determinante della matrice è nullo ed è detto simmetrico se $A_{ij} = A_{ji}$ per tutti gli indici i e j. I tensori di rango più alto vengono rappresentati indicando la componente generica, A_{ijk} per un tensore di rango 3, A_{ijkl} per un tensore di rango 4 e così via. In genere bisogna tenere conto dell'ordine degli indici, cioè $A_{123} \neq A_{231}$, a meno di particolari proprietà di simmetria del tensore. Si noti che quando si rappresentano le componenti di un tensore di rango 2, A_{ij}, sotto forma di matrice il primo indice si riferisce sempre alla riga, il secondo alla colonna.

E.2 Definizione di tensore

Si consideri un sistema di coordinate x_i i=1, 2, ... n nello spazio a n dimensioni ed un secondo sistema di coordinate $x_l^{'}$ l=1, 2, ... n. Siano $A_{ij...k}$ le componenti di un tensore nel sistema delle x_i e $A_{lm...n}^{'}$ le sue componenti nel sistema delle $x_l^{'}$. Si supponga che i due sistemi delle x_i e delle $x_j^{'}$ siano legati da una trasformazione di coordinate che non sia singolare, cioè che le equazioni che esprimono le $x_l^{'}$ in funzioni delle x_i siano invertibili in modo da poter esprimere le x_i in funzione delle $x_j^{'}$, e che le funzioni che specificano la trasformazione $x_l^{'} = f(x_i)$ siano derivabili tante volte quanto è necessario.

Un'entità con componenti $A_{ij...k}$ nel sistema delle x_i e $A_{lm...n}^{'}$ nel sistema delle $x_l^{'}$ si comporta per definizione come un *tensore covariante per la trasformazione* $x_i \to x_l^{'}$ se

$$A_{lm...n}^{'} = \sum_i \sum_j ... \sum_k A_{ij...k} \frac{\partial x_i}{\partial x_l^{'}} \frac{\partial x_j}{\partial x_m^{'}} ... \frac{\partial x_k}{\partial x_n^{'}} \tag{E.1}$$

Similmente $A^{ij...k}$ si comporta per definizione come un *tensore controvariante per la trasformazione* $x_i \to x_l^{'}$ se

$$A^{'lm...n} = \sum_i \sum_j ... \sum_k A^{ij...k} \frac{\partial x_l^{'}}{\partial x_i} \frac{\partial x_m^{'}}{\partial x_j} ... \frac{\partial x_n^{'}}{\partial x_k} \tag{E.2}$$

Infine $A_{k...l}^{i...j}$ si comporta per definizione come un *tensore misto per la trasformazione* $x_i \to x_l^{'}$ se

$$A_{p...q}^{'m...n} = \sum_i ... \sum_j ... \sum_k ... \sum_l A_{k..l}^{i...j} \frac{\partial x_m^{'}}{\partial x_i} ... \frac{\partial x_n^{'}}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial x_p^{'}} ... \frac{\partial x_l}{\partial x_q^{'}} \tag{E.3}$$

Se si afferma semplicemente che una entità è un tensore si intende che essa si comporta come un tensore per tutte le trasformazioni delle coordinate pertinenti, non singolari e derivabili. Si può osservare che in ogni dato punto le $\frac{\partial x^{'}}{\partial x}$ sono numeri puri, per cui le trasformazioni di tensori (E.1)–(E.3) sono lineari: le componenti nel nuovo sistema sono funzioni lineari delle componenti nel vecchio, con coefficienti uguali a prodotti di derivate parziali prime calcolate nel punto dato.

Tensori covarianti comportano derivate delle vecchie coordinate rispetto alle nuove e vengono indicati con indici posti a pedice; tensori controvarianti comportano derivate delle nuove coordinate rispetto alle vecchie e vengono indicati con indici posti ad apice; tensori misti, infine comportano derivate di entrambi i tipi e vengono indicati con indici ad apice e a pedice in corrispondenza delle coordinate per le quali si hanno trasformazioni di tipo controvariante e covariante rispettivamente.

Le definizioni date, applicate ad un tensore di rango zero (scalare) comportano che $A' = A$; perciò uno scalare è funzione solo della posizione, è indipendente dal sistema di coordinate e viene detto *invariante*.

Ricordiamo, infine, il teorema principale del calcolo tensoriale: *se due tensori dello stesso tipo sono uguali in un sistema di coordinate, lo sono in tutti i sistemi.*