Capitolo 3

L'energia del campo elettromagnetico.

3.1 Il vettore di Poynting

Dimostreremo ora che il campo E.M. possiede dell'energia; precisamente, faremo vedere che è possibile associare al campo esistente in un dato volume V una quantità di energia che risulta dipendente dai valori di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e dall'estensione di V. Per far questo consideriamo un sistema di N cariche puntiformi sottoposte all'azione del campo E.M. da esse stesse generato. Tenendo conto della espressione della *forza di Lorentz* che agisce sulla carica i–esima

$$\vec{F}_i = q_i(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) \tag{3.1}$$

il lavoro fatto dal campo sull'i–esima carica nel tempo dt è:

$$\begin{aligned} dL_i &= \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \; dt = \\ &= q_i(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_i \; dt = \\ &= q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i \; dt \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il lavoro totale risulta pertanto:

$$dL = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i \; dt \tag{3.3}$$

Dividiamo il volume V in un numero molto grande di volumetti ΔV_j, ciascuno attorno ad un punto P_j, e indichiamo con $n(\Delta V_j)$ il numero di cariche contenute in ciascuno di essi; ricordando la definizione di densità di corrente

(1.14) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
dL &= \sum_{\Delta V_j} \sum_{i=1}^{n(\Delta V_j)} dL_i \\
&= \sum_{\Delta V_j} \Delta V_j \ \vec{E}(P_j) \ \cdot \ \frac{\sum_{i=1}^{n(\Delta V_j)} q_i \ \vec{v}_i}{\Delta V_j} \ dt \\
&= \sum_{\Delta V_j} \ \Delta V_j \ \vec{E}(P_j) \ \cdot \ \vec{j}(P_j) \ dt
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Ne segue che la (3.4) può essere scritta nella forma:

$$dL \ = \int_V \ \vec{E} \cdot \vec{j} \ dV \ dt \tag{3.5}$$

Questa equazione, d'altra parte, purchè si tenga conto della definizione (1.15) di $\vec{j}$, è valida anche per una distribuzione discreta. Eliminando $\vec{j}$ mediante la (1.4), la (3.5) diventa:

$$\frac{dL}{dt} \ = \ \frac{1}{\mu_0} \int_V \vec{E} \cdot \ \nabla \times \vec{B} \ dV \ - \ \epsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ dV \tag{3.6}$$

Sostituendo nella (3.6) l'identità (A.26):

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \ = \ \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} \ - \ \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} \tag{3.7}$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= -\frac{1}{\mu_0} \int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \ dV \ + \ \frac{1}{\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} \ dV \ - \\
&\quad -\epsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ dV
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

ossia, applicando il *teorema della divergenza* (B.10) ed eliminando $\nabla \times \vec{E}$ tramite la (1.3):

$$
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= -\frac{1}{\mu_0} \int_S (\vec{E} \times \vec{B}) \ \cdot \vec{n} \ dS \ - \ \frac{1}{\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot \ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ dV \ - \\
&\quad -\epsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ dV
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

dove S è la superficie che limita il volume V e $\vec{n}$ è la normale ad S orientata all'esterno di V. Introducendo il vettore:

$$\vec{S} \ = \ \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}) \ = \ c^2 \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{3.10}$$

la (3.9) assume la forma:

$$\frac{dL}{dt} \;=\; -\int_S \vec{S}\cdot\vec{n}\; dS \;-\; \frac{\epsilon_0}{2}\,\frac{d}{dt}\int_V (\vec{E}^2 \;+\; c^2\vec{B}^2)\; dV \qquad (3.11)$$

Si badi che nel prodotto esterno a secondo membro della (3.10) compare il vettore induzione magnetica, che è un vettore assiale; di conseguenza $\vec{S}$, pur essendo definito mediante un prodotto esterno, è un vettore polare. Esso prende il nome di *vettore di Poynting*. Trasformiamo ulteriormente l'equazione (3.11); osservando che il lavoro del campo è esprimibile mediante il *teorema dell'energia cinetica*, ossia con l'equazione:

$$\frac{dL}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\,m_i\vec{v}_i^2 \qquad (3.12)$$

dove si è indicata con m_i la massa della carica $i-$esima e con $\vec{v}_i$ la sua velocità, si ottiene infine:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\,m_i\vec{v}_i^2 \;+\int_V \frac{\epsilon_0(\vec{E}^2 \;+\; c^2\vec{B}^2)}{2}\; dV\right] \;=\; -\int_S \vec{S}\cdot\vec{n}\; dS \qquad (3.13)$$

Per chiarire il risultato testè ottenuto, supponiamo che le N cariche siano tutte contenute in una parte limitata del volume V. Ammettiamo, inoltre, che il loro movimento sia tale che $\vec{j}$ e ρ rimangano costanti nel tempo fino ad un determinato istante t_0 dopo il quale essi iniziano a variare e quindi a generare un campo propagativo. Se si suppone il volume V illimitato, e quindi la superficie S situata a distanza infinita dalla zona occupata dalle cariche, è ovvio che su di essa il contributo del campo propagativo è nullo. Esso, infatti, nel tempo $t - t_0$ percorre la distanza finita $c(t - t_0)$ e non arriva a raggiungere S. Ciò non accade per il contributo del campo statico; tuttavia, essendosi ammesso che la distribuzione di cariche e correnti occupi un volume limitato, sia $\vec{E}$ che $\vec{B}$ decrescono almeno come $1/r^2$ ed il vettore $\vec{S}$, di conseguenza, almeno come $1/r^4$, r essendo la distanza da un generico punto interno alla distribuzione di carica. Poichè l'estensione della superficie, invece, aumenta secondo r^2, si conclude che anche il contributo del campo statico è nullo e che l'integrale a secondo membro della (3.13), quando V tende ad infinito, vale zero. Ne segue perciò:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\,m_i\vec{v}_i^2 \;+\int_V \frac{\epsilon_0(\vec{E}^2 \;+\; c^2\vec{B}^2)}{2}\; dV \;=\; cost \qquad (3.14)$$

Non è difficile stabilire il significato fisico di questa equazione; a questo scopo supponiamo dapprima che gli N oggetti non posseggano carica elettrica e che quindi il campo E.M. sia nullo. In queste condizioni l'energia del sistema si riduce alla sola energia cinetica, ed essa, come risulta dalla (3.14) ponendovi $\vec{E} = \vec{B} = 0$, si conserva costante nel tempo. In presenza di cariche, invece, interviene anche il termine dipendente dal campo E.M. ed esso forma con l'energia cinetica una quantità costante. È dunque ovvio concludere che questo termine rappresenta l'energia del campo E.M.. Possiamo, perciò, introdurre la *densità di energia elettromagnetica*:

$$w \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\,(\vec{E}^2 \;+\; c^2\vec{B}^2) \tag{3.15}$$

Il suo integrale su un volume V rappresenta l'energia associata al campo contenuto in V; avremo, cioè, indicando con W questa energia:

$$W \;=\; \int_V \frac{\epsilon_0}{2}\,(\vec{E}^2 \;+\; c^2\vec{B}^2)\; dV \tag{3.16}$$

Quando, invece, V è limitato il primo membro della (3.13) rappresenta la variazione per unità di tempo dell'energia totale contenuta in V; ad essa corrisponde, a secondo membro, un flusso di energia uscente attraverso S. Resta così chiarito che il vettore di Poynting rappresenta la densità di flusso dell'energia E.M.. È utile anche scrivere la (3.13) in modo leggermente diverso. Per fare questo osserviamo che si ha, inserendo la (3.5) nella (3.11):

$$-\frac{d}{dt}\int_V w\; dV \;=\; \int_S \vec{S}\cdot\vec{n}\; dS \;+\; \int_V \vec{E}\cdot\vec{j}\; dV \tag{3.17}$$

Questa relazione stabilisce che la diminuzione per unità di tempo dell'energia E.M. contenuta in V è pari al flusso di energia uscente da V aumentato della potenza dissipata in V dal campo elettrico. Mediante un procedimento consueto, utilizzando il teorema della divergenza e la (3.15), la (3.17) può essere sostituita dalla relazione differenziale equivalente:

$$\nabla\cdot\vec{S} \;+\; \frac{\partial w}{\partial t} \;=\; -\vec{E}\cdot\vec{j} \tag{3.18}$$

La (3.18) è formalmente analoga all'equazione di continuità delle cariche e delle correnti, salvo la presenza, a secondo membro, di un termine che rappresenta una "sorgente", eventualmente negativa, di energia E.M..

3.2 Il tensore degli sforzi elettromagnetici

Abbiamo stabilito nel paragrafo precedente che il vettore di Poynting rappresenta il flusso dell'energia E.M.; dimostreremo ora, nel presente e nel successivo paragrafo, che al flusso di energia è associata una quantità di moto. A questo scopo consideriamo un sistema di cariche contenute in un volume finito V; assumendo che le cariche formino una distribuzione continua, la forza E.M. che agisce su di esse è data dalla *forza di Lorentz*, che può essere scritta come:

$$\vec{f} \;=\; \int_V \left(\rho\vec{E} \;+\; \vec{j}\times\vec{B}\right)\, dV \tag{3.19}$$

Eliminando da questa equazione ρ e $\vec{j}$ per mezzo delle (1.1) e (1.4), si ottiene:

$$\vec{f} \;=\; \int_V \left[\epsilon_0\vec{E}\;\nabla\cdot\vec{E} \;+\; \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} \;-\; \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\times\vec{B}\right]\, dV \tag{3.20}$$

L'espressione sotto integrale può essere trasformata in modo che in essa $\vec{E}$ e $\vec{B}$ figurino simmetricamente. Per fare ciò basta aggiungere all'integrando le equazioni omogenee (1.2) e (1.3) moltiplicate per $1/\mu_0\vec{B}$ e vettorialmente per $\epsilon_0\vec{E}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\vec{f} \;&=\; \int_V \epsilon_0\left(\vec{E}\;\nabla\cdot\vec{E} \;+\; c^2\vec{B}\nabla\cdot\vec{B}\right)\, dV \;+\\ &+\; \int_V \epsilon_0\left(\nabla\times\vec{E}\times\vec{E} \;+\; c^2\nabla\times\vec{B}\times\vec{B}\right)\, dV \;+\\ &+\; \int_V \left(-\epsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} \;+\; \epsilon_0\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\times\vec{E}\right)\, dV\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ricordando la definizione (3.10) di $\vec{S}$ si ricava:

$$\begin{aligned}\vec{f} \;&=\; \int_V \epsilon_0\left(\vec{E}\;\nabla\cdot\vec{E} \;+\; \nabla\times\vec{E}\times\vec{E}\right)\, dV \;+\\ &\int_V \epsilon_0 c^2\left(\vec{B}\;\nabla\cdot\vec{B} \;+\; \nabla\times\vec{B}\times\vec{B}\right)\, dV \;-\\ &-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V \vec{S}\; dV\end{aligned} \tag{3.22}$$

Per trasformare ulteriormente i primi due integrali osserviamo che, per la componente x del termine dipendente da $\vec{E}$, vale l'identità:

$$\begin{aligned}\left[\vec{E}\;\nabla\cdot\vec{E} \;+\; \nabla\times\vec{E}\times\vec{E}\right]_x \;&=\; \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(E_x^2 \;-\; E_y^2 \;-\; E_z^2\right)\right] \;+\\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_xE_y\right) \;+\; \frac{\partial}{\partial z}\left(E_xE_z\right)\end{aligned} \tag{3.23}$$

per le rimanenti componenti possono essere scritte delle relazioni analoghe, ottenibili dalla precedente con permutazioni circolare degli indici. Di conseguenza ponendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_0}{2}\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right) + \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\left(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2\right) &= -T_{xx} \\
\frac{\epsilon_0}{2}\left(E_y^2 - E_z^2 - E_x^2\right) + \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\left(B_y^2 - B_z^2 - B_x^2\right) &= -T_{yy} \\
\frac{\epsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) + \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\left(B_z^2 - B_x^2 - B_y^2\right) &= -T_{zz}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 E_x E_y + \epsilon_0 c^2 B_x B_y &= -T_{xy} = -T_{yx} \\
\epsilon_0 E_x E_z + \epsilon_0 c^2 B_x B_z &= -T_{xz} = -T_{zx} \\
\epsilon_0 E_y E_z + \epsilon_0 c^2 B_y B_z &= -T_{yz} = -T_{zy}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

e tenendo conto che delle relazioni analoghe alla (3.23) possono essere scritte per le componenti del termine dipendente da $\vec{B}$ nella (3.22), si trova:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 \left[\vec{E}\,\nabla\cdot\vec{E} + \nabla\times\vec{E}\times\vec{E} + c^2\left(\vec{B}\,\nabla\cdot\vec{B} + \nabla\times\vec{B}\times\vec{B}\right)\right]_x &= \\
= -\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Corrispondenti relazioni valgono per le componenti y e z. La componente x della forza di Lorentz $\vec{f}$ diventa pertanto:

$$\begin{aligned}
f_x = & -\int_V \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right) dV - \\
& -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V S_x \, dV
\end{aligned} \tag{3.27}$$

da essa, utilizzando il teorema della divergenza, si ha:

$$\begin{aligned}
f_x = & -\int_S \left(T_{xx} n_x + T_{xy} n_y + T_{xz} n_z\right) dS - \\
& -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V S_x \, dV
\end{aligned} \tag{3.28}$$

dove S è la superficie che limita il volume V; analogamente per f_y e f_z. Le nove quantità T_{xx}, T_{xy}, ..., costituiscono le componenti di un tensore simmetrico di rango 2 (cfr. appendice E). Ciò è provato dal fatto che la

(3.28) e le corrispondenti equazioni per f_y, f_z, impongono alle tre quantità $\sum_{i=1}^{3} T_{ij}$ di trasformarsi come le rispettive componenti di un vettore. Indicando semplicemente con $\overline{\overline{T}}$ questo tensore ed introducendo il vettore:

$$\vec{\varphi} \; = \; -\int_S \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \, dS \tag{3.29}$$

l'espressione finale di $\vec{f}$ è:

$$\vec{f} \; = \; \vec{\varphi} \; - \; \frac{d}{dt} \int_V \frac{\vec{S}}{c^2} \, dV \tag{3.30}$$

Per chiarire il significato fisico dei risultati ora ottenuti è necessaria una analisi che richiede una certa attenzione. A questo scopo consideriamo dapprima il caso statico in cui il termine dipendente da $\vec{S}$ non interviene e la (3.30) si riduce a:

$$\vec{f} \; = \; \vec{\varphi} \tag{3.31}$$

Questa eguaglianza stabilisce che la forza E.M. che agisce sulla distribuzione di carica contenuta nel volume V può essere espressa mediante i valori che il tensore $\overline{\overline{T}}$ assume sulla superficie S che limita V. È da notare che ad un risultato analogo si arriva nello studio dell'elasticità di un mezzo materiale continuo; si può infatti dimostrare che le forze elastiche che agiscono sulle masse contenute in un volume V dipendono dai valori che il cosiddetto *tensore elastico* assume sul contorno di V. Per questa ragione $\overline{\overline{T}}$ prende il nome di *tensore degli sforzi elettromagnetici o tensore di Maxwell.* È da notare che questa analogia, assieme ad altre, indussero Maxwell ed i fisici contemporanei a credere nell'esistenza del famigerato *etere*, un mezzo materiale che "doveva" esserci per "sostenere" i campi E.M., ma non era rivelabile sperimentalmente.

3.3 Quantità di moto E.M..

Per stabilire il significato della (3.30) nel caso non statico, introduciamo in essa la quantità di moto meccanica delle masse contenute nel volume V. Ponendo:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \;=\; \vec{Q} \tag{3.32}$$

in cui la somma è estesa a tutte le masse contenute in V, l'espressione della forza diventa:

$$\vec{f} \;=\; \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\right) \;=\; \frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{3.33}$$

Ne segue che la (3.30) può essere scritta nella forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{Q} \;+\; \int_V \frac{\vec{S}}{c^2}\, dV\right) \;=\; \vec{\varphi} \tag{3.34}$$

questa equazione stabilisce che agli sforzi E.M. applicati alla superficie S corrisponde la variazione, per unità di tempo, della quantità di moto meccanica delle masse presenti in S aumentata, però, di un termine dipendente dal campo E.M.. In altre parole l'inerzia del sistema dipende, oltrechè dalle masse, anche dal campo attraverso la grandezza:

$$\vec{G} \;=\; \int_V \frac{\vec{S}}{c^2}\, dV \tag{3.35}$$

essa, per questa ragione, prende il nome di *quantità di moto elettromagnetica.* Si riserva, invece, il nome di *densità di quantità di moto* all'integrando che compare nella (3.35), cioè alla grandezza:

$$\vec{g} \;=\; \frac{\vec{S}}{c^2} \;=\; \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \tag{3.36}$$

È ovvio che la (3.34), applicata ad un volume limitato da una superficie sulla quale il tensore $\overline{\overline{T}}$ sia nullo, stabilisce la conservazione della quantità di moto complessiva contenuta in questo volume.

Tenendo conto del significato energetico ed inerziale del vettore di Poynting, è possibile stabilire una importante relazione tra l'energia e la quantità di moto del campo E.M.. A questo scopo consideriamo un elemento di area ΔS ortogonale alla direzione di $\vec{S}$; risulta subito, dal secondo membro della (3.13) che l'energia che attraversa ΔS nel tempo Δt è:

$$W \;=\; |\,\vec{S}\,|\;\; \Delta S\; \Delta t \tag{3.37}$$

D'altra parte avevamo visto nel paragrafo 2.3 che i potenziali e quindi anche il campo E.M. si propagano con velocità c; di conseguenza nel tempo Δt la propagazione procederà nella direzione di $\vec{S}$ del tratto $c\Delta t$. Entro il volumetto $c\ \Delta S\ \Delta t$, interessato dalla propagazione, è contenuta la quantità di moto E.M.:

$$\vec{G} \ = \ \frac{\vec{S}}{c^2}\ c\ \Delta S\ \Delta t \tag{3.38}$$

Prendendo il modulo e confrontando con la (3.37) si ottiene subito:

$$|\ \vec{G}\ | = \ \frac{W}{c} \tag{3.39}$$

che è appunto il risultato cui si voleva arrivare. La relazione (3.39) non trova riscontro nel caso meccanico in cui la relazione tra la quantità di moto $\vec{Q}$ e l'energia cinetica E_{cin} di una massa in moto con velocità $\vec{v}$ è:

$$\vec{Q} \ = \ \frac{2\ E_{cin}}{v} \tag{3.40}$$

La (3.39) peraltro, stabilisce la corretta relazione tra la quantità di moto e l'energia di un fotone. Essa, infatti, purchè si assuma l'energia E.M. W coincidente con quella $h\nu$ di un singolo quanto, porta alla ben nota relazione $p \ = \ h\nu/c$, dove indichiamo con p la quantità di moto del fotone.

È interessante notare che l'equazione (3.39) implica l'esistenza di una massa associata all'energia E.M.. Infatti il rapporto tra il modulo della quantità di moto e la velocità c, con cui l'energia E.M. si propaga, risulta essere:

$$\frac{|\ \vec{G}\ |}{c} \ = \ \frac{W}{c^2} \tag{3.41}$$

Se, in analogia al caso meccanico, si attribuisce a tale rapporto il significato di massa inerziale, si avrà:

$$m = \ \frac{W}{c^2} \tag{3.42}$$

Il risultato ora ottenuto ha valore più che altro euristico, il suo significato e la sua importanza fisica verranno stabiliti nella teoria della relatività.

Un'altra importante conseguenza della relazione (3.36) è l'esistenza di una pressione con cui il campo E.M. agisce sugli ostacoli capaci di alterarne la propagazione. Una esauriente discussione di questo fenomeno richiederebbe, tuttavia, lo studio della propagazione in presenza del mezzo materiale che costituisce l'ostacolo. Ci limitiamo, per ora, ad assumere l'effetto del mezzo materiale sulla propagazione come dato del problema deducendone la conseguente *pressione elettromagnetica.*

A questo scopo consideriamo, dapprima, il caso in cui l'effetto consiste nell'assorbimento totale dell'energia E.M.. Supponiamo, inoltre, per semplificare il calcolo, che l'ostacolo sia costituito da un oggetto abbastanza piccolo da poter supporre, in un volume di estensione paragonabile alle sue dimensioni, il vettore di Poynting costante rispetto al posto. A causa del teorema di conservazione della quantità di moto, la quantità di moto meccanica $\Delta\vec{Q}$ che l'oggetto acquista nel tempo Δt deve essere pari a quella persa dal campo E.M.. Quest'ultima, indicata con ΔS l'area della proiezione dell'oggetto sul piano ortogonale a $\vec{S}$ (vedi figura 3.1) è data dall'equazione (3.38).

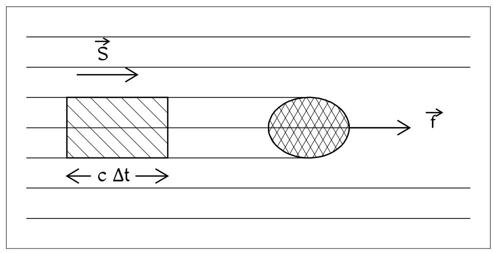

Figura 3.1:

Si deve avere perciò:

$$\Delta\vec{Q} \; = \; \frac{\vec{S}}{c} \, \Delta S \; \Delta t \tag{3.43}$$

D'altra parte, supposto Δt piccolo a piacere, dalla legge fondamentale della dinamica si ha:

$$\Delta\vec{Q} \; = \; \vec{f} \, \Delta t \tag{3.44}$$

dove $\vec{f}$ è la risultante delle forze che agiscono sull'oggetto nell'intervallo di tempo Δt. Confrontando le (3.43), (3.44) si ottiene pertanto:

$$\frac{\vec{f}}{\Delta S} \; = \; \frac{\vec{S}}{c} \tag{3.45}$$

Questa equazione, nel caso in cui la superficie dell'oggetto sia ortogonale a $\vec{S}$, può essere scritta nella forma:

$$p \; = \; \frac{\mid \vec{S} \mid}{c} \tag{3.46}$$

la quale determina la pressione della radiazione E.M. su di un ostacolo perfettamente assorbente. Considerando la conservazione della quantità di moto è immediato capire che la pressione di radiazione vale il doppio nel caso di un ostacolo perfettamente riflettente, con incidenza normale.

In pratica la pressione E.M., a causa del fattore c che compare a denominatore della (3.45) è sempre molto piccola salvo i casi i cui $\mid \vec{S} \mid$ assuma un valore eccezionalmente grande. Ciò accade, ad esempio, all'interno delle stelle in cui esiste una fortissima pressione di radiazione che interviene in modo essenziale a determinarne l'equilibrio. Per la radiazione E.M. del Sole al limite dell'atmosfera terrestre, $\mid \vec{S} \mid$ risulta essere circa 2 calorie per centimetro quadro e per minuto, pari a 1.4 10^3 J m^{-2} s^{-1}. Mediante la (3.46) ciò corrisponde ad una pressione di circa 0.5 10^{-5} Pa (1Pa $\simeq$ 9.868 10^{-6} atm). Questa pressione, benchè piccola, può dar luogo, nel caso di oggetti di dimensioni molto ridotte, ad una forza superiore a quella dovuta alla attrazione gravitazionale del Sole. Infatti, la forza di attrazione del Sole è $\mid F_a \mid \propto r^3$, avendo indicato con r il raggio dell'oggetto, supposto sferico, mentre quella dovuta alla pressione di radiazione è $\mid F_r \mid \propto r^2$. Il rapporto $F_r/F_a \propto 1/r$ e può diventare maggiore di 1 per r sufficientemente piccolo.

Esercizio: Una particella nel sistema solare si trova sottoposta alla azione combinata della attrazione gravitazionale del Sole e della forza della radiazione dovuta ai raggi del Sole. Si supponga che la particella sia una sfera di densità $\rho = 10^3$ kg/m^3 (ghiaccio, per esempio) e che la radiazione incida su di essa perpendicolarmente e venga assorbita completamente. Si trovi il minimo raggio, r_C, della particella per cui essa viene espulsa dal sistema solare.

La forza di attrazione gravitazionale è data da:

$$\vec{F}_a = -G\frac{M\ m\ \vec{R}}{R^3} \tag{3.47}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, M è la massa del Sole, m è la massa della particella, $\vec{R}$ è la distanza Sole–particella, R il suo modulo; essa agisce lungo la congiungente Sole–particella ed è diretta verso il Sole. Il suo modulo può essere espresso come:

$$F_a = G\frac{M}{R^2}\ \rho\ \frac{4}{3}\ \pi r^3 \tag{3.48}$$

La forza della radiazione agisce lungo la direzione di propagazione delle onde E.M. emesse dal Sole; queste sono onde sferiche e a, grande distanza, i loro fronti d'onda possono approssimarsi a dei piani perpendicolari alla direzione di propagazione (onde piane). La forza della radiazione ha, pertanto, la stessa direzione ma verso oposto rispetto alla attrazione gravitazionale; il suo modulo è:

$$F_r = \frac{|\vec{S}|}{c}\pi r^2 \tag{3.49}$$

dove $|\vec{S}|$ è il modulo del vettore di Poynting nel punto in cui si trova la particella, cioè a distanza R dal Sole. All'equilibrio:

$$G\frac{M}{R^2}\,\rho\,\frac{4}{3}\,\pi r^3 = \frac{|\vec{S}|}{c}\pi r^2 \tag{3.50}$$

da cui si può vedere che l'equilibrio è soddisfatto per particelle con raggio:

$$r_C = \frac{|\vec{S}|}{c}\frac{3}{4\rho}\frac{R^2}{G\ M} \tag{3.51}$$

Osserviamo che, supponendo che durante la propagazione delle onde non vi sia assorbimento di energia ad esse associata (o che sia trascurabile), deve valere la relazione:

$$\Phi(R_1) = \Phi(R_2) \tag{3.52}$$

qualunque siano le distanze R_1 ed R_2 considerate, per la conservazione dell'energia, ovvero:

$$|\vec{S}(R_1)|\,4\pi R_1^2 = |\vec{S}(R_2)|\,4\pi R_2^2 \tag{3.53}$$

da cui si ricava:

$$|\vec{S}(R_1)|\,R_1^2 = |\vec{S}(R_2)|\,R_2^2 \tag{3.54}$$

Pertanto il raggio critico r_C cercato non dipende dalla distanza rispetto al Sole a cui si trova la particella; il valore di r_C può essere calcolato, per esempio, considerando i valori noti di $|\vec{S}|$ e R al limite dell'atmosfera terrestre:

$$\frac{|\vec{S}|}{c} = \frac{1.4\ 10^3}{3\ 10^8}\frac{N}{m^2} = 0.4710^{-5}\ \frac{N}{m^2} \tag{3.55}$$

$$\frac{G\ M}{R^2} = \frac{6.67\ 10^{-11}\ 2.01\ 10^{30}}{(1.5)^2\ 10^{22}}\frac{m}{s^2} = 5.96\ 10^3\frac{m}{s^2} \tag{3.56}$$

$$r_C = \frac{|\vec{S}|}{c}\frac{3}{4\rho}\frac{R^2}{G\ M} = 0.585\ 10^{-6}\ m \tag{3.57}$$

Sferette di ghiaccio con raggio inferiore a r_C verranno allontanate dal Sole sotto l'effetto della risultante di $F_r - F_a$; resta così spiegato il fatto che le comete rivolgano la coda, formata principalmente da sferette microscopiche di ghiaccio, sempre nella direzione opposta a quella del Sole.