Capitolo 2

Potenziali E.M.

2.1 Potenziale vettore e potenziale scalare

Le EqM nel vuoto permettono di calcolare $\vec{E}$ e $\vec{B}$, in funzione del posto e del tempo, quando siano note le distribuzioni di ρ e di $\vec{j}$. Appare comunque chiaro che la descrizione con $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (6 funzioni, le componenti) a partire da quattro funzioni (le componenti di $\vec{j}$ e ρ) è ridondante, ed è possibile effettuare una riduzione. A questo scopo, osservando che la divergenza di un rotore è identicamente nulla ($\nabla \cdot \ \nabla \times \vec{v} = 0$, $\vec{v}$ vettore qualsiasi) e che tale è pure, per la (1.2), la divergenza di $\vec{B}$, poniamo:

$$\vec{B} \ = \ \nabla \times \vec{A} \tag{2.1}$$

dove $\vec{A}$ è un vettore, funzione del posto e del tempo, detto *potenziale vettore*. Sostituendo la (2.1) nella (1.3) e scambiando l'ordine delle derivate temporali e spaziali si ottiene:

$$\nabla \times \left(\vec{E} \ + \ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \ = \ 0 \tag{2.2}$$

Tenendo conto che il rotore di un gradiente è identicamente nullo ($\nabla \times \ \nabla \ s = 0$, s scalare qualsiasi), poniamo:

$$\vec{E} \ + \ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ = \ - \ \nabla \ V \tag{2.3}$$

dove V è una funzione del posto e del tempo, detta *potenziale scalare*. Il campo E.M. risulta così espresso mediante la (2.2) e la (2.3), riscritta come:

$$\vec{E} \ = \ - \ \nabla \ V \ - \ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2.4}$$

In esse intervengono solo quattro funzioni scalari, ossia V e le tre componenti di $\vec{A}$. Si deve però notare che la scelta dei potenziali $\vec{A}$ e V non è univoca. Infatti, indicata con $\vec{A}_0$ e V_0 una determinazione dei potenziali soddisfacente le (2.1) e (2.4), si verifica immediatamente che anche i potenziali:

$$\vec{A} \;=\; \vec{A}_0 \;+\; \nabla\,\phi \tag{2.5}$$

$$V \;=\; V_0 \;-\; \frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{2.6}$$

dove ϕ è una arbitraria funzione del posto e del tempo, soddisfano queste equazioni.

Determiniamo ora le equazioni cui obbediscono i potenziali $\vec{A}$ e V. A questo scopo sostituiamo le (2.1) e (2.4) nella (1.4); si ottiene:

$$\nabla\times\;\nabla\times\;\vec{A}\;+\;\epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla\,V\;+\;\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\;=\;\mu_0\vec{j} \tag{2.7}$$

Utilizzando l'identità

$$\nabla\times\;\nabla\times\;\vec{A}\;=\;\nabla\nabla\cdot\vec{A}\;-\;\nabla^2\vec{A} \tag{2.8}$$

la (2.7) diventa:

$$\nabla^2\vec{A}\;-\;\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}\;+\;\nabla\left(\nabla\;\cdot\;\vec{A}\;+\;\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,V}{\partial t}\right) \tag{2.9}$$

Analogamente, sostituendo la (2.4) nella (1.1) abbiamo:

$$\nabla^2 V\;+\;\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla\;\cdot\;\vec{A}\;=\;-\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.10}$$

È possibile dare a queste equazioni una forma più compatta approfittando della arbitrarietà della funzione ϕ. Supponiamo, infatti, di scegliere ϕ in modo che

$$\nabla\;\cdot\;\vec{A}\;+\;\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,V}{\partial t}=\;0 \tag{2.11}$$

ossia, come si vede subito usando le (2.5) e (2.6):

$$\nabla^2\phi\;-\;\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\phi}{\partial t^2}\;=\;-\;\left(\nabla\;\cdot\;\vec{A}_0\;+\;\frac{1}{c^2}\frac{\partial\,V_0}{\partial t}\right) \tag{2.12}$$

In questo modo, mediante la (2.12), che viene detta *condizione di gauge di Lorentz*, le equazioni per i potenziali diventano semplicemente:

$$\nabla^2 \vec{A} \ - \ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \ \vec{A}}{\partial t^2} \ = \ - \ \mu_0 \vec{j} \tag{2.13}$$

$$\nabla^2 V \ - \ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \ V}{\partial t^2} \ = \ - \ \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.14}$$

Esse, tenendo conto della (2.1) e della (2.4), della condizione di gauge di Lorentz e delle condizioni al contorno, ci permettono di determinare il campo E.M. in funzione delle cariche e delle correnti. Sovente, per semplificare le notazioni, si fa uso del simbolo

$$\Box \ = \ \nabla^2 \ - \ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2.15}$$

esso prende il nome di *operatore D'Alambertiano*. Le equazioni (2.12), (2.13) e (2.14) assumono così la forma:

$$\Box \phi \ = \ - \left(\nabla \ \cdot \ \vec{A}_0 \ + \ \frac{1}{c^2}\frac{\partial \ V_0}{\partial t} \right) \tag{2.16}$$

$$\Box \vec{A} \ = \ - \ \mu_0 \vec{j} \tag{2.17}$$

$$\Box V \ = \ - \ \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.18}$$

È importante rilevare che la condizione di gauge di Lorentz implica la validità della fondamentale equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{j} \ + \ \frac{\partial \rho}{\partial t} \ = \ 0 \tag{2.19}$$

che esprime il fondamentale e basilare concetto che la carica è conservata. Infatti applicando alla (2.17) l'operatore $\nabla \cdot$ e sommando con la (2.18) derivata rispetto a $c^2 t$, si ottiene:

$$0 \ = \ \Box \left(\nabla \cdot \vec{A} \ + \ \frac{1}{c^2}\frac{\partial \ V}{\partial t} \right) \ = \ -\mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{j} \ + \ \frac{\partial \ \rho}{\partial t} \right) \tag{2.20}$$

Ciò significa, in altri termini, che il legame esistente tra le soluzioni (2.17) e (2.18) corrisponde a quello che intercorre tra $\vec{j}$ e ρ.

Si può notare che a partire dalle quattro funzioni che descrivono le tre componenti di $\vec{j}$ e ρ si ottengono, tramite le (2.17) e (2.18), altre quattro funzioni (le tre componenti di $\vec{A}$ e V). Le (2.1) e (2.4) forniscono il legame con $\vec{E}$ e $\vec{B}$ che sono i campi fisici misurabili.

2.2 Superpotenziale di Hertz

Nelle applicazioni si può utilizzare la (2.19) per evitare di integrare l'equazione per il potenziale scalare V. Per fare ciò basta ricavare $\vec{A}$ dalla (2.17) e calcolarne la divergenza, dopodichè la (2.11), con una integrazione rispetto al tempo, ci fornisce, a meno di una costante dipendente dal posto, il valore di V. All'atto pratico questa costante può, di solito, essere determinata senza difficoltà; è tuttavia preferibile seguire un differente procedimento che, anche a priori, non dà luogo ad alcuna ambiguità. In altre parole, si cerca di ottenere una ulteriore riduzione del numero di funzioni che descrivono le sorgenti (3 anzichè 4) e di componenti dei campi generati.

A questo scopo introduciamo un vettore $\vec{Q}$, funzione del posto e del tempo, tale che:

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} \tag{2.21}$$

e

$$\rho = -\nabla \cdot \vec{Q} \tag{2.22}$$

Si constata immediatamente che la forma di queste equazioni garantisce la validità dell'equazione di continuità (2.19), qualunque sia $\vec{Q}$.

Poniamo ora:

$$\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \tag{2.23}$$

$$V = -\nabla \cdot \vec{Z} \tag{2.24}$$

dove $\vec{Z}$ è un vettore da determinarsi, detto *vettore (o superpotenziale) di Hertz*. Sostituendo le (2.23) e (2.24) nella (2.17) si ha:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Box \vec{Z} + \frac{\vec{Q}}{\epsilon_0}\right) = 0 \tag{2.25}$$

Analogamente, sostituendo le (2.23) e (2.24) nella (2.18) si ottiene:

$$\nabla \cdot \left(\Box \vec{Z} + \frac{\vec{Q}}{\epsilon_0}\right) = 0 \tag{2.26}$$

Basta pertanto assumere $\vec{Z}$ tale da verificare l'equazione:

$$\Box \vec{Z} = -\frac{\vec{Q}}{\epsilon_0} \tag{2.27}$$

perchè le (2.17) e (2.18) siano a loro volta verificate. Partendo dall'espressione di $\vec{Z}$ si può ottenere, mediante successive derivazioni, il campo E.M.; è da notare che la condizione di gauge di Lorentz è immediata conseguenza della forma delle (2.23) e (2.24). L'espressione per $\vec{B}$ risulta:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{Z} \tag{2.28}$$

e quella del campo elettrico $\vec{E}$, con qualche trasformazione e mediante la (2.27):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \nabla\nabla \cdot \vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = \nabla \times \nabla \times \vec{Z} + \nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = \\ &= \nabla \times \nabla \times \vec{Z} + \Box \vec{Z} = \nabla \times \nabla \times \vec{Z} - \frac{\vec{Q}}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{2.29}$$

che si riduce a $\nabla \times \nabla \times \vec{Z}$ in tutti i punti dello spazio in cui $\vec{Q} = 0$.

2.3 Calcolo dei Potenziali con il metodo di Green

Occorre ora sviluppare un metodo che permetta di valutare i potenziali $\vec{A}$ e V oppure il vettore di Hertz $\vec{Z}$. A questo scopo osserviamo che l'equazione (2.14), le tre componenti della (2.13), la (2.12) e le componenti della (2.27) sono della forma:

$$\Box f \;=\; \nabla^2 f \;-\; \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \;=\; F(x,y,z,t) \tag{2.30}$$

Per integrare una equazione di questo tipo occorre innanzitutto eliminare la variabile tempo. A tal fine sviluppiamo in serie (o in integrale) di Fourier di forma complessa (cfr. appendice D) le funzioni f e F:

$$F(x,y,z,t) \;=\; \sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(x,y,z) e^{(-i\omega_s t)} \tag{2.31}$$

$$f(x,y,z,t) \;=\; \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s(x,y,z) e^{(-i\omega_s t)} \tag{2.32}$$

Sostituendo nella (2.30) abbiamo:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\nabla^2 \varphi_s \;+\; k_s^2 \varphi_s \;-\; \Phi_s\right] e^{(-i\omega_s t)} \;=\; 0 \tag{2.33}$$

dove si è posto:

$$\frac{\omega_s}{c} \;=\; k_s \tag{2.34}$$

La (2.33) è verificata se valgono le equazioni:

$$\nabla^2 \varphi_s \;+\; k_s^2 \varphi_s \;=\; \Phi_s \tag{2.35}$$

Quando k_s vale zero esse si riducono alla (1.24), già incontrata nel paragrafo 1.1; generalizziamo pertanto il procedimento allora usato. Consideriamo questa volta la funzione:

$$g_s(r) \;=\; \frac{e^{(ik_s r)}}{r} \tag{2.36}$$

dove r è la distanza dal punto $P(x,y,z)$ in cui si vuole determinare il valore della funzione φ_s. Usando l'espressione dell'operatore laplaciano in coordinate polari, C.9:

$$\nabla^2 \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) \;+\; \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \;+\; \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{2.37}$$

si verifica subito che g_s è un integrale particolare dell'equazione:

$$\nabla^2 g_s \ + \ k_s^2 g_s \ = \ 0 \tag{2.38}$$

Poichè, come già la funzione g dell'equazione (1.25), anche g_s è singolare in P usiamo per applicare il *lemma di Green* lo stesso volume scelto per la (1.24), cioè il volume V^* compreso entro una superficie chiusa S contenente all'interno il punto P ed una seconda superficie sferica S_0, di raggio molto piccolo, ϵ, con centro nel punto P stesso (vedi figura 1.1). Si ha in questo modo:

$$\begin{aligned}\int_{V^*}\left(g_s\nabla^2\varphi_s-\varphi_s\nabla^2 g_s\right)dV &= \int_{S_0}\left(g_s\frac{d\varphi_s}{dn}-\varphi_s\frac{dg_s}{dn}\right)dS_0 \ + \\ &\quad \int_{S}\left(g_s\frac{d\varphi_s}{dn}-\varphi_s\frac{dg_s}{dn}\right)dS \end{aligned}\tag{2.39}$$

Usando le equazioni (2.35) e (2.38) l'integrale a primo membro diventa:

$$\int_{V^*}\left(g_s\nabla^2\varphi_s-\varphi_s\nabla^2 g_s\right)dV \ = \ \int_{V^*} g_s\Phi_s dV \tag{2.40}$$

Trasformiamo ora il primo integrale a secondo membro della (2.39); tenendo conto che sulla superficie S_0 la derivata normale coincide, salvo il segno, con la derivata rispetto a r, si ottiene:

$$\int_{S_0}\left(g_s\frac{d\varphi_s}{dn}-\varphi_s\frac{dg_s}{dn}\right)dS_0 \ = \ -\int_{S_0} e^{(ik_s r)}\left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi_s}{dr} \ - \ \varphi_s\left(\frac{ik_s}{r} \ - \frac{1}{r^2}\right)\right]dS_0 \tag{2.41}$$

Introduciamo i valori medi $\overline{\varphi}_s$ e $\overline{\frac{d\varphi_s}{dr}}$ e facciamo tendere a zero ϵ; la (2.41) analogamente alla (1.34) si riduce a:

$$\begin{aligned}\int_{S_0}\left(g_s\frac{d\varphi_s}{dn}-\varphi_s\frac{dg_s}{dn}\right)dS_0 &= -4\pi\epsilon^2 e^{(ik_s\epsilon)}\left(\frac{1}{\epsilon}\overline{\frac{d\varphi_s}{dr}} \ - \ \overline{\varphi_s}(\frac{ik_s}{\epsilon} \ - \frac{1}{\epsilon^2})\right) \\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_0}\left(g_s\frac{d\varphi_s}{dn}-\varphi_s\frac{dg_s}{dn}\right)dS_0 &= -4\pi\varphi_s(P)\end{aligned}\tag{2.42}$$

Sostituendo le (2.40) e (2.42) nella (2.39) ed osservando che per ϵ tendente a zero il volume V^* coincide con l'intero volume V (escluso il punto P) interno ad S abbiamo:

$$\begin{aligned}\varphi_s(P) &= \frac{1}{4\pi}\int_S\left(g_s\frac{d\varphi_s}{dn}-\varphi_s\frac{dg_s}{dn}\right)dS \ - \frac{1}{4\pi}\int_V g_s\Phi_s dV \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_S e^{(ik_s r)}\left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi_s}{dn} \ - \ \varphi_s\left(\frac{ik_s}{r} \ - \frac{1}{r^2}\right)\frac{dr}{dn}\right]dS \ - \\ &\quad -\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{e^{(ik_s r)}}{r}\Phi_s dV\end{aligned}\tag{2.43}$$

dove è stata inserita l'espressione (2.36) della funzione g_s. Risulta così determinata anche la funzione f; per ricavarla in modo esplicito, sostituiamo la (2.43) nella (2.32) ed eliminiamo k_s mediante la (2.34). Si trova:

$$\begin{aligned} f(P,t) \;=\; & \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s e^{-i\omega_s t} \;=\; \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_s(t \,-\, r/c)} \\ & \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{d\varphi_s}{dn} \;-\; \varphi_s \left(\frac{i\omega_s}{cr} \;-\frac{1}{r^2} \right) \frac{dr}{dn} \right] dS \;- \\ & \frac{1}{4\pi} \int_V \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega_s(t \,-\, r/c)}}{r} \;\Phi_s \; dV \end{aligned} \tag{2.44}$$

Notiamo ora che, esprimendo la (2.32) all'istante $t \;-\; r/c$ anzichè all'istante t, si ottiene:

$$f(P, t - r/c) \;=\; \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s(P)\; e^{-i\omega_s(t \,-\, r/c)} \tag{2.45}$$

e analogamente la derivata di f calcolata all'istante $t \;-\; r/c$ diventa:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t - r/c} \;=\; -\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s(P)\; i\; \omega_s\; e^{-i\omega_s(t \,-\, r/c)} \tag{2.46}$$

Infine, considerando sempre allo stesso istante la funzione F, si ha:

$$F(P, t - r/c) \;=\; \sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(P)\; e^{-i\omega_s(t \,-\, r/c)} \tag{2.47}$$

Mediante la (2.45), l'equazione da essa ottenuta derivata rispetto a n e le (2.46), (2.47), l'espressione (2.44) della funzione f assume la forma:

$$\begin{aligned} f(P,t) \;=\; & \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{df}{dn} \;+\; \left(\frac{1}{cr} \frac{\partial f}{\partial t} \;+\frac{1}{r^2} f \right) \frac{dr}{dn} \right]_{t - r/c} dS \;- \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} F_{t \,-\, r/c}\; dV \end{aligned} \tag{2.48}$$

Questa relazione, dovuta a *Kirchhoff*, determina il valore del campo f nel punto P e all'istante t mediante i valori che questa funzione e le sue derivate assumono sulla superficie S, oltrechè mediante i valori di F (le sorgenti) nel volume interno ad S. Tutte queste quantità devono, però, essere valutate all'istante antecedente $t \;-\; r/c$. In altre parole, il valore di $f(P,t)$ dipende con il ritardo r/c dalla situazione sulla superficie S e nel volume V. Tenendo conto che r è la distanza tra P e il punto variabile nelle integrazioni in questi domini, ne segue l'importante risultato che la funzione f si propaga con velocità c.

Consideriamo ora due casi estremi, ma molto istruttivi e quasi sempre utilizzati in pratica, della *formula di Kirchhoff*.

1. Supponiamo che la superficie S sia all'infinito e quindi V diventi tutto lo spazio. Nessun campo può percorrere lo spazio tra S e il punto P considerato in un tempo finito e quindi l'integrale di superficie si annulla. In tale caso la (2.48) fornisce, nel punto P la relazione:

$$f(P,t) \;=\; -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{F(Q,t\;-\;r_{PQ}/c)}{r_{PQ}}\,dV_Q \tag{2.49}$$

   Ricordando che avevamo indicato genericamente con f le funzioni descriventi i potenziali e con F le sorgenti, possiamo esplicitare le relazioni finali per $\vec{A}$, V e $\vec{Z}$:

$$\vec{A}(P,t) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(Q,t\;-\;r_{PQ}/c)}{r_{PQ}}\,dV_Q \tag{2.50}$$

$$V(P,t) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(Q,t\;-\;r_{PQ}/c)}{r_{PQ}}\,dV_Q \tag{2.51}$$

$$\vec{Z}(P,t) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\vec{Q}(Q,t\;-\;r_{PQ}/c)}{r_{PQ}}\,dV_Q \tag{2.52}$$

   dalle quali è possibile risalire ai campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ tramite le (2.3), (2.29), (2.1) e (2.28) rispettivamente.

2. Supponiamo che nel volume V non ci siano sorgenti. Allora la (2.48) si riduce a:

$$f(P,t) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{1}{r}\frac{df}{dn} \;+\; \left(\frac{1}{cr}\frac{\partial f}{\partial t} \;+\frac{1}{r^2}f\right)\frac{dr}{dn}\right]_{t-r/c} dS \tag{2.53}$$

   Ma, in assenza di sorgenti, sappiamo che le EqM forniscono le equazioni delle onde libere, e la (2.53) sarà la soluzione quando siano dati i valori di f, $\frac{df}{dn}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ in funzione del tempo e per tutti i punti della superficie S.

   La (2.53) è una giustificazione rigorosa a posteriori del *principio di Huygens–Fresnel*, proposto in modo del tutto empirico e con prescrizioni non corrette.