

Capitolo 1

Equazioni di Maxwell

La descrizione in termini classici dei fenomeni elettromagnetici (E.M.) è data dalle equazioni di Maxwell (EqM) e risale a 140 anni fa. Ad essere pignoli, Maxwell aggiunse un termine (la corrente di spostamento) ad una delle quattro equazioni, già proposte da altri autori precedenti, ma il suo nome è associato a tutto il complesso di equazioni che legano i campi E.M. alle sorgenti (distribuzioni di cariche e di correnti) in quanto egli operò la prima unificazione tra fenomeni fisici apparentemente scorrelati (l'elettricità, il magnetismo e l'ottica).

L'osservazione principale era che la velocità di propagazione delle oscillazioni trasversali dell'ipotetico mezzo materiale, l'*etere* (che non serviva a niente altro se non a suffragare l'ipotesi che un qualsiasi fenomeno fisico non potesse avvenire se non in presenza di un mezzo materiale) era eguale a quella della luce. Dal senno di poi sappiamo che l'etere, come altre *entità* fisiche che *dovevano* esistere, anche se non accessibili a nessuna misura diretta, per non contraddire le elucubrazioni teoriche più gettonate in quel momento (tipo il *calorico*), non esiste.

I fisici di oggi continuano a muoversi nella direzione indicata da Maxwell di cercare l'unificazione di fenomeni apparentemente scorrelati, e con successo (l'unificazione tra interazioni E.M. e interazioni deboli è di un paio di decenni fa.)

Pur con i limiti concettuali (trattazione non relativistica) le EqM rimangono ancora oggi lo strumento di base per la comprensione di tutti i fenomeni E.M., e soprattutto per le applicazioni.

Ricordiamo le EqM, nel sistema SI, in forma differenziale, nel vuoto:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (\text{alias teorema di Gauss}) \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{non ci sono cariche magnetiche libere}) \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{alias legge di Faraday - Neumann - Lenz}) \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

(senza l'ultimo termine è il teorema della circuitazione di Ampère).

Nelle precedenti equazioni \vec{E} è il vettore *intensità di campo elettrico*, \vec{B} è il vettore *induzione magnetica*, ρ la *densità di carica* e \vec{j} la *densità di corrente*.

L'uso del sistema SI è il “meno peggio” soprattutto per quanto riguarda le applicazioni, dove siamo condizionati dall'uso generalizzato di Volt/m per \vec{E} e Tesla per \vec{B} . Siamo peraltro costretti a portarci dietro i valori $\epsilon_0 = 8.84 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ e $\mu_0 = 12.566 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$. Per fortuna $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c = 299792456.2 \pm 1.1 \text{ m s}^{-1}$, misurata con tale precisione da costituire ormai una grandezza fondamentale.

Il sistema di Gauss, che fa comparire c nei secondi membri delle (1.1) e (1.4), è più semplice nella scrittura delle equazioni e nell'interpretazione, ma si porta dietro la complicazione di esprimere \vec{E} e \vec{B} in unità poco convenzionali.

A puro titolo di esempio di complicazioni dovute alle unità di misura e di assoluta validità delle EqM a descrivere qualsiasi fenomeno elettromagnetico, poniamoci questo problema. I fenomeni di tipo elettrico (o meglio elettrostatico) sono molto più evidenti che non quelli di tipo magnetico (o meglio magnetostatico), e ciò porta alla convinzione errata che le intensità di \vec{E} ottenibili e maneggiabili siano molto superiori a quelli di \vec{B} . In realtà stiamo paragonando grandezze fisiche diverse, espresse in unità di misura convenzionali diverse, cioè le classiche capre con cavoli. Possiamo ottenere un paragone significativo guardando gli effetti. È noto che la densità di energia W in una regione spaziale in cui esiste un campo \vec{E} uniforme ed un campo di induzione magnetica \vec{B} uniforme sono date da:

$$W_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (1.5)$$

e rispettivamente

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (1.6)$$

supponendo di essere nel vuoto ed indicando con E e B i moduli dei rispettivi vettori.

Chiediamoci ora quale sia l'intensità del campo elettrico, E , supposto uniforme nel volume che consideriamo (1 m^3), necessario ad avere la stessa

densità di energia ottenuta con un campo di induzione B , sempre uniforme, di 1T. Si vede immediatamente che deve essere $E=cB$ e quindi E risulta essere di 3×10^8 V/m. Per completezza, la densità di energia W risulta essere di $\sim 4 \times 10^5$ J/m³.

Per quanto riguarda la densità di energia magnetica, i valori descritti sono facilmente ottenibili e comunemente usati, in Laboratorio ma anche in diagnostica medica (risonanza magnetica nucleare). Lo stesso non è per la densità di energia elettrica. Campi elettrostatici di 3×10^8 V/m non sono ottenibili, non certo in aria, come per il campo magnetico, ma neanche in condizioni di vuoto spinto. Perché e come lo vediamo dalle EqM. Premettiamo che molto spesso, a seconda delle circostanze, confonderemo il “vuoto teorico” con il “vuoto sperimentale” e con l’aria, nel senso che in molte circostanze i fenomeni sono sostanzialmente gli stessi. Questo non è il caso dell’esempio sopra riportato, nel senso che in aria, ma anche in condizioni di “vuoto sperimentale” esistono comunque delle cariche libere, che vengono accelerate in un campo \vec{E} e dissipano l’energia immagazzinata, mentre non esistono cariche magnetiche libere e questo è contenuto nelle prime due EqM.

Nelle EqM nel vuoto compaiono ρ e \vec{j} , nell’ipotesi che la carica sia una grandezza fisica continua. Dall’esperimento di Millikan, successivo alla formulazione delle EqM, sappiamo che non è così, ma che esiste una carica elettrica elementare, quella dell’elettrone, pari a 1.6×10^{-19} C. Sappiamo anche che le cariche elementari positive e negative sono associate a particelle di massa diversa, quella positiva al protone di massa 1.67252×10^{-27} kg e quella negativa all’elettrone di massa 9.10909×10^{-31} kg. Come possiamo esprimere ρ e \vec{j} in maniera realistica, tenendo conto che la carica è discreta? Possiamo scrivere classicamente:

$$dq = \rho dV \quad \text{con } \rho = \rho(x, y, z, t) \quad (1.7)$$

e quindi

$$q = \int_V \rho dV \quad (1.8)$$

per quanto riguarda la carica totale contenuta in un volume V .

Tenendo conto della struttura atomica della materia possiamo scrivere, in luogo della (1.8):

$$q = \sum_{i=1}^{n(V)} q_i \quad (1.9)$$

che descrive il fatto che la carica considerata è costituita da $n(V)$ cariche elementari q_i appartenenti agli elettroni ed agli ioni positivi, oppure ai nuclei

atomici, della materia contenuta nel volume V . Scegliendo, anzichè V , un volume ΔV abbastanza piccolo, la densità di carica nel suo punto centrale può essere assunta eguale alla densità media. Possiamo cioè porre:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n(V)} q_i}{\Delta V} \quad (1.10)$$

Ciò richiede, però, che, anche quando ΔV è molto piccolo, $n(\Delta V)$ sia grande abbastanza da poter ritenere continua la distribuzione di carica. In pratica ciò accade quasi sempre; il numero di cariche presenti nella materia è, infatti, molto elevato essendo il suo ordine di grandezza compreso tra $10^{26}/\text{m}^3$, per i gas in condizioni normali di temperatura e pressione, e $10^{31}/\text{m}^3$, per le sostanze solide. Si badi però che nelle (1.9) e (1.10) intervengono cariche q_i di segno opposto le quali, per un oggetto materiale macroscopico, si compensano di regola quasi esattamente. L'eccesso di una carica, positiva o negativa, su $10^{11} \div 10^{12}$ cariche dei due segni corrisponde già ai massimi possibili valori di ρ . Ciò è dovuto al fatto che un sensibile eccesso di carica, positivo o negativo, darebbe luogo a delle forze repulsive così intense da vincere la coesione della materia di cui è costituito l'oggetto.

Tuttavia, utilizzando una speciale funzione discontinua dovuta a Dirac, è possibile estendere il concetto di densità di carica anche a distribuzioni discrete, contenenti un numero di cariche arbitrariamente piccolo. Consideriamo, a questo scopo, la cosiddetta *funzione δ tridimensionale*; essa, data una funzione arbitraria del posto \vec{x} , $f(\vec{x})$, è definita dalla relazione:

$$\int_V f(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) dV = f(\vec{x}_i) \quad (1.11)$$

e, in particolare,

$$\int_V \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) dV = 1 \quad (1.12)$$

Sostanzialmente $\delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$ è una funzione nulla dappertutto, tranne nel punto \vec{x}_i dove, pur soddisfacendo la condizione (1.12), assume un valore infinito. Poniamo, come definizione di ρ :

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n(V)} q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (1.13)$$

da essa risulta subito, integrando su V , che la (1.8) è verificata e la carica totale q assume il valore (1.9) indipendentemente da ogni restrizione sul valore di n . La (1.13) esprime pertanto, nel modo più generale, la relazione tra ρ e la distribuzione della cariche q_i .

Al moto delle cariche possiamo associare un vettore \vec{j} , detto *densità di corrente*, mediante le seguenti due relazioni:

$$\vec{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n(\Delta V)} q_i \vec{v}_i}{\Delta V} \quad (1.14)$$

e

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{n(\Delta V)} q_i \vec{v}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (1.15)$$

dove \vec{v}_i è la velocità della i -esima carica. La (1.14), analogamente al caso della (1.10), corrisponde al caso della distribuzione continua; la (1.15), analogamente alla (1.13), è del tutto generale.

Introducendo la seguente definizione della velocità media delle $n(\Delta V)$ cariche:

$$\vec{v} = \frac{\sum_{i=1}^{n(\Delta V)} q_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n(\Delta V)} q_i} \quad (1.16)$$

e, ricordando la (1.10), possiamo scrivere:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1.17)$$

La generalizzazione della (1.16) al caso della distribuzione discreta è banale: \vec{v} , in questo caso, può essere calcolato sostituendo le (1.13) e (1.15) nella (1.17). Si deve notare, riguardo l'equazione (1.16), che il rapporto tra la velocità media \vec{v} e le velocità \vec{v}_i delle singole cariche può essere diversissimo a seconda dei casi. Nei raggi catodici, ad esempio, \vec{v} coincide praticamente con le velocità dei singoli elettroni; gli elettroni di conduzione di un metallo, invece, posseggono delle velocità che raggiungono i 10^6 m/s, contro una velocità media, dovuta al passaggio della corrente, dell'ordine di soli 10^{-4} m/s.

Un'ulteriore considerazione riguarda la linearità delle EqM nei campi \vec{E} e \vec{B} . Ciò significa che il campo esistente in un dato punto dello spazio, dovuto alla presenza di un certo numero N di sorgenti (cariche e correnti) è la somma vettoriale degli N campi dovuti alle singole sorgenti in conformità al *Principio di Sovrapposizione*. Dalla struttura stessa delle EqM appare anche chiaro che \vec{E} è un vettore polare, che cambia cioè segno per inversione del segno delle coordinate spaziali, e \vec{B} è invece un vettore assiale (o pseudovettore), che non cambia segno. Si ricorda infatti che l'operatore $\nabla \times$ trasforma un vettore polare in uno assiale e viceversa. Le (1.3) e (1.4) evidenziano questa proprietà.

Per descrivere i fenomeni E.M. nei mezzi materiali è noto che bisogna introdurre i vettori \vec{D} e \vec{H} , con le debite complicazioni di forma e di sostanza. Le affronteremo al momento debito.

1.1 Le leggi di Laplace e Coulomb

Consideriamo un fenomeno *puramente stazionario*, per il quale cioè il campo elettrico di intensità \vec{E} , il campo magnetico di induzione \vec{B} , la densità di carica ρ e la densità di corrente \vec{j} non variano nel tempo; partendo dalle EqM (1.1)–(1.4) si possono ricavare le espressioni esplicite dei campi (statici), che saranno, in generale più utili della *legge della circuitazione di Ampère* (1.4) o del *teorema di Gauss* (1.1), i quali determinano i campi solo in forma implicita. Il procedimento qui usato è estensibile anche al caso non stazionario, ponendo però una particolare cura nell'esame della dipendenza temporale dei campi, e verrà utilizzato nel seguito del Corso per risolvere le EqM nel caso generale.

Consideriamo l'equazione (1.4); nel caso stazionario essa si riduce a:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.18)$$

applicando ad ambo i membri l'operatore vettoriale rotore si ottiene:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla \nabla \cdot \vec{B} - \nabla^2 \vec{B} = \nabla \times \mu_0 \vec{j} \quad (1.19)$$

dove ∇^2 indica l'operatore laplaciano e dove si è tenuto conto che vale la relazione vettoriale:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla \nabla \cdot \vec{B} - \nabla^2 \vec{B} \quad (1.20)$$

Ricordando la (1.2) la (1.19) diventa:

$$\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \nabla \times \vec{j} \quad (1.21)$$

In modo analogo, applicando l'operatore rotore alla (1.3) scritta nel caso stazionario si ottiene:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (1.22)$$

che, ricordando la (1.1), fornisce l'equazione:

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.23)$$

Le due equazioni vettoriali (1.21) e (1.23), qualora \vec{E} , \vec{B} e \vec{j} vengano espressi mediante le loro componenti cartesiane, si riducono ad un sistema di sei equazioni scalari della forma:

$$\nabla^2 \varphi = \Phi \quad (1.24)$$

dove $\varphi = \vec{B}_i$ ($i = 1, 2, 3$) o, rispettivamente, $\varphi = \vec{E}_i$ e $\Phi = (-\mu_0 \nabla \times \vec{j})_i$ o, rispettivamente, $\Phi = (\nabla \frac{\rho}{\epsilon_0})_i$. Come si può vedere, Φ è una funzione assegnata del posto, dipendente dalla particolare distribuzione delle cariche o da quella delle correnti, supposte note per il problema considerato.

Per integrare la (1.24) si applica un metodo, dovuto a G. Green, che consiste nell'applicare l'omonimo lemma alla funzione scalare incognita φ ed ad un'altra funzione scalare ausiliaria, g , che non essendo fissata dal problema può essere scelta in modo opportuno. Generalmente conviene scegliere:

$$g = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_{PQ}} \quad (1.25)$$

dove r (r_{PQ}) è la distanza da un punto variabile Q al punto P in cui si vuole determinare il valore di φ . La funzione g è regolare in tutto lo spazio eccetto il punto P in cui, essendo $r = 0$, essa diventa infinita; inoltre, escluso il punto P , per essa vale ovunque l'equazione:

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right) = 0 \quad (1.26)$$

come è facile verificare considerando l'operatore laplaciano in coordinate polari sferiche e considerando che g non dipende dagli angoli polare ed azimuthale.

Il lemma di Green può essere scritto come:

$$\int_V (h \nabla^2 f - f \nabla^2 h) dV = \int_S (h \nabla f - f \nabla h) \cdot \vec{n} dS \quad (1.27)$$

dove f e g sono due funzioni scalari regolari sul volume V , S è la superficie che comprende il volume V e \vec{n} è la normale esterna alla superficie S . Per applicare il teorema nel caso in questione, consideriamo un volume V^* compreso entro una superficie S di forma arbitraria che contenga il punto P ed una seconda superficie sferica S_0 , di raggio molto piccolo, ϵ , concentrica al punto P , come indicato in figura 1.1. Poichè in questo volume le funzioni φ e g sono entrambe regolari (la funzione φ è regolare in quanto rappresenta una grandezza fisica), dal lemma di Green abbiamo:

$$\int_{V^*} (g \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 g) dV = \int_{S_0} (g \nabla \varphi - \varphi \nabla g) \cdot \vec{n} dS_0 + \int_S (g \nabla \varphi - \varphi \nabla g) \cdot \vec{n} dS \quad (1.28)$$

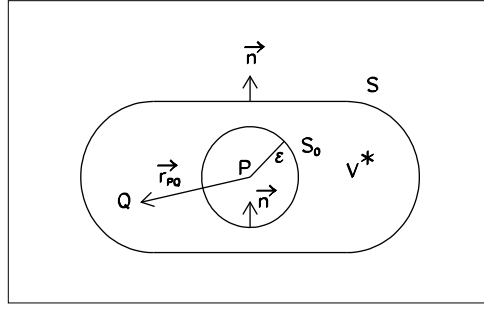


Figura 1.1:

ovvero, applicando la definizione di derivata direzionale di un campo scalare h secondo la direzione individuata dal versore \vec{u} , $\frac{dh}{du} = \nabla h \cdot \vec{u}$:

$$\int_{V^*} (g \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 g) dV = \int_{S_0} \left(g \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dg}{dn} \right) dS_0 + \int_S \left(g \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dg}{dn} \right) dS \quad (1.29)$$

Usando le equazioni (1.24) e (1.26) l'intergrale a primo membro diventa:

$$\int_{V^*} (g \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 g) dV = \int_{V^*} g \Phi dV \quad (1.30)$$

Trasformiamo il primo integrale a secondo membro della (1.29). Tenendo conto che sulla superficie S_0 la normale \vec{n} , essendo diretta all'esterno di V^* , è opposta al raggio \vec{r} (\vec{r}_{PQ}) risulta:

$$\frac{d}{dn} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{d}{dr} \text{ per } g(r) \right) \quad (1.31)$$

inoltre,

$$dS_0 = \epsilon^2 d\omega \quad (1.32)$$

ove $d\omega$ indica l'angolo solido elementare sotteso da dS_0 rispetto al punto P , e esplicitando g , il primo integrale di superficie nella (1.29) si scrive:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \left(g \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dg}{dn} \right) dS_0 &= - \int_{S_0} \left(g \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{dg}{dr} \right) dS_0 \\ &= - \int_{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varphi \frac{1}{\epsilon^2} \right) \epsilon^2 d\omega \end{aligned} \quad (1.33)$$

Introducendo i valori medi $\bar{\varphi}$ e $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r}$ della funzione φ e della sua derivata valutati sulla superficie S_0 e facendo tendere a zero il raggio ϵ , la (1.33) diventa:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \left(g \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dg}{dn} \right) dS_0 &= -4\pi\epsilon^2 \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + \bar{\varphi} \frac{1}{\epsilon^2} \right) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_0} \left(g \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dg}{dn} \right) dS_0 &= -4\pi \bar{\varphi} = -4\pi\varphi(P) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Inserendo questo risultato e la (1.30) nella (1.29) si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r_{PQ}} \frac{d\varphi(Q)}{dn} + \varphi(Q) \frac{1}{r_{PQ}^2} \frac{dr_{PQ}}{dn} \right) dS_Q - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Phi(Q)}{r_{PQ}} dV_Q \end{aligned} \quad (1.35)$$

in cui V indica l'intero volume interno alla superficie S (escluso il punto P).

Questa equazione, benchè dia un'espressione esplicita di φ non risolve ancora il problema della determinazione della funzione φ ; essa infatti richiede la conoscenza di φ e di $d\varphi/dn$ sulla superficie S . Dal punto di vista matematico la (1.35) può essere considerata un'equazione integrale equivalente all'equazione a derivate parziali (1.24). Tuttavia, supposto che la funzione Φ sia nulla in tutto lo spazio salvo entro una regione V_0 di estensione limitata, è possibile dimostrare che quando la superficie S va all'infinito l'integrazione su di essa dà contributo nullo. A questo scopo osserviamo che la (1.35), tenuto conto dell'ipotesi sul comportamento di Φ , può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r_{PQ}} \frac{d\varphi(Q)}{dn} + \varphi(Q) \frac{1}{r_{PQ}^2} \frac{dr_{PQ}}{dn} \right) dS_Q - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\Phi(Q)}{r_{PQ}} dV'_Q \end{aligned} \quad (1.36)$$

Dimostriamo che sostituendo nella (1.36) l'espressione:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\Phi(Q)}{r_{PQ}} dV'_Q \quad (1.37)$$

essa risulta identicamente verificata. Infatti, indicando con O un'origine arbitraria interna al volume V_0 , come indicato in figura 1.2, ed applicando il teorema di Carnot al triangolo POQ , la (1.37) può essere scritta nella forma:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi r_{PO}} \int_{V_0} \frac{\Phi(Q) dV'_Q}{\sqrt{1 - 2 \frac{r_{QO}}{r_{PO}} \cos \vartheta + \left(\frac{r_{QO}}{r_{PO}} \right)^2}} \quad (1.38)$$

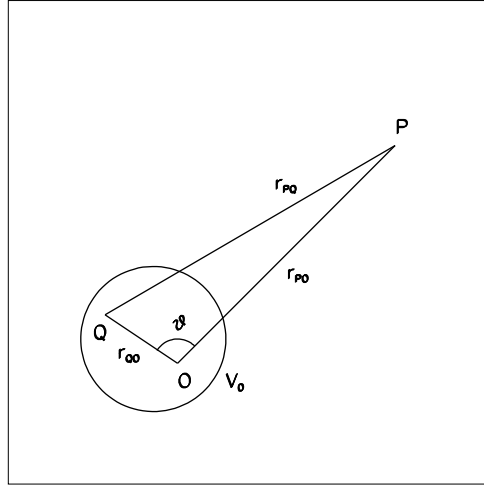


Figura 1.2:

dove r_{PO} , r_{QO} sono le distanze dei punti P e Q dall'origine e ϑ indica l'angolo $Q\hat{O}P$. Quando il punto P va all'infinito il rapporto r_{QO}/r_{PO} tende a zero e la (1.38) diventa asintoticamente:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \varphi(P) = -\frac{1}{4\pi r_{PO}} \int_{V_0} \Phi(Q) dV'_Q \quad (1.39)$$

in cui, manifestamente, l'integrale della funzione Φ è una quantità finita. Ne segue che valgono le equazioni asintotiche:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \varphi(P) r_{PO} = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \Phi(Q) dV'_Q = -k \quad (1.40)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{d\varphi(P)}{dr_{PO}} r_{PO}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \Phi(Q) dV'_Q = k \quad (1.41)$$

dove k è una costante finita. Possiamo ora valutare il primo integrale che compare nella (1.36). Assumendo come superficie S una sfera di centro O , le derivate rispetto alla direzione normale ad S vengono sostituite dalle derivate rispetto a r_{QO} . Di conseguenza, osservando che r_{PQ} e r_{PO} diventano coincidenti per Q tendente ad infinito e tenendo conto delle (1.40) e (1.41) (in cui si sostituisca P con Q), i due termini che compaiono nell'integrale in questione diventano asintoticamente proporzionali a r_{QO}^{-3} . Tenendo conto che l'estensione di S cresce proporzionalmente a r_{QO}^2 , ciò basta a concludere che l'integrale su S calcolato mediante la (1.37), tende a zero (questa conclusione è rafforzata dal fatto che i due contributi che intervengono nell'integrazione su S sono eguali in valore assoluto ma opposti in segno).

Abbiamo pertanto provato che la (1.36) effettivamente si riduce ad una identità quando in essa si sostituisca la (1.37). Essendo, d'altra parte, la (1.36) equivalente all'equazione iniziale (1.24), ne segue che l'espressione (1.37) di φ costituisce la soluzione di questa equazione nel caso in cui le condizioni limitative per la Φ siano verificate. Bisogna osservare che tali condizioni implicano condizioni equivalenti per $\vec{j}(Q)$ e $\rho(Q)$ di cui Φ è funzione; in pratica si ha che l'equazione (1.24) ammette come soluzione la (1.37) solo se l'estensione delle sorgenti dei campi statici è limitata, condizione che nella realtà è sempre verificata e perciò non risulta minimamente limitativa (basti pensare che in natura non esistono oggetti di dimensioni infinite e pertanto neppure distribuzioni di correnti o di cariche (stazionarie) infinite!). Inoltre, confrontando la (1.37) con la (1.35), risulta subito che nella (1.35) l'integrale su S rappresenta, per un volume V limitato e più piccolo di V_0 , il contributo dovuto ai valori di Φ esterni a V .

Applicando la (1.37) alle componenti della (1.21), si ottiene per il vettore induzione magnetica \vec{B} :

$$(\vec{B}(P))_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{(\nabla_Q \times \vec{j}(Q))_i}{r_{PQ}} dV_Q \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.42)$$

in cui si è indicato con V_0 il volume finito occupato dalle correnti (stazionarie) e $\nabla_Q \times$ indica il rotore calcolato rispetto alle coordinate del punto mobile Q ; la relazione vettoriale è ricavabile immediatamente. Poichè vale la relazione:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{j}}{r_{PQ}} \right) = \frac{1}{r_{PQ}} \nabla \times \vec{j} + \nabla \frac{1}{r_{PQ}} \times \vec{j} \quad (1.43)$$

possiamo scrivere la relazione vettoriale corrispondente alla (1.42) nella forma:

$$\begin{aligned} \vec{B}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \nabla_Q \times \left(\frac{\vec{j}}{r_{PQ}} \right) dV_Q - \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \nabla_Q \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) \times \vec{j}(Q) dV_Q \end{aligned} \quad (1.44)$$

dove ∇_Q indica il gradiente calcolato rispetto alle coordinate del punto mobile Q . Il primo integrale a secondo membro è nullo; infatti, in conseguenza del teorema della divergenza, si ha:

$$\int_{V_0} \nabla_Q \times \left(\frac{\vec{j}}{r_{PQ}} \right) dV_Q = \int_{S'} \vec{n} \times \left(\frac{\vec{j}}{r_{PQ}} \right) dS'_Q \quad (1.45)$$

dove S' è la superficie che limita il volume occupato dalla corrente e \vec{n} è la normale a S' diretta verso l'esterno. Poichè S' contiene all'interno tutti

i punti in cui \vec{j} è diverso da zero, l'integrale (1.45) effettivamente è nullo. Pertanto la (1.44) diventa:

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \nabla_Q \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) \times \vec{j}(Q) dV_Q \quad (1.46)$$

ovvero:

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} \times \vec{j}(Q) dV_Q = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \vec{j}(Q) \times \frac{\vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} dV_Q \quad (1.47)$$

che esprime la *prima legge di Laplace* per una distribuzione di correnti (stazionarie) in un volume finito V_0 con dimensioni trasverse non trascurabili. Considerando come elemento di volume un tratto di un sottile tubo di flusso, di lunghezza eguale al vettore infinitesimo $d\vec{s}$ parallelo alla densità di corrente \vec{j} e percorso da una corrente di intensità i , la (1.47) può essere scritta come:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s}(Q) \times \vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} \quad (1.48)$$

che, integrata sulla lunghezza totale del tubo di flusso, supposto infinito, fornisce la ben nota *legge di Biot-Savart*.

Partendo dalla (1.23) è possibile ottenere per il campo elettrico di intensità \vec{E} una espressione di tipo analogo. Infatti, applicando la (1.37) alle componenti della (1.23) si ha:

$$(\vec{E}(P))_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(\nabla_Q \rho(Q))_i}{r_{PQ}} dV_Q \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.49)$$

Poichè vale la relazione:

$$\nabla_Q \left(\frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \right) = (\nabla_Q \rho(Q)) \frac{1}{r_{PQ}} + \rho(Q) \nabla_Q \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) \quad (1.50)$$

si può scrivere la relazione vettoriale corrispondente alla (1.49) nella forma:

$$\vec{E}(P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{V_0} \nabla_Q \left(\frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \right) dV_Q - \int_{V_0} \rho(Q) \nabla_Q \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) dV_Q \right) \quad (1.51)$$

Di nuovo, il primo integrale a secondo membro è nullo: infatti, in conseguenza del teorema della divergenza, si ha:

$$\int_{V_0} \nabla_Q \left(\frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \right) dV_Q = \int_{S'} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \vec{n} dS' \quad (1.52)$$

dove S' è la superficie che limita il volume V_0 ; per le ipotesi fatte, la densità di carica su questa superficie e quindi gli integrali che compaiono nei due membri della (1.52) sono nulli. Si ha pertanto:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \rho(Q) \frac{\vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} dV_Q \quad (1.53)$$

che è l'espressione della *legge di Coulomb* per una distribuzione di cariche (stazionarie) estesa nel volume finito V_0 . Considerando la carica infinitesima contenuta in un elemento di volume dV_Q :

$$dq(Q) = \rho(Q) dV_Q \quad (1.54)$$

il contributo all'intensità del campo elettrico dovuto ad essa sarà:

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} \quad (1.55)$$