

Capitolo 4

Propagazione di onde E.M. nel vuoto

4.1 Introduzione

È già stato trattato nel corso di Ottica ed Elettromagnetismo il caso semplice della propagazione nel vuoto di onde E.M. piane e polarizzate nel caso unidimensionale (propagazione lungo l'asse x , per esempio). Si ricorda in sintesi il metodo seguito. In assenza di sorgenti ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) le EqM assumono una forma molto semplice, in cui \vec{E} e \vec{B} compaiono simmetricamente. Applicando l'operatore $\nabla \times$ alle (1.3) e (1.4) e ricordando la (A.28) si ottengono le due espressioni:

$$\square \vec{E} = 0 \quad (4.1)$$

e

$$\square \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

che si possono riassumere nell'equazione generale:

$$\square f = 0 \quad (4.3)$$

in cui f indica una qualsiasi delle tre componenti di \vec{E} e di \vec{B} . Nelle ulteriori ipotesi che si abbia simmetria piana, e quindi propagazione soltanto lungo l'asse x (di conseguenza $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$), e che il campo elettrico \vec{E} sia contenuto soltanto nel piano (x, z) (*onda polarizzata*, $E_y = 0$ e conseguentemente $B_z = 0$), la (4.3) si riduce a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (4.4)$$

in cui f rappresenta E_z o B_y .

L'integrale generale della (4.4) è:

$$f = a(x - ct) + b(x + ct) \quad (4.5)$$

dove a e b sono due funzioni arbitrarie del loro argomento (onde progressive e onde regressive). È anche noto dall'Analisi che una funzione arbitraria è esprimibile sotto forma di somma (o integrale) di Fourier (vedi appendice D), e quindi il caso generale può essere ricondotto allo studio della funzione sinusoidale:

$$f(x, t) = f_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \alpha \right] \quad (4.6)$$

o

$$f(x, t) = f_0 \sin [(kx - \omega t) + \alpha] \quad (4.7)$$

avendo posto come al solito $k = 2\pi/\lambda$. Le conseguenze immediate delle relazioni precedenti erano che i campi \vec{E} e \vec{B} sono ortogonali e formano una terna destrorsa, nell'ordine, in cui il versore \vec{i} dell'asse x è il terzo elemento, e che $E = cB$

4.2 Tecnica di separazione delle variabili

4.2.1 Coordinate cartesiane

Per studiare, in casi differenti da quello della simmetria piana, la propagazione di onde E.M. è necessario, innanzitutto, sviluppare un metodo generale per integrare l'equazione (4.3). Dedichiamo, pertanto, il presente paragrafo alla risoluzione di questo problema matematico. A rigore una soluzione dell'equazione (4.3) è già nota; si constata, infatti, ponendo $F = 0$ nelle equazioni (2.30) e (2.48), che la formula di Kirchhoff fornisce la richiesta funzione $f(P, t)$ sotto forma di un integrale di superficie. Tuttavia, l'applicazione di questa formula non è all'atto pratico molto opportuna specie quando occorra ottenere $f(P, t)$ in forma esplicita. Pertanto non useremo la formula di Kirchhoff, ma bensì un procedimento che permette di integrare la (4.3) mediante quattro equazioni alle derivate totali rispettivamente per la variabile tempo e le tre variabili di posizione. Questo procedimento, che viene detto *per separazione delle variabili*, richiede l'uso di coordinate ortogonali; noi lo svilupperemo, con un certo dettaglio, nel caso delle coordinate cartesiane e cilindriche.

Consideriamo dunque l'equazione alle derivate parziali (4.3); occorre determinarne le soluzioni sotto forma di funzioni del posto e del tempo finite

e regolari (cioè continue e ad un sol valore) entro il dominio di integrazione prescelto. Per far ciò cominciamo col decomporre la f nel prodotto di due funzioni rispettivamente del posto e del tempo, cioè:

$$f(P, t) = \psi(P) \chi(t) \quad (4.8)$$

Sostituendo questa espressione nella (4.3) e dividendo membro a membro per f , si ottiene:

$$c^2 \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} \quad (4.9)$$

Poichè il primo membro è funzione solo del posto e il secondo solo del tempo, ciascuno di essi deve essere uguale ad una costante a priori arbitraria, che verrà indicata con $\pm\omega^2$. È evidente che solo il segno meno è accettabile; infatti scegliendo il segno positivo, l'equazione:

$$\frac{d^2 \chi}{dt^2} = +\omega^2 \chi \quad (4.10)$$

fornisce per il fattore temporale delle funzioni esponenziali variabili monotonicamente, le quali diventano infinite quando la variabile t assume dei valori positivi o negativi arbitrariamente grandi. Viceversa, la scelta del segno meno corrisponde a delle funzioni periodiche che, per comodità, scriveremo mediante esponenziali immaginari, cioè:

$$\chi_\omega(t) = \chi_\omega^{(0)} e^{-i\omega t} \quad (4.11)$$

dove $\chi_\omega^{(0)}$ è una costante complessa di scelta arbitraria. Combinando linearmente questa funzione colla complessa coniugata, che verifica pure essa la (4.3), si possono ottenere delle soluzioni reali fisicamente significative. Oppure, scegliendo un procedimento molto comune in elettromagnetismo, si può prendere come fattore temporale la parte reale, o il coefficiente dell'unità immaginaria, della soluzione (4.11). In ogni modo, l'equazione per la parte spaziale diventa:

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi = 0 \quad (4.12)$$

Sostituendo l'integrale ψ_ω della (4.12) e l'espressione (4.10) di χ_ω nella (4.8), si otterrà un integrale particolare f_ω dell'equazione (4.3). Sovrapponendo gli integrali corrispondenti ai vari valori di ω si otterrà, a causa della linearità della (4.3), l'integrale generale richiesto. In particolare, se le costanti ω formano una progressione aritmetica, la funzione f risulterà espressa mediante una serie di Fourier.

Occorre ora determinare gli integrali della (4.12). Ciò può essere fatto abbastanza facilmente se l'operatore laplaciano è espresso mediante coordinate ortogonali; in questo modo, infatti, la (4.12) si scompone in tre equazioni separate, una per ogni coordinata. Cominciamo dal caso delle coordinate cartesiane, che fra tutti è il più semplice. Ponendo:

$$\psi(P) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (4.13)$$

e dividendo per ψ , la (4.12) diventa:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.14)$$

Introduciamo tre costanti α, β, γ soddisfacenti alla relazione:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.15)$$

e consideriamo le equazioni:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 Y, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2 Z \quad (4.16)$$

i loro integrali, evidentemente, forniscono, se sono sostituiti nella (4.13), un integrale particolare della (4.12). Procedendo in analogia a quanto fatto in precedenza per il fattore temporale, gli integrali richiesti possono pertanto essere scritti nella forma:

$$X_\alpha(x) = X_\alpha^{(0)} e^{i\alpha x}, \quad Y_\beta(y) = Y_\beta^{(0)} e^{i\beta y}, \quad Z_\gamma(z) = Z_\gamma^{(0)} e^{i\gamma z}, \quad (4.17)$$

Introducendo il vettore:

$$\vec{\tau}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{c}{\omega} (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}) \quad (4.18)$$

il cui modulo, come risulta dalla (4.15), è unitario, avremo:

$$\psi_{\alpha, \beta, \gamma} = \psi_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)} e^{i \frac{\omega}{c} \vec{r} \cdot \vec{\tau}(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (4.19)$$

da cui, tenendo conto della (4.8):

$$f_{\alpha, \beta, \gamma}(x, y, z, t) = f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)} e^{i \frac{\omega}{c} [\vec{r} \cdot \vec{\tau}(\alpha, \beta, \gamma) - ct]} \quad (4.20)$$

Nella (4.19) si è indicato con $\psi_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)}$ il prodotto delle tre costanti che compaiono a secondo membro nelle (4.17); così pure nella (4.20) si è scritto $f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)}$ al posto del prodotto $\psi_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)} \chi_\omega^{(0)}$. Si deve tener conto che queste costanti, e quindi anche il coefficiente $f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)}$, sono in generale delle quantità complesse.

La (4.20) rappresenta in forma complessa un'onda piana di tipo sinusoidale che si propaga lungo la direzione $\vec{\tau}$. È possibile poi, scegliendo diversamente i segni nelle (4.10) e (4.16), ottenere soluzioni corrispondenti ad onde regressive. Abbiamo così riottenuto, col metodo della separazione delle variabili, il risultato cui eravamo pervenuti nel paragrafo precedente. Tuttavia, nel caso attuale, la direzione di $\vec{\tau}$ non è più fissata in quanto, salvo la condizione (4.15) che stabilisce l'unitarietà del modulo di $\vec{\tau}$, le costanti α , β , γ sono arbitrarie. L'integrale generale della (4.3) lo si otterrà, sotto forma di serie (o di integrale) di Fourier, sommando (o integrando) la (4.20) su tutte le direzioni di $\vec{\tau}$ e su tutti i valori di ω , cioè:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)} e^{i \frac{\omega}{c} [\vec{r} \cdot \vec{\tau}(\alpha, \beta, \gamma) - ct]} \\ &= \sum_{\vec{\tau}, \omega} f_{\vec{\tau}, \omega}^{(0)} e^{i \frac{\omega}{c} [\vec{r} \cdot \vec{\tau} - ct]} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Evidentemente questa relazione, che rappresenta una propagazione di tipo qualsiasi come sovrapposizione di onde piane, si riduce al caso particolare della simmetria piana quando i coefficienti $f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)}$ con indici β e γ differenti da zero sono nulli, ossia quando esiste una sola orientazione di $\vec{\tau}$.

4.2.2 Coordinate cilindriche

Consideriamo ora il caso delle coordinate cilindriche. Ponendo:

$$\psi(P) = R(r) \Phi(\varphi) Z(z) \quad (4.22)$$

esplicitando mediante la (C.14) il laplaciano e dividendo membro a membro per ψ , la (4.12) diventa:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (4.23)$$

Poichè il primo membro dipende solo da r e φ mentre il secondo solo da z , ciascuno dei due membri deve essere costante rispetto alle coordinate; possiamo perciò separare le variabili ponendo:

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -a_1 \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = a_1 \quad (4.25)$$

dove a_1 è una costante arbitraria. La (4.25) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - a_1 \right) r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (4.26)$$

da cui appare evidente che è ancora possibile separare le variabili r e φ mediante le due equazioni:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -a_2 \quad (4.27)$$

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - a_1 \right) r^2 = a_2 \quad (4.28)$$

dove a_2 è un'altra costante arbitraria. L'integrazione della (4.12) è così ricondotta a quella delle equazioni (4.24), (4.27) e (4.28), ossia delle equazioni alle derivate totali:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + a_1 Z = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + a_2 \Phi = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - a_1 - \frac{a_2}{r^2} \right) R = 0 \quad (4.31)$$

Dalla (4.24) otteniamo per la funzione Z una espressione di tipo esponenziale o periodico a seconda che la costante a_1 sia negativa o positiva. Poichè al crescere del modulo di z la funzione esponenziale diventa nulla o infinita, essa non è fisicamente accettabile, dato che il valore di ψ deve rimanere dappertutto finito. Escludendo il caso, non interessante per i nostri scopi, in cui il dominio di integrazione è limitato, concludiamo che la costante a_1 deve essere scelta positiva. Di conseguenza, ponendo:

$$a_1 = h^2 \quad (4.32)$$

in cui h è una costante reale, di dimensioni pari al reciproco di una lunghezza, avremo:

$$Z_h(z) = Z_h^{(0)} e^{ihz} \quad (4.33)$$

Mediante la (4.33) e la sua coniugata, che sono degli integrali particolari, possiamo costruire l'integrale generale della (4.29).

Considerando la (4.30) è facile vedere che la costante a_2 deve essere scelta uguale al quadrato di un numero intero. In questo caso, infatti, la funzione Φ avrà carattere periodico con periodo 2π ; ciò evidentemente è richiesto dalla condizione che Φ sia continua per $\varphi=0$. Ponendo:

$$a_2 = n^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

otteniamo dalla (4.30) l'integrale particolare:

$$\Phi_n = \Phi_n^{(0)} e^{in\varphi} \quad (4.35)$$

dove il fattore costante $\Phi_n^{(0)}$ è, come per la (4.33), complesso. L'integrale generale, anche questa volta, risulterà dalla (4.35) e dalla sua coniugata.

Tenendo conto della (4.32) e della (4.33) e introducendo al posto di r la variabile ausiliaria:

$$\xi = r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - h^2} \quad (4.36)$$

l'equazione radiale (4.31) diventa:

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) R = 0 \quad (4.37)$$

che è l'equazione di Bessel di ordine n (cfr. Appendice F). Essa ammette due integrali indipendenti, la funzione di Bessel $J_n(\xi)$ e la funzione di Neumann $N_n(\xi)$ ¹. La più generale soluzione della (4.37) sarà quindi esprimibile mediante una combinazione lineare di queste due funzioni. Per $\xi = 0$, tuttavia, la funzione di Neumann è infinita; essa non può quindi intervenire per rappresentare un campo finito per $r = 0$, cioè lungo l'asse z . Escludendo questo asse dal dominio di integrazione, possiamo assumere come integrali indipendenti della (4.37) due combinazioni lineari, di forma complessa, di J_n e N_n , ossia la funzione:

$$H_n(\xi) = J_n(\xi) + iN_n(\xi) \quad (4.38)$$

e la sua coniugata. La forma esplicita di H_n , che prende il nome di funzione di Hankel, può essere ottenuta mediante le espressioni di J_n e N_n .

Per grandi valori di ξ conviene tuttavia rappresentare le funzioni J_n , N_n e H_n mediante i seguenti sviluppi asintotici:

$$\begin{aligned} J_n(\xi) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \\ N_n(\xi) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \sin\left(\xi - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$H_n(\xi) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{i\left(\xi - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} \quad (4.40)$$

¹Per dettagli sulle funzioni di Bessel si rimanda a testi dedicati; vedi per esempio: G. N. Watson "A treatise on the theory of Bessel Functions" 2nd edition - Cambridge, 1962

validi per $|\xi| \gg 1$ e $|\xi| \gg n$.

Ricordando l'equazione (4.36), il fattore radiale risulta espresso mediante le funzioni di Hankel nella forma:

$$R_{\omega,n,h,\alpha}(r) = R_{\omega,n,h,\alpha}^{(0)} H_n^\alpha \left(r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - h^2} \right) \quad (4.41)$$

In questa relazione si è introdotto un indice α suscettibile di assumere i valori 1 e 2; esso serve a distinguere la funzione H_n dalla sua coniugata.

Riassumendo, ne segue che la funzione f , soluzione generale della (4.3), è data in coordinate cilindriche dallo sviluppo:

$$f(n, \varphi, z, t) = \sum_{\omega,n,h,\alpha} R_{\omega,n,h,\alpha}^{(0)} \Phi_n^{(0)} Z_h^{(0)} \chi_\omega^{(0)} H_n^\alpha \left(r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - h^2} \right) e^{i(n\varphi + hz - \omega t)} \quad (4.42)$$

Scegliendo opportunamente i valori delle costanti $R_{\omega,n,h,\alpha}^{(0)}$, $\Phi_n^{(0)}$, $Z_h^{(0)}$ e $\chi_\omega^{(0)}$, la (4.42) rappresenta, come già accadeva per la (4.21), onde di forma qualsiasi che si propagano in un dominio esteso a tutto lo spazio salvo l'asse z .

4.3 Propagazione di onde a simmetria cilindrica

Utilizzando i risultati dei paragrafi precedenti, possiamo ora riprendere lo studio della propagazione delle onde E.M., iniziato con le onde piane. Appare subito che le soluzioni dell'equazione (4.3) assumono una forma particolarmente semplice se si impone alla funzione $f(P, t)$ la simmetria cilindrica. Infatti, $f(P, t)$ non dipende da φ . Supponiamo, dunque, che il fenomeno di propagazione abbia simmetria cilindrica cioè che sia indipendente dalla coordinata φ . Inoltre, supponiamo che esso sia indipendente anche da z . Ciò non costituisce una sostanziale restrizione; si può facilmente verificare che lungo la coordinata z la propagazione può avvenire solo sotto forma di onde piane e ciò attualmente non ha interesse per i nostri scopi. Con queste ipotesi e usando le coordinate cilindriche, ricordando che:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (4.43)$$

e analogamente per $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, inoltre:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{i}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) +$$

$$\vec{i}_\varphi \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} & \vec{i}_z \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = \\ & - \left(\frac{\partial B_r}{\partial t} \vec{i}_r + \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{i}_z \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

e l'analoga per $\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ le equazioni (1.1)–(1.4) possono essere scritte nella forma:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t} = 0 \quad (4.46)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = 0 \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = 0 \quad (4.50)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = 0 \quad (4.51)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = 0 \quad (4.53)$$

dove E_r , E_z , E_φ sono le componenti cilindriche del campo elettrico e B_r , B_z , B_φ quelle del vettore induzione magnetica. Risulta subito da queste equazioni che E_r e B_r non possono propagarsi; le (4.46) e (4.50), infatti, stabiliscono che esse sono costanti nel tempo, le (4.49) e (4.53) che possono variare in funzione di r solo con legge iperbolica. Noi pertanto, essendo interessati solo alle componenti che si propagano, assumiamo E_r e B_r nulle.

Consideriamo ora le equazioni (4.1) e (4.2) ed esprimiamole mediante le componenti cilindriche di \vec{E} e \vec{B} . Tenendo conto che il laplaciano del campo magnetico è:

$$\nabla^2 \vec{B} = \vec{i}_r \left(\nabla^2 B_r - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \vec{i}_\varphi \left(\nabla^2 B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) + \vec{i}_z \nabla^2 B_z \quad (4.54)$$

$$\vec{i}_z \nabla^2 B_z \quad (4.55)$$

dove \vec{i}_r , \vec{i}_φ , \vec{i}_z sono i versori delle linee coordinate, e che vale per il campo elettrico una relazione analoga, le (4.1) e (4.2) diventano:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} B_\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.56)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} E_\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.58)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (4.59)$$

in cui ovviamente è stata considerata solo la dipendenza dalla coordinata r . Le (4.56) e (4.58) a differenza delle (4.57) e (4.59) non sono della forma (4.3) e quindi la loro integrazione costituisce un problema non ancora risolto; tuttavia ricavando dalle (4.57) e (4.59) B_z e E_z possiamo sostituirne le espressioni nelle equazioni del campo ottenendone E_φ e B_φ . Ne segue che l'integrazione delle (4.56) e (4.58) è superflua.

Ponendo nella (4.42) $n = 0$, $h = 0$ essa fornisce gli integrali, indipendenti da φ e z , delle (4.57) e (4.59); possiamo, inoltre, scegliere le costanti che intervengono nella (4.42) in modo che:

$$B_z = 0 \quad (4.60)$$

e

$$E_z = E_z^{(0)} H_0^{(1)} \left(r \frac{\omega}{c} \right) e^{-i\omega t} \quad (4.61)$$

Ciò, evidentemente, equivale a supporre il campo magnetico polarizzato lungo la direzione del versore \vec{i}_φ . Sostituendo la (4.60) nelle (4.47) e (4.52), risulta che la componente E_φ è costante rispetto al tempo ed al posto; di

conseguenza, la parte del campo elettrico che si propaga si riduce alla componente E_z . Calcoliamo ora B_φ ; sostituendo la (4.61) nella (4.51) e tenendo conto della relazione:

$$\frac{dH_0^{(1)}(\xi)}{d\xi} = -H_1^{(1)}(\xi) \quad (4.62)$$

si ha:

$$-E_z^{(0)} \frac{\omega}{c} H_1^{(1)}\left(r \frac{\omega}{c}\right) e^{-i\omega t} = \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \quad (4.63)$$

da cui integrando si ottiene:

$$B_\varphi = -\frac{1}{c} E_z^{(0)} H_1^{(1)}\left(r \frac{\omega}{c}\right) i e^{-i\omega t} = \frac{1}{c} E_z^{(0)} H_1^{(1)}\left(r \frac{\omega}{c}\right) e^{-i(\omega t + \pi/2)} \quad (4.64)$$

Scegliendo diversamente le costanti nella (4.42) possiamo ottenere, in luogo delle equazioni (4.61) e (4.64), una seconda soluzione in cui le direzioni del campo elettrico e magnetico sono scambiate, cioè il campo elettrico è diretto lungo \vec{i}_φ e quello magnetico lungo \vec{i}_z . La combinazione di queste due soluzioni ci permetterebbe di rappresentare il più generale stato di polarizzazione; la soluzione particolare da noi considerata, tuttavia, è sufficiente per chiarire le modalità della propagazione con simmetria cilindrica. Essa inoltre è interessante perchè corrisponde al caso in cui il campo magnetico (vedi figura 4.1) è generato da una corrente non stazionaria che percorre un filo rettilineo illimitato disposto lungo l'asse z . Studiamo, pertanto, le proprietà del campo

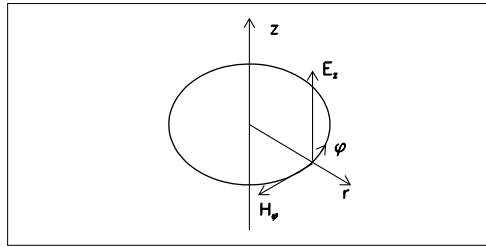


Figura 4.1:

E.M. rappresentato dalle (4.61) e (4.64). Per far questo supponiamo che si abbia:

$$r \gg \frac{c}{\omega} \quad (4.65)$$

ossia che la distanza dall'asse cilindrico sia grande rispetto al tratto percorso da un'onda E.M. che si propaghi per un tempo $1/\omega$. Mediante queste ipotesi e ricordando la (4.40), le (4.61) e (4.64) diventano:

$$E_z \simeq E_z^{(0)} \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega r}} e^{i[\omega(\frac{r}{c} - t) - \frac{\pi}{4}]} \quad (4.66)$$

$$B_\varphi \simeq -E_z^{(0)} \sqrt{\frac{2}{c\pi\omega r}} e^{i[\omega(\frac{r}{c} - t) - \frac{\pi}{4}]} \quad (4.67)$$

Da queste soluzioni complesse possiamo ottenere quelle reali, fisicamente significative, prendendone la parte reale o il coefficiente dell'unità immaginaria; possiamo perciò scrivere:

$$E_z \simeq E_z^{(0)} \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega r}} \sin \left[\omega \left(\frac{r}{c} - t \right) - \frac{\pi}{4} \right] \quad (4.68)$$

$$B_\varphi \simeq -E_z^{(0)} \sqrt{\frac{2}{c\pi\omega r}} \sin \left[\omega \left(\frac{r}{c} - t \right) - \frac{\pi}{4} \right] \quad (4.69)$$

Queste equazioni stabiliscono che il campo E.M. si propaga con velocità c sotto forma di onde la cui ampiezza decresce al crescere della distanza dall'asse z .

Studiamo ora le proprietà energetiche della propagazione a simmetria cilindrica; il vettore di Poynting associato alle espressioni asintotiche (4.68) e (4.69) del campo è:

$$\vec{S} = \frac{c^2 \epsilon_0}{\pi\omega} E_z^{(0)2} \frac{2}{r} \sin^2 \left[\omega \left(\frac{r}{c} - t \right) - \frac{\pi}{4} \right] \vec{i}_r \quad (4.70)$$

mentre la corrispondente intensità di radiazione vale pertanto:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt = \frac{\epsilon_0 c^2 E_z^{(0)2}}{\pi\omega r} \quad (4.71)$$

Risulta così che l'energia E.M. si propaga in direzione radiale con densità di flusso inversamente proporzionale a r . Si vede subito, inoltre, che il flusso di energia è costante attraverso a tutte le superfici cilindriche con asse z e altezza h assegnata; si ha infatti:

$$\int_S I dS = \int_0^{2\pi} \int_0^h I r d\varphi dz = \frac{2 c^2 h}{\omega} E_z^{(0)2} \quad (4.72)$$

che è appunto una quantità indipendente da r . Questa equazione può essere interpretata supponendo che la sorgente di energia sia uniformemente distribuita lungo l'asse z ; è ovvio, in tal modo, che il flusso energetico sia costante attraverso a tutte le superfici S .