

# Appendice F

## Cenni sulle funzioni di Bessel

Riassumiamo brevemente definizioni e proprietà delle funzioni di Bessel.

L'equazione differenziale

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (\text{F.1})$$

prende il nome di *equazione di Bessel*; le sue soluzioni sono chiamate *funzioni di Bessel* di ordine  $\nu$ . La forma esplicita della soluzione, indicata comunemente con  $J_\nu(x)$ , è:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad (\text{F.2})$$

e prende il nome di *funzione di Bessel di prima specie di ordine  $\nu$* ;  $\Gamma$  è la funzione di Eulero, la cui rappresentazione integrale è:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{F.3})$$

Si può dimostrare che la serie che definisce la  $J_\nu(x)$  converge per tutti i valori finiti di  $x$  e per ogni  $\nu$ . Se  $\nu$  non è un numero intero, la funzione  $J_{-\nu}(x)$ , che è a sua volta soluzione della (F.1), risulta linearmente indipendente da  $J_\nu(x)$  e le due funzioni  $J_{\pm\nu}(x)$  costituiscono una coppia di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale di second'ordine di Bessel. Se, invece,  $\nu$  è un numero intero, le due soluzioni sono linearmente dipendenti e vale la relazione:

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x) \quad (\text{F.4})$$

Pertanto è necessario trovare un'altra soluzione linearmente indipendente quando  $\nu$  è intero. Normalmente, anche quando  $\nu$  non è un intero, si sostituisce la coppia  $J_{\pm\nu}(x)$  con la coppia costituita da  $J_\nu(x)$  e da  $N_\nu(x)$ , la cosiddetta *funzione di Neumann o funzione di Bessel di seconda specie*:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (\text{F.5})$$

che è linearmente indipendente da  $J_\nu(x)$ , qualunque sia  $\nu$ .

Accanto alle funzioni di Bessel di prima e di seconda specie è sovente utile considerare le cosiddette *funzioni di Bessel di terza specie o funzioni di Hankel*, definite come particolari combinazioni lineari di  $J_\nu(x)$  e  $N_\nu(x)$ :

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

esse formano un insieme fondamentale di soluzioni dell'equazione di Bessel, al pari delle  $J_\nu(x)$  e  $N_\nu(x)$ . Si noti che, facendo un parallelismo tra le funzioni di Bessel e le funzioni trigonometriche, si può dire, in un certo senso, che le funzioni  $J_\nu(x)$  e  $N_\nu(x)$  stanno a  $\cos x$  e  $\sin x$  come le funzioni  $H_\nu^{(1)}(x)$  e  $H_\nu^{(2)}(x)$  stanno agli esponenziali  $e^{iz}$  e  $e^{-iz}$ ; come in certi problemi che portano a considerare funzioni di tipo trigonometrico è più opportuno a volte servirsi di seno e coseno e a volte di esponenziali, così nei problemi che portano alle funzioni di Bessel si useranno, di volta in volta, come sistema fondamentale di soluzioni, o le funzioni  $J_\nu(x)$  e  $N_\nu(x)$  o le funzioni di Hankel, a seconda del particolare problema.

Tutte le funzioni  $J_\nu(x)$ ,  $N_\nu(x)$ ,  $H_\nu^{(1)}(x)$ ,  $H_\nu^{(2)}(x)$  soddisfano le *formule ricorrenti*

$$\Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \Omega_\nu(x) \quad (\text{F.7})$$

$$\Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) = 2 \frac{d\Omega_\nu(x)}{dx} \quad (\text{F.8})$$

dove  $\Omega_\nu(x)$  è una qualsiasi delle funzioni suindicate. In particolare, tenuto conto della (F.4), per  $\nu$  intero si ha  $J'_0(x) = (-1) J_1(x)$ .

In figura F.1 sono riportate le funzioni di Bessel di prima e di seconda specie di ordine 0 e 1; in figura F.2, invece, sono riportate le derivate prime delle funzioni  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ ,  $N_0(x)$  ed  $N_1(x)$ .

Per completezza, riportiamo i comportamenti asintotici dei vari tipi di funzioni di Bessel per valori molto grandi e molto piccoli dell'argomento. Per semplicità indicheremo soltanto i termini dominanti dei rispettivi sviluppi:

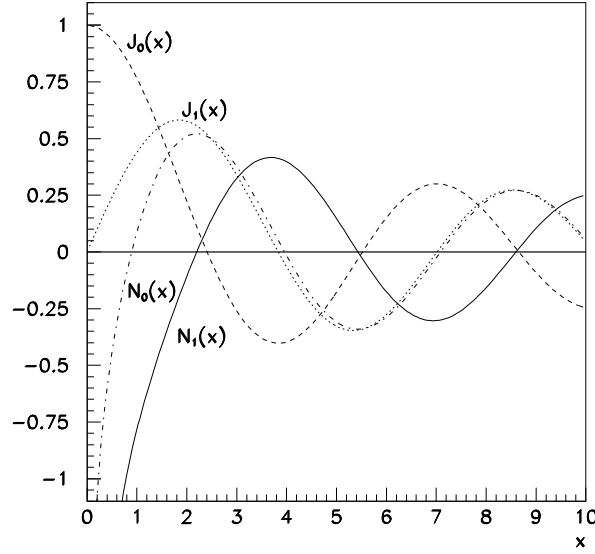


Figura F.1:

- $x \ll 1$

$$\begin{aligned}
 J_\nu(x) &\rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\
 N_\nu(x) &\rightarrow \frac{2}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0.5772 \dots \right] \quad \nu = 0 \\
 &\quad -\frac{\Gamma\nu}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad \nu \neq 0
 \end{aligned} \tag{F.9}$$

In queste formule si assume che  $\nu$  sia reale e non negativo.

- $x \gg 1, \nu \geq 0$

$$\begin{aligned}
 J_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 N_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned} \tag{F.10}$$

La transizione dal comportamento per  $x$  piccolo alla forma asintotica per  $x$  grande avviene nella regione  $x \simeq \nu$ .

Dalle espressioni asintotiche (F.10) risulta chiaro che ciascuna delle funzioni di Bessel, presentando un andamento oscillatorio attorno al valore zero, ha un numero infinito di zeri; questo è visibile nella figura (F.1) per le funzioni di prima e seconda specie di ordine 0 e 1, mentre dalla figura (F.2) si può dedurre che anche le derivate prime delle summenzionate funzioni godono della stessa proprietà. Consideriamo in particolare le radici di  $J_\nu(x)$ :

$$J_\nu(x_{\nu m}) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{F.11}$$

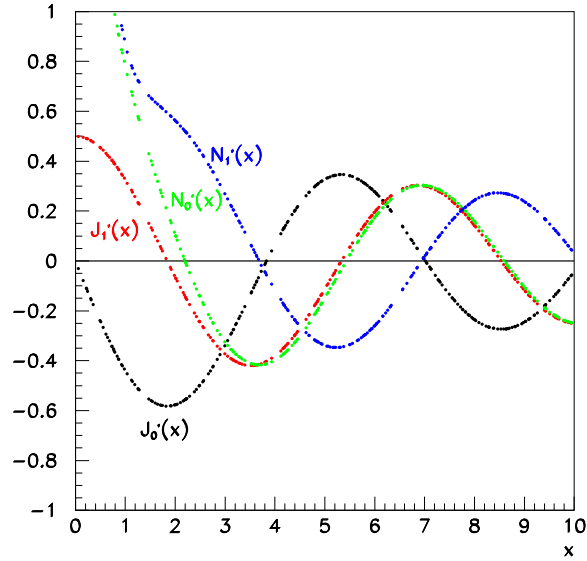


Figura F.2:

dove  $x_{\nu m}$  è la radice  $m$ -esima di  $J_\nu(x)$ . Per i primi tre valori di  $\nu$  le prime tre radici sono:

$$\nu=0, \quad x_{0n} = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$$

$$\nu=1, \quad x_{1n} = 3.832, 7.016, 10.173, \dots$$

$$\nu=2, \quad x_{2n} = 5.136, 8.417, 11.620, \dots$$

(si noti che gli zeri risultano spaziati di circa  $\pi$ .)

Per gli zeri ulteriori la formula asintotica:

$$x_{\nu n} \simeq n\pi + (\nu - 1/2) \frac{\pi}{2} \quad (\text{F.12})$$

dà una approssimazione sufficiente.

Le funzioni di Bessel di ordine intero ( $\nu=n$ ) vengono anche indicate come *funzioni di Bessel cilindriche*, mentre si indicano generalmente col nome di *funzioni di Bessel sferiche* quelle ad indice semintero ( $\nu= n+1/2$ ). Tali denominazioni derivano dalle simmetrie dei problemi che portano alla considerazione di queste funzioni.

È invalso l'uso di definire le funzioni sferiche di Bessel e Hankel, indicate con i simboli  $j_l(x)$ ,  $h_l(x)$  e  $n_l(x)$ , nel modo seguente:

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(x)$$

$$n_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} N_{l+1/2}(x)$$

$$h_l^{(1,2)}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} [J_{l+1/2}(x) \pm iN_{l+1/2}(x)] \quad (\text{F.13})$$

Per  $x$  reale  $h_l^{(2)}(x)$  è il complesso coniugato di  $h_l^{(1)}(x)$ .

Per i primi valori dell'indice  $l$ , le forme esplicite delle (F.13) sono:

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x} \\ n_0(x) &= -\frac{\cos x}{x} \\ h_0^{(1)}(x) &= \frac{e^{ix}}{ix} \\ j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \\ n_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\ h_1^{(1)}(x) &= -\frac{e^{ix}}{x} \left(1 + \frac{i}{x}\right) \\ j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2} \\ n_2(x) &= -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3 \sin x}{x^2} \\ h_2^{(1)}(x) &= \frac{ie^{ix}}{x} \left(1 + \frac{3i}{x} - \frac{3}{x^2}\right) \\ j_3(x) &= \left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right) \sin x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x \\ n_3(x) &= -\left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right) \cos x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x \\ h_3^{(1)}(x) &= \frac{e^{ix}}{x} \left(1 + \frac{6i}{x} - \frac{15}{x^2} - \frac{15i}{x^3}\right) \end{aligned}$$

in figura F.3 sono riportate  $j_0(x)$ ,  $n_0(x)$ ,  $j_1(x)$  e  $n_1(x)$ .

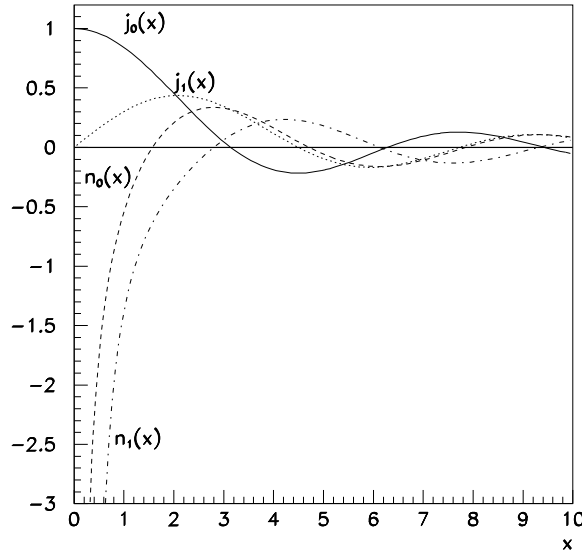


Figura F.3:

Per piccoli valori di  $x$  si hanno le seguenti espressioni asintotiche:

$$j_l(x) \rightarrow \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \dots\right)$$

$$n_l(x) \rightarrow -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} \left(1 - \frac{x^2}{2(1-2l)} + \dots\right) \quad (\text{F.14})$$

Analogamente si ottengono le espressioni asintotiche per grandi valori di  $x$ :

$$\begin{aligned} j_l(x) &\rightarrow \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \\ n_l(x) &\rightarrow -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \\ h_l^{(1)}(x) &\rightarrow (-i)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x} \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

Le funzioni di Bessel sferiche soddisfano le relazioni ricorrenti:

$$\frac{2l+1}{x} z_l(x) = z_{l-1}(x) + z_{l+1}(x) \quad (\text{F.16})$$

$$z_l'(x) = \frac{1}{2l+1} [lz_{l-1}(x) - (l+1)z_{l+1}(x)] \quad (\text{F.17})$$

dove  $z_l(x)$  rappresenta una qualsiasi delle funzioni  $j_l(x)$ ,  $n_l(x)$ ,  $h_l^{(1)}(x)$ ,  $h_l^{(2)}(x)$ .

Accenniamo, infine, alle *funzioni di Bessel modificate*. Esse sono soluzioni dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (\text{F.18})$$

e, come evidente, non sono altro che funzioni di Bessel con argomento immaginario puro. Ordinariamente, nella scelta di una coppia di soluzioni linearmente indipendenti, queste sono indicate come  $I_\nu(x)$  e  $K_\nu(x)$ , e sono definite dalle:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad (\text{F.19})$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) \quad (\text{F.20})$$

che sono funzioni reali per  $x$  e  $\nu$  reali. Le loro espressioni asintotiche per  $x$  piccolo e per  $x$  grande, supponendo  $x$  reale e positivo o nullo, sono:

- $x \ll 1$

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &\rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\ K_\nu(x) &\rightarrow -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0.5772 \dots\right] \nu = 0 \\ &\quad \frac{\Gamma\nu}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \quad \nu \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

- $x \gg 1, \nu \geq 0$

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \\ K_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

In figura F.4 sono riportate  $I_0(x)$ ,  $K_0(x)$ ,  $I_1(x)$  e  $K_1(x)$ .

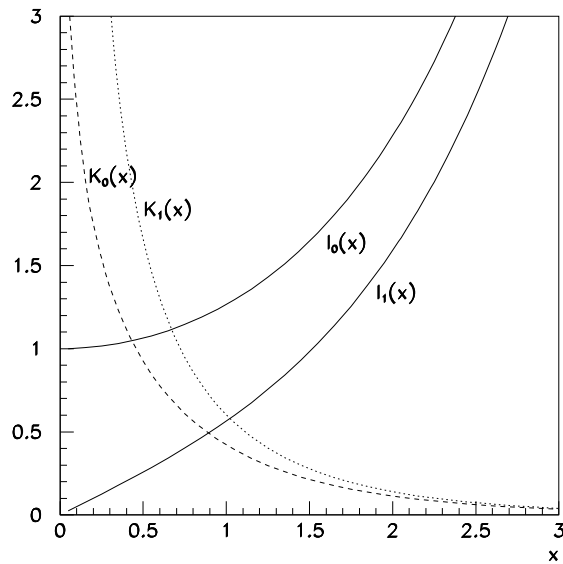


Figura F.4: