

# Capitolo 5

## Irraggiamento di onde E.M.

### 5.1 Introduzione

Iniziamo in questo paragrafo lo studio dell'emissione di onde E.M. da parte di distribuzioni non stazionarie di cariche e correnti. Questo studio completerà i risultati del capitolo 4 in cui abbiamo trattato la propagazione del campo indipendentemente dalle sue sorgenti. Come primo caso concreto per sviluppare i nostri calcoli, consideriamo un dipolo elettrico oscillante; esso è di particolare importanza in quanto sia fenomeni di irraggiamento atomici sia quelli relativi alle antenne trasmettenti possono, in un certo modo, essere considerati come dovuti a dei dipoli di momento variabile nel tempo. Benchè lo strumento matematico più adatto al nostro scopo sia il vettore di Hertz (vedi paragrafo 2.2), eseguiremo i calcoli usando i potenziali  $\vec{A}$  e  $V$ . In questo modo apparirà evidente come la condizione di Lorentz (2.12) intervenga a semplificare il problema permettendo di calcolare solo tre integrali anzichè i quattro che compaiono nelle (2.50) e (2.51). Inoltre, sarà possibile confrontare attraverso le proprietà del potenziale  $V$  il comportamento del dipolo oscillante con quelle del dipolo statico. Ottenuti  $\vec{A}$  e  $V$ , le (2.1) e (2.4) ci forniranno per derivazione i campi  $\vec{B}$  ed  $\vec{E}$ .

### 5.2 Dipolo oscillante

Date due cariche  $-q$  e  $+q$  collocate rispettivamente nei punti  $O$  e  $O + \vec{d}$ , come indicato in figura 5.1, supponiamo che, mentre la carica  $-q$  rimane ferma, la carica  $+q$  oscilli lungo una direzione assegnata in modo che la distanza  $\vec{d}$  vari secondo la legge:

$$\vec{d} = \vec{d}_0 \cos \omega t \quad (5.1)$$

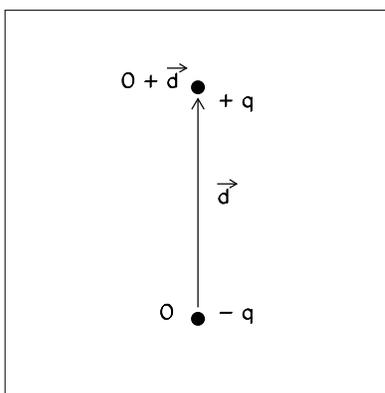


Figura 5.1:

o, in forma complessa:

$$\vec{d} = \vec{d}_0 e^{-i\omega t} \quad (5.2)$$

Evidentemente, al limite per  $\vec{d}_0$  tendente a zero, questo sistema di cariche costituisce un dipolo il cui momento, oscillante, è dato dalla relazione:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \quad (5.3)$$

in cui  $\vec{p}_0$  indica la quantità:

$$\vec{p}_0 = q \vec{d}_0 \quad (5.4)$$

Non ci interessa, per il momento, considerare le forze che determinano l'oscillazione del dipolo ; le (5.2) e (5.3) vengono assunte semplicemente come dato iniziale del nostro calcolo. Ricordando la (1.15) e tenendo conto della (5.3), la densità di corrente associata al dipolo risulta essere:

$$\vec{j}(Q) = q \frac{d\vec{d}}{dt} \delta [Q - (O + \vec{d})] = -i\omega q \vec{d}_0 e^{-i\omega t} \delta [Q - (O + \vec{d})] \quad (5.5)$$

ossia, utilizzando la (5.4)

$$\vec{j}(Q) = -i\omega \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \delta [Q - (O + \vec{d})] \quad (5.6)$$

Supponendo il vettore  $\vec{d}$  trascurabile di fronte alla distanza  $(Q - O)$  e calcolando mediante la (5.6) l'integrale che interviene nella (2.50) si ottiene subito l'espressione del potenziale  $\vec{A}$ ; esso, come è evidente dalla (2.50), è

parallelo alla corrente  $\vec{j}$ . Di conseguenza, assumendo la direzione di  $\vec{j}$  come asse polare ed  $O$  come origine, le componenti sferiche di  $\vec{A}$  sono:

$$A_r(P, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i\omega |\vec{p}_0|}{c^2} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \cos\vartheta \quad (5.7)$$

$$A_\theta(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i\omega |\vec{p}_0|}{c^2} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \sin\theta \quad (5.8)$$

$$A_\varphi(P, t) = 0 \quad (5.9)$$

Da esse è immediato ottenere le componenti sferiche del vettore induzione magnetica; infatti usando la (2.1) e ricordando le espressioni delle componenti sferiche del rotore (C.8) si ottiene:

$$B_r = \frac{1}{r \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right] = 0 \quad (5.10)$$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) \right] = 0 \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} B_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i\omega |\vec{p}_0|}{c^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right) \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \sin\theta \end{aligned} \quad (5.12)$$

Per calcolare il potenziale  $V$  occorrerebbe considerare la densità di carica associata al dipolo oscillante. Tuttavia possiamo arrivare più rapidamente al risultato utilizzando la condizione di Lorentz (2.11). Si ha infatti in coordinate polari (vedi (C.7)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= -c^2 \nabla \cdot \vec{A} = \\ &= -c^2 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

ossia, usando le (5.7), (5.8) e (5.9),

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} i\omega |\vec{p}_0| \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \cos\theta \left[ \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right] \quad (5.14)$$

Integrando questa relazione si ottiene:

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} |\vec{p}_0| \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \cos\theta \left[ \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right] + V_0(P) \quad (5.15)$$

dove  $V_0(P)$  è una funzione del posto indipendente dal tempo. Al limite per  $\omega$  tendente a zero il potenziale (5.15) diventa:

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{p}_0| \cos \theta}{r^2} + V_0(P) \quad (5.16)$$

Questa espressione deve coincidere con il potenziale di un dipolo statico di momento  $\vec{p}_0$ ; di conseguenza si verifica immediatamente che  $V_0(P)$  è nullo. Possiamo ora ricavare dalla (2.4) il campo elettrico; si ha con qualche calcolo:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \\ &= \frac{2}{4\pi\epsilon_0} |\vec{p}_0| \cos \theta \frac{e^{-i\omega(t - r/c)}}{r^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} |\vec{p}_0| \sin \theta \frac{e^{-i\omega(t - r/c)}}{r^2} \left[ \left( \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} r \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = 0 \quad (5.19)$$

Le equazioni (5.10)–(5.12) e (5.17)–(5.19), di cui solo la parte reale è per noi significativa, risolvono il problema dell'irraggiamento del dipolo; risulta subito da esse che il campo  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono tra loro ortogonali.

Analogamente a quanto è stato fatto nel paragrafo 4.3 per le onde cilindriche, studiamo le proprietà fisiche della soluzione ora trovata considerando il comportamento asintotico. A questo scopo supponiamo che  $r$  sia grande rispetto a  $c/\omega$ ; in questo modo dalle (5.10)–(5.12) otteniamo:

$$B_\varphi \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} |\vec{p}_0| \frac{\omega^2}{c^3} \sin \theta \frac{e^{-i\omega(t - r/c)}}{r} \quad (5.20)$$

Osservando poi che, per l'ipotesi fatta, si ha:

$$r \frac{\omega^2}{c^2} \gg \frac{\omega}{c} \gg \frac{1}{r} \quad (5.21)$$

le (5.17)–(5.19) danno:

$$E_r = 0 \quad (5.22)$$

$$E_\theta \simeq -\frac{|\vec{p}_0|}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \sin \theta \frac{e^{-i\omega(t - r/c)}}{r} \quad (5.23)$$

Prendendo la parte reale della (5.20) e della (5.23) si ottengono infine le espressioni asintotiche del campo E.M.:

$$B_\varphi \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} |\vec{p}_0| \frac{\omega^2}{c^3} \sin\theta \frac{\cos[\omega(t - r/c)]}{r} \quad (5.24)$$

$$E_\theta \simeq -\frac{|\vec{p}_0|}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \sin\theta \frac{\cos[\omega(t - r/c)]}{r} \quad (5.25)$$

Risulta dunque che  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono ortogonali alla direzione  $r$  (vedi figura 5.2), oltrechè tra di loro e che  $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ .

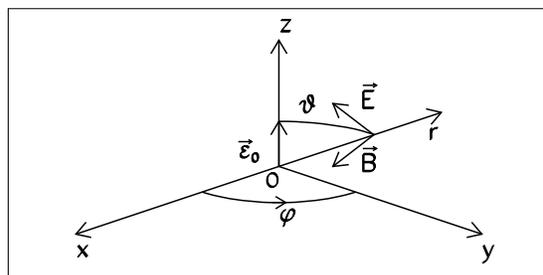


Figura 5.2:

Essi si propagano sotto forma di onde *TEM*, Trasversali Elettriche e Magnetiche (così dette perchè le componenti longitudinali di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono nulle), smorzate con legge iperbolica, la loro ampiezza è massima nel piano ortogonale all'asse del dipolo e diminuisce fino ad annullarsi quando ci si avvicina a questo asse. Ponendo  $\omega = 0$  nelle (5.17)–(5.19) si ottengono invece le componenti del campo elettrico statico:

$$E_r = \frac{2 |\vec{p}_0| \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (5.26)$$

$$E_\theta = \frac{|\vec{p}_0| \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (5.27)$$

analogamente si vede dalle (5.10)–(5.12) che il campo magnetico statico è nullo. È da notare che mentre la parte statica del campo diminuisce con la terza potenza di  $r$ , la parte che si propaga è solo inversamente proporzionale a  $r$ . Ne segue che ad una certa distanza dal dipolo, esiste una zona, detta *zona delle onde* in cui il campo E.M. si riduce alla sola parte propagativa.

Calcoliamo ora il vettore di Poynting associato al campo dato dalle equazioni (5.24) e (5.25); ricordando la definizione del vettore si ha:

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \frac{\cos^2[\omega(t - r/c)]}{r^2} \vec{i}_r \quad (5.28)$$

L'intensità di radiazione, ossia il valor medio di  $\vec{S}$  sul tempo, è:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt = \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \quad (5.29)$$

Questa relazione stabilisce che l'intensità  $I$  decresce, come è intuitivo, con il quadrato della distanza mentre varia come  $\sin^2 \theta$  quando ci si allontana dall'asse del dipolo, come illustrato in figura 5.3. L'energia totale media

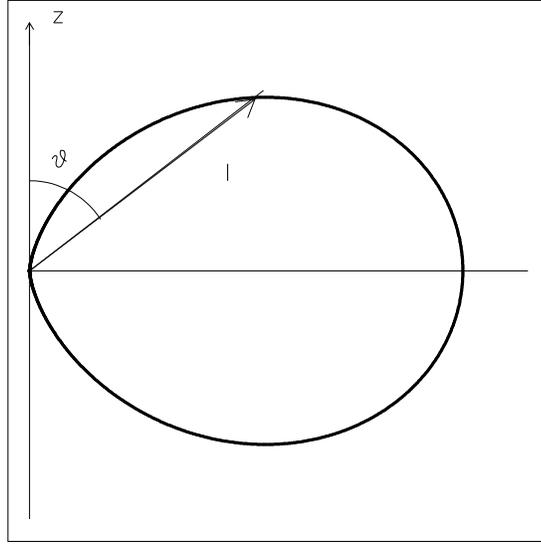


Figura 5.3:

irradiata per unità di tempo, ossia la potenza media  $W$  irradiata dal dipolo, può essere facilmente ottenuta integrando la (5.29) su una sfera di raggio  $r$  con centro nel dipolo:

$$\begin{aligned} W &= \int_{4\pi} I r^2 d\Omega = \\ &= \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Questo risultato può essere espresso in altra forma introducendo l'accelerazione quadratica media  $a_m$  della carica oscillante. Si ha infatti dalla (5.1):

$$\frac{d^2 \vec{d}}{dt^2} = -\vec{d}_0 \omega^2 \cos \omega t \quad (5.31)$$

da cui, prendendo il quadrato del modulo, mediando su un periodo e ricordando la (5.4), si ottiene:

$$a_m^2 = \frac{1}{2} |\vec{d}_0|^2 \omega^4 = \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{2q^2} \quad (5.32)$$

La (5.30) diventa perciò:

$$W = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a_m^2}{c^3} \quad (5.33)$$

questa espressione, detta *equazione di Larmor*, è di particolare importanza perchè, come vedremo in seguito, l'irraggiamento di una carica in movimento qualsiasi dipende dal modulo dell'accelerazione istantanea proprio attraverso una relazione della forma (5.33).

### 5.3 Oscillazioni smorzate

Nel precedente paragrafo abbiamo studiato l'irraggiamento del dipolo supponendo costante l'ampiezza di oscillazione  $\vec{d}_0$ . Questa ipotesi, tuttavia, richiede alcune precisazioni; è evidente infatti che l'emissione di un'onda E.M. fa diminuire l'energia posseduta dalla carica oscillante e di conseguenza il valore di  $\vec{d}_0$ . Ciò, beninteso, a patto che nulla intervenga a compensare l'energia persa per irraggiamento. Senza considerare le cause dello smorzamento, ci proponiamo ora di studiare le caratteristiche dell'emissione nell'ipotesi che  $\vec{d}_0$  effettivamente decresca a causa dell'irraggiamento.

Stabiliamo, per prima cosa, il bilancio tra l'energia irradiata e l'energia meccanica  $H$  posseduta dalla carica oscillante; quest'ultima, nel punto di massima elongazione, cioè per  $\vec{d} = \vec{d}_0$ , coincide con l'energia potenziale della forza di tipo elastico che determina l'oscillazione del dipolo. Si ha pertanto:

$$H = \frac{k}{2} |\vec{d}_0|^2 \quad (5.34)$$

dove  $k$  è la costante della forza elastica, la quale è legata alla massa  $m$  della particella oscillante e alla frequenza angolare  $\omega$  dalla ben nota relazione:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (5.35)$$

Mediante la (5.35) e la (5.4) la (5.34) può essere scritta nella forma:

$$H = \frac{m\omega^2}{2q^2} |\vec{p}_0|^2 \quad (5.36)$$

Nell'ipotesi che lo smorzamento sia piccolo, ossia supponendo che in un tempo pari al periodo  $T$  dell'oscillatore, l'ampiezza  $\vec{d}_0$  diminuisca di una quantità trascurabile, si può calcolare il decremento di  $H$  eguagliandolo alla potenza media irradiata. In questo modo, ricordando la (5.30), si ha:

$$-\frac{dH}{dt} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{c^3} \quad (5.37)$$

da cui, utilizzando la (5.36):

$$\frac{d|\vec{p}_0|}{dt} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2\omega^2}{3mc^3} |\vec{p}_0| \quad (5.38)$$

Ponendo:

$$\frac{1}{\gamma} = 4\pi\epsilon_0 \frac{3mc^3}{q^2\omega^2} \quad (5.39)$$

ed integrando, si ottiene dalla (5.38):

$$|\vec{p}_0| = |\vec{p}_{0i}| e^{-\gamma t} \quad (5.40)$$

dove  $\vec{p}_{0i}$  indica il valore di  $\vec{p}_0$  all'istante  $t = 0$  in cui il dipolo inizia ad oscillare. La (5.3) va pertanto sostituita dalle equazioni:

$$\vec{p} = 0 \quad (t < 0) \quad (5.41)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_{0i} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \quad (t \geq 0) \quad (5.42)$$

le quali rappresentano una oscillazione smorzata, del tipo di quella indicata in figura 5.4.

È evidente che è essenziale supporre, come appunto si è fatto nella (5.41), che per  $t < 0$  il dipolo sia in quiete; diversamente l'equazione (5.42) fornirebbe, al decrescere di  $t$ , dei valori di  $\vec{p}$  arbitrariamente grandi, il che manifestamente è cosa assurda. La costante  $1/\gamma$  è una quantità, con dimensioni di un tempo, che prende il nome di *vita media dell'oscillatore*,  $\tau$ ; essa rappresenta il tempo durante il quale l'ampiezza di oscillazione si riduce di un fattore  $1/e$ .

L'ipotesi di un piccolo smorzamento equivale alla condizione:

$$\frac{1}{\gamma} \gg T; \quad (5.43)$$

notiamo che  $1/\gamma = \tau$  è dell'ordine di  $10^{-8}$  s nel caso di un elettrone che oscilla ed emetta radiazione luminosa per la quale  $T = 10^{-15} - 10^{-16}$  s.

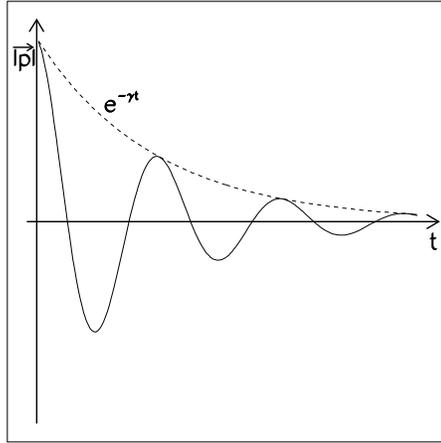


Figura 5.4:

Esaminiamo ora l'effetto della legge del moto (5.41)–(5.42) sulle onde irradiate dal dipolo. È manifesto che, nell'ipotesi di piccolo smorzamento, tutto si ridurrà a scrivere delle equazioni simili alla (5.25), in cui però il momento  $\vec{p}_0$  è smorzato con legge esponenziale. A partire dall'istante  $t = r/c$ , in cui l'onda emessa all'istante  $t = 0$  raggiunge i punti situati a distanza  $r$ , il campo elettrico sarà pertanto rappresentato dall'equazione asintotica:

$$E_\theta \simeq -\frac{|\vec{p}_{0i}|}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \sin\theta e^{-\gamma(t-r/c)} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (t \geq \frac{r}{c}) \quad (5.44)$$

mentre, prima di questo istante:

$$E_\theta = 0 \quad (t < \frac{r}{c}) \quad (5.45)$$

Si può dimostrare che, a causa del fattore di smorzamento, la *composizione spettrale* dell'onda E.M. risulta alterata; essa, anziché essere rigorosamente monocromatica, è costituita da una banda di frequenze con centro in  $\omega$ . Per fare ciò consideriamo la variabile  $t' = t - r/c$  ed introduciamo la costante:

$$E_\theta^{(0)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} |\vec{p}_{0i}| \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\sin\theta}{r} \quad (5.46)$$

in questo modo la (5.44) può essere scritta in funzione di  $t'$  nella forma:

$$E_\theta = E_\theta^{(0)} e^{-(\gamma + i\omega) t'} \quad (5.47)$$

Sviluppiamo ora in integrale di Fourier (vedi appendice D):

$$E_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega') e^{-i\omega' t'} d\omega' \quad (5.48)$$

in cui  $K(\omega')$  è la funzione che rappresenta la composizione spettrale in questione. Siccome per la (5.44)  $E_\theta$  è nullo per  $t' < 0$ , si può scrivere:

$$K(\omega') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} E_\theta e^{i\omega' t'} dt' \quad (5.49)$$

ossia, usando la (5.45):

$$\begin{aligned} K(\omega') &= \frac{E_\theta^{(0)}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{[i(\omega' - \omega) - \gamma]t'} dt' \\ &= -\frac{E_\theta^{(0)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega' - \omega) - \gamma} = \\ &= \frac{E_\theta^{(0)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i \arctan\left(\frac{\omega' - \omega}{\gamma}\right)}}{\sqrt{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2}} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Sostituendo nella (5.47) il campo propagativo assume la forma:

$$E_\theta\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{E_\theta^{(0)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\left[\omega'\left(t - \frac{r}{c}\right) - \arctan\left(\frac{\omega' - \omega}{\gamma}\right)\right]}}{\sqrt{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2}} d\omega' \quad (5.51)$$

esso è pertanto costituito da uno spettro continuo di onde con ampiezze di densità:

$$\Lambda(\omega') = \frac{E_\theta^{(0)}}{2\pi\sqrt{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2}} \quad (5.52)$$

il termine  $\arctan\left(\frac{\omega' - \omega}{\gamma}\right)$  rappresenta invece una costante di fase. Tenendo conto che  $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ , l'intensità associata all'onda di frequenza angolare  $\omega'$  risulta essere:

$$I(\omega') = \epsilon_0 c \left(\frac{E_\theta^{(0)}}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2} \quad (5.53)$$

ponendo:

$$I_m = \epsilon_0 c \left(\frac{E_\theta^{(0)}}{2\pi\gamma}\right)^2 \quad (5.54)$$

l'espressione (5.53) assume la forma:

$$I(\omega') = I_m \frac{\gamma^2}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2} \quad (5.55)$$

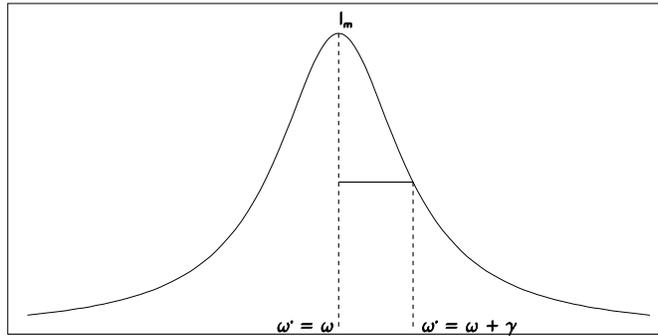


Figura 5.5:

La funzione  $I(\omega')$ , che prende il nome di *funzione lorentziana*, è rappresentata in figura 5.5. Il suo massimo valore  $I_m$  corrisponde a  $\omega' = \omega$ ; si ottiene subito inoltre:

$$I(\omega + \gamma) = \frac{1}{2} I_m \quad (5.56)$$

per cui la costante  $\gamma$  rappresenta anche la semiampiezza della distribuzione  $I(\omega')$  a metà altezza massima. In altri termini: il reciproco della vita media dell'oscillatore è uguale alla semiampiezza  $\gamma$ . Questo risultato può essere espresso più chiaramente nella forma:

$$\Delta\omega \Delta t = \frac{1}{2} \quad (5.57)$$

dove al posto di  $\gamma$  si è scritto  $\Delta\omega$  e  $\Delta t$  indica la metà della vita media  $1/\gamma$ .

L'equazione (5.57) assume un particolare significato in elettrodinamica quantistica. Moltiplicandola membro a membro per  $\hbar$  e ricordando la relazione che lega l'energia di un fotone alla sua pulsazione, essa diventa:

$$\Delta W \Delta t = \frac{\hbar}{2} \quad (5.58)$$

dove  $W$  è l'energia associata al fotone. L'interpretazione quantistica di questa relazione è la seguente: l'oscillatore irradia fotoni la cui energia è affetta da una indeterminazione  $\Delta W$ ; l'istante in cui ciò avviene è contenuto nell'intervallo di tempo  $2 \Delta t$ , ossia è affetto a sua volta dall'indeterminazione temporale  $\Delta t$ . Il prodotto delle due indeterminazioni è costante e vale  $\frac{\hbar}{2}$ . Questo appunto è l'enunciato del principio di indeterminazione di Heisenberg nel caso in cui si voglia studiare la dipendenza dal tempo dell'energia di una particella.

## 5.4 Onde E.M. in risonanza

Finora abbiamo trattato i problemi relativi alla propagazione di onde E.M. in maniera molto astratta, da un punto di vista matematico e rifacendo trattazioni ed argomentazioni di più di un secolo fa. Vediamo ora di trattare qualche argomento più moderno e soprattutto di valenza applicativa. È superfluo notare che la nostra vita quotidiana è condizionata, praticamente in ogni istante, dall'uso di strumenti basati sulla ricezione di onde E.M. (radio, TV, radar, telefoni cellulari, fibre ottiche per telecomunicazioni, ... ). Il funzionamento di tali strumenti è ottimizzato sfruttando il fenomeno della risonanza, nell'emissione, nella trasmissione e nella ricezione delle onde E.M.. Descriveremo brevemente e semplicemente alcuni dei principi fisici sui quali si basano queste tecnologie, incominciando dall'antenna lineare, che è il prototipo di un emettitore di onde E.M. in risonanza, e per il quale possiamo ancora usare le EqM macroscopiche nel vuoto, senza grosse limitazioni.

## 5.5 Antenna Lineare

Il presente paragrafo è dedicato allo studio dell'irraggiamento di uno dei più semplici, ma anche più significativi, tipi di antenna lineare. Consideriamo il sistema, schematizzato in figura 5.6, formato da due barre metalliche di lunghezza  $d/2$  allineate lungo l'asse  $z$  e collegate, per le estremità contigue, ad un generatore di oscillazioni elettriche funzionante con una frequenza angolare  $\omega$  (ad esempio, un generatore di corrente alternata). Se si trascura lo smorzamento dovuto all'emissione di radiazione e se l'antenna è sottile, si può considerare la corrente lungo l'antenna come una funzione sinusoidale di  $z$  e di  $t$ , con numero d'onda  $k = \omega/c$  e simmetrica nelle due parti. La corrente deve annullarsi agli estremi dell'antenna, perciò le barre sono sede di una corrente elettrica di densità:

$$\vec{j} = \vec{k} \frac{I_0}{S} e^{-i\omega t} \sin \left[ \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right) \right] \quad (5.59)$$

dove  $S$  è la sezione delle barre, supposta costante per semplicità, e  $I_0$  è la massima intensità di corrente che le percorre (l'ampiezza della corrente alternata, nel caso del generatore). La (5.59), inoltre, implica che la corrente percorra le barre sotto forma di onde che si propagano con velocità  $c$ . Non vogliamo ora stabilire le modalità di questa propagazione, che di fatto riguardano i fenomeni di conduzione, bensì ci interessa studiare il campo E.M. prodotto dalla corrente che percorre l'antenna, in punti posti ad una distanza da essa molto grande rispetto alla sua dimensione lineare  $d$ .

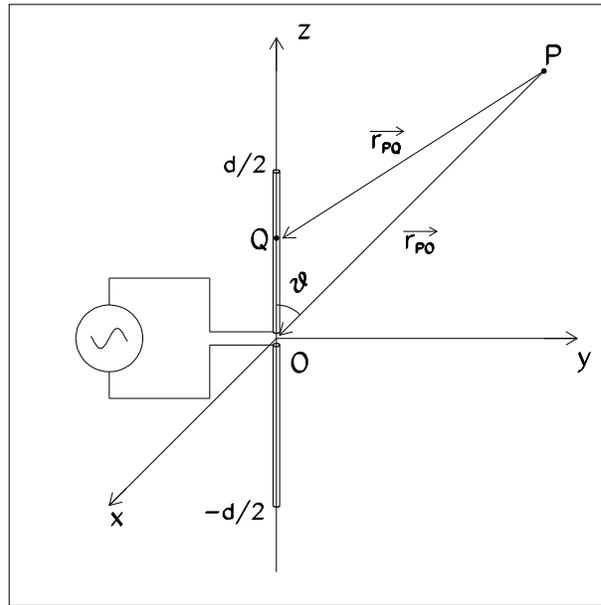


Figura 5.6:

Per sviluppare i calcoli utilizziamo il metodo del vettore di Hertz, introdotto nel paragrafo 2.2. Occorre innanzitutto ricavare il vettore  $\vec{Q}$ ; ricordando la (2.21), dalla (5.59) si ottiene:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} = \vec{k} \frac{I_0}{S} e^{-i\omega t} \sin \left[ \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right) \right] \quad (5.60)$$

da cui, integrando:

$$\vec{Q} = \vec{k} \frac{I_0}{S} \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \sin \left[ \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right) \right] \quad (5.61)$$

Mediante la (2.52) si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \vec{Z}(P, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{Q}(Q, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} dV_Q = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{k}I_0i}{S\omega} \int_V \frac{e^{-i\omega(t-r_{PQ}/c)}}{r_{PQ}} \sin \left[ \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right) \right] dV_Q \end{aligned} \quad (5.62)$$

dove l'integrazione è estesa a tutto il volume occupato dalle sbarre dell'antenna. Avendo supposto la distanza  $r_{PQ}$  grande rispetto a  $d$ , si può sviluppare

$r_{PQ}$  in serie di Mac Laurin nell'intorno dell'origine,  $O$ , e scrivere:

$$\begin{aligned} r_{PQ} &= r_{PO} + \left( \nabla_Q r_{PQ} \cdot \vec{k} \right)_O |Q - O| + \dots \\ &\simeq r_{PO} + \frac{\vec{r}_{PO} \cdot \vec{k}}{r_{PO}} z = r_{PO} - z \cos \theta \end{aligned} \quad (5.63)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione di  $P - O$  e l'asse dell'antenna. Inserendo questa relazione nella (5.63) e trascurando i termini proporzionali alle potenze di  $1/r_{PO}$  superiori alla prima, l'espressione di  $\vec{Z}$  diventa:

$$\begin{aligned} \vec{Z}(P, t) &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{k} \frac{iI_0}{S\omega} \frac{e^{-i\omega(t-r_{PO}/c)}}{r_{PO}} \cdot \\ &\int_V e^{-i\frac{\omega}{c} \cos \theta z} \sin \left[ \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right) \right] dV \end{aligned} \quad (5.64)$$

Tenendo conto che  $dV = S dz$ , trasformando l'integrazione sui valori negativi di  $z$  in quella sui valori positivi ed esprimendo il seno con gli esponenziali immaginari, si ottiene con semplici calcoli:

$$\begin{aligned} \vec{Z}(P, t) &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{k} \frac{iI_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-r_{PO}/c)}}{r_{PO}} \int_{-d/2}^{+d/2} e^{-i\frac{\omega}{c} \cos \theta z} \cdot \\ &\sin \left[ \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right) \right] dz \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{k} \frac{iI_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-r_{PO}/c)}}{r_{PO}} \int_0^{+d/2} \left( e^{-i\frac{\omega}{c} \cos \theta z} + e^{i\frac{\omega}{c} \cos \theta z} \right) \cdot \\ &\sin \left[ \frac{\omega}{c} \left( z - \frac{d}{2} \right) \right] dz \\ &= \vec{k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2icI_0}{\omega^2} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\left( \cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c} \right)}{\sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (5.65)$$

dove al posto di  $r_{PO}$  si è scritto semplicemente  $r$ . La (5.65) è la richiesta espressione asintotica del vettore di Hertz.

Per calcolare il campo E.M. cominciamo col valutare  $\nabla \times \vec{Z}$ ; mediante la (A.20) si ricava:

$$\nabla \times \vec{Z} = \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2icI_0}{\omega^2} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\left( \cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c} \right)}{\sin^2 \theta} \right] \times \vec{k}$$

D'altra parte, utilizzando l'espressione (C.6) del gradiente in coordinate polari e tenendo conto solo dei termini infinitesimi del primo ordine per  $r$  tendente

ad infinito, si ha:

$$\begin{aligned} \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2icI_0}{\omega^2} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin^2 \theta} \right] &\simeq \\ \vec{i}_r \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2icI_0}{\omega^2} \frac{i\omega}{c} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin^2 \theta} \right] & \end{aligned} \quad (5.66)$$

Essendo

$$\vec{i}_r \times \vec{k} = -\vec{i}_\varphi \sin \theta \quad (5.67)$$

la (5.66) diventa infine:

$$\nabla \times \vec{Z} \simeq \vec{i}_\varphi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2I_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin \theta}$$

Applicando la (2.28) possiamo ora dedurre l'espressione asintotica del vettore induzione magnetica; si ha:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{Z} \\ &\simeq -\vec{i}_\varphi \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2iI_0 \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (5.68)$$

Analogamente, applicando la (2.29) e ricordando che il vettore  $\vec{Q}$  è differente da zero solo dove esiste la distribuzione di corrente, ossia nel volume interno alle barre dell'antenna, si ottiene:

$$\vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{Z} = \nabla \times \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2I_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin \theta} \right) \vec{i}_\varphi \quad (5.69)$$

Tenendo conto che:

$$\vec{i}_r \times \vec{i}_\varphi = -\vec{i}_\theta \quad (5.70)$$

e considerando sempre solo termini infinitesimi del primo ordine per  $r$  tendente ad infinito, l'espressione asintotica di  $\vec{E}$  risulta essere pertanto:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2I_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin \theta} \right] \times \vec{i}_\varphi \\ &\simeq -\vec{i}_\theta \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2iI_0}{c} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin \theta} \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

Basta ora prendere la parte reale delle (5.68) e (5.71) per ottenere le espressioni asintotiche finali dei campi:

$$\vec{B}(P, t) \simeq \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2I_0}{c^2} \frac{\sin[\omega(t - r/c)]}{r} \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin \theta} \vec{i}_\varphi \quad (5.72)$$

$$\vec{E}(P, t) \simeq \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2I_0}{c} \frac{\sin[\omega(t - r/c)]}{r} \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin \theta} \vec{i}_\theta \quad (5.73)$$

Dalle equazioni ottenute si deduce che il campo si propaga sotto forma di onde trasversali, i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono ortogonali tra di loro, diminuiscono con la distanza come  $1/r$  e  $|\vec{B}| = 1/c |\vec{E}|$ . La dipendenza da  $\theta$ , però, è alquanto complicata e contiene, come parametro la lunghezza dell'antenna.

Per completare questi risultati non resta che scrivere l'espressione del vettore di Poynting; ricordando la (3.10) e tenendo conto che i versori  $\vec{i}_r$ ,  $\vec{i}_\theta$  e  $\vec{i}_\varphi$  formano una terna destrorsa, essa è:

$$\vec{S} = \frac{I_0^2}{4\pi^2\epsilon_0 c} \frac{\sin^2[\omega(t - r/c)]}{r^2} \left[ \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin \theta} \right]^2 \vec{i}_r \quad (5.74)$$

Ne segue che l'intensità di radiazione vale:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0 c} \frac{I_0^2}{2r^2} \left[ \frac{\left(\cos \frac{\omega d}{2c} - \cos \frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad (5.75)$$

Questa equazione richiede un'analisi accurata per stabilire, in relazione alla lunghezza dell'antenna, la dipendenza da  $\theta$  dell'energia irradiata. Osserviamo innanzitutto che

$$\frac{\omega d}{2c} = \frac{\pi d}{\lambda} \quad (5.76)$$

Quando la lunghezza dell'antenna è piccola rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$ , sviluppando i coseni in serie di potenze, la (5.75) diventa:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0 c} \frac{I_0^2}{2r^2} \left( \frac{\omega^2 d^2}{8c^2} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \left( \frac{I_0^2 d^4}{16c^2} \right) \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Ne segue, confrontando con la (5.29), che l'irraggiamento dell'antenna coincide con quello di un dipolo oscillante per il quale si abbia:

$$|\vec{p}_0| = \frac{I_0 d^2}{4c} \quad (5.78)$$

Particolarmente importante è il caso in cui la lunghezza dell'antenna  $d$  è uguale ad un numero intero di semilunghezze d'onda, cioè:

$$d = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.79)$$

Tenendo conto della (5.76) e sostituendo nella (5.75) si ottiene per  $n$  pari:

$$I = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{I_0^2}{2r^2} \frac{(1 \pm \cos(n/2\pi \cos \theta))^2}{\sin^2 \theta} \quad (5.80)$$

in cui i due segni si riferiscono al caso in cui  $n/2$ , a sua volta, è rispettivamente pari o dispari. Per  $n$  pari, la (5.80) può quindi essere messa nella forma:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{I_0^2}{2r^2} \frac{\cos^4\left(\frac{n}{4}\pi \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \quad (n = 2, 6, 10, \dots) \\ I &= \frac{1}{\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{I_0^2}{2r^2} \frac{\sin^4\left(\frac{n}{4}\pi \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \quad (n = 4, 8, 12, \dots) \end{aligned} \quad (5.81)$$

Per  $n$  dispari, invece:

$$I = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{I_0^2}{2r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\pi \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \quad (5.82)$$

In figura 5.7 sono riportati, per vari valori di  $n$ , i grafici polari della dipendenza angolare di  $I$ ; da essi appare evidente che al crescere di  $n$  l'emissione diventa via via più direzionale e si allontana dal piano ortogonale all'antenna.

Consideriamo ora, limitatamente al caso in cui  $n = 1$ , la potenza totale irradiata da un'antenna. Analogamente a quanto fatto per il dipolo, occorre calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} W &= \int_{4\pi} I r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{I_0^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c} I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = 2,44 \frac{I_0^2}{8\pi \epsilon_0 c} \end{aligned} \quad (5.83)$$

È da notare che per  $d = \lambda$ , cioè nel caso  $n = 2$ , vale una relazione analoga, salvo che il coefficiente di proporzionalità passa da 2.44 a 6.72. Vicversa,

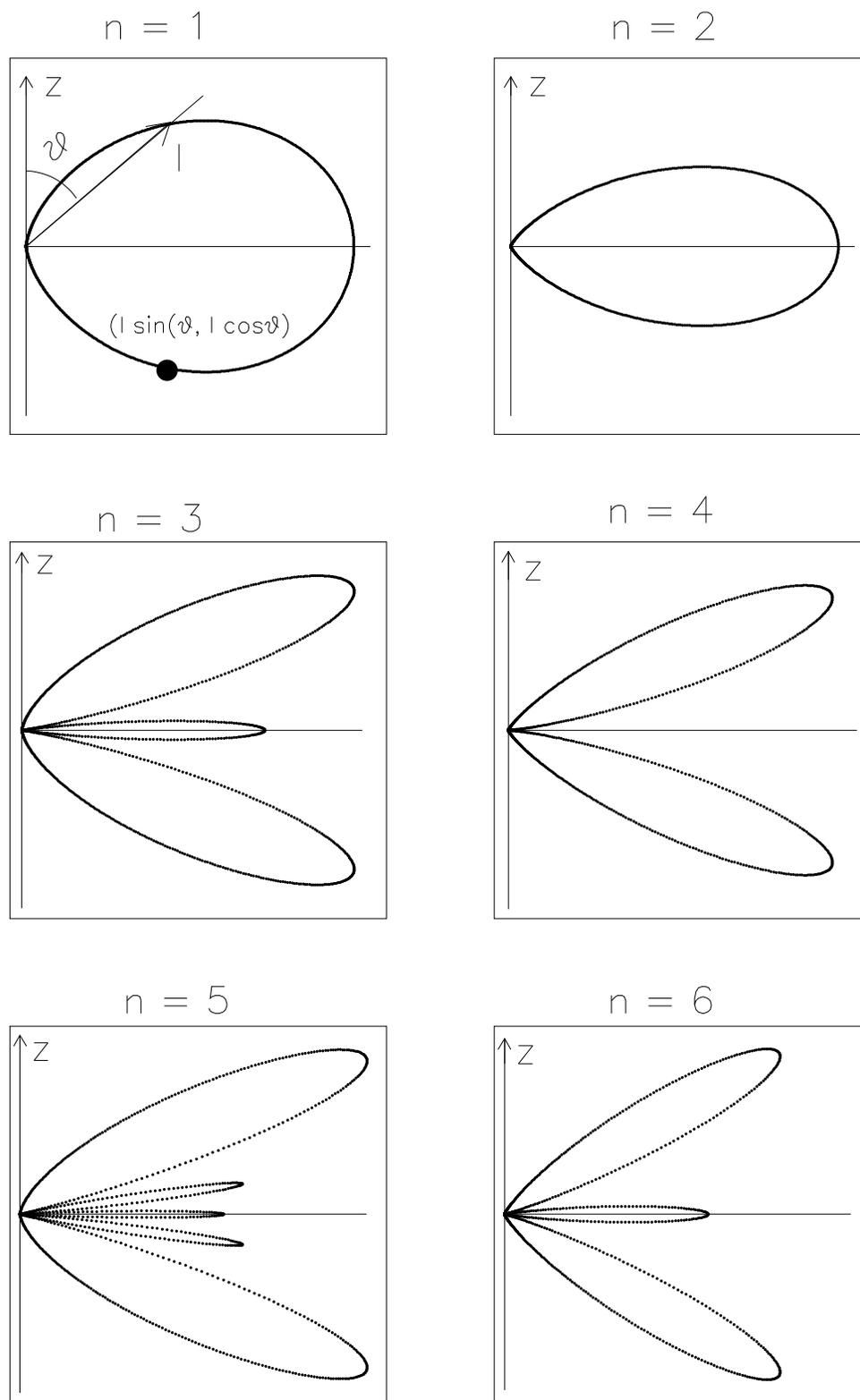


Figura 5.7:

per  $d = 10^{-2} \lambda$ , nel qual caso l'antenna è approssimabile con un dipolo oscillante e la potenza può essere ottenuta sostituendo la (5.78) nella (5.30), si ha:

$$W = \frac{I_0^2 d^4}{16c^2} \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{I_0^2}{8\pi\epsilon_0 c} \frac{(10^{-2}2\pi)^4}{24} = 6.49 \cdot 10^{-7} \frac{I_0^2}{8\pi\epsilon_0 c} \quad (5.84)$$

avendo usato la relazione  $\omega\lambda = 2\pi c$ . Se ne conclude che, a parità di  $I_0$  l'efficienza di irraggiamento di una antenna lineare in risonanza è di gran lunga maggiore di quella di un dipolo.