

Capitolo 6

Guide d'onda

6.1 EqM per la guida d'onda

Abbiamo visto che usando in maniera appropriata un'antenna lineare è possibile ottenere una buona direzionalità nella emissione delle onde E.M.. Emissioni ancora più direzionali potrebbero essere ottenute con configurazioni geometriche dell'antenna più complicate. Viene da chiedersi se non sia possibile convogliare tutta l'energia E.M. emessa da una sorgente in un'unica direzione, entro tubi metallici. Tenendo conto che le dimensioni trasversali dei tubi metallici sono dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda dell'onda E.M. che si vuole trasmettere, per motivi pratici parleremo di tubi delle dimensioni di qualche *cm*, e di conseguenza di *onde centimetriche*. L'interesse ad avere sorgenti intense di onde E.M. con lunghezza d'onda dell'ordine del centimetro fu stimolato soprattutto dalla richiesta di localizzare oggetti in movimento (aerei) a distanza, tramite riflessione di onde E.M. di lunghezza d'onda inferiore alla dimensione dell'oggetto. Se si fossero utilizzate onde E.M. di lunghezza d'onda maggiore (decina di metri), l'intensità delle onde riflesse sarebbe stata trascurabile.

Studiamo quindi il problema della propagazione di un'onda E.M. in un tubo metallico, con pareti di spessore trascurabile e conducibilità infinita. Vedremo poi come correggere per queste ipotesi non fisiche. Supponiamo che all'interno del tubo sia contenuto un mezzo materiale isotropo non dispersivo, con costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, dove ϵ_r è la suscettività elettrica relativa, e con permeabilità magnetica $\mu = \mu_r \mu_0$, dove μ_r è la suscettività magnetica relativa. Utilizzeremo le EqM macroscopiche in un mezzo materiale:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libere} \tag{6.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{6.2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{cond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.4)$$

in cui sono stati introdotti i vettori *spostamento elettrico* \vec{D} e *campo magnetico* \vec{H} per tenere conto degli effetti dovuti al mezzo materiale, lasciando inalterata la struttura delle sorgenti (ρ_{libere} e \vec{j}_{cond}). Nel caso semplice che trattiamo porremo:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (6.5)$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (6.6)$$

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (6.7)$$

dove ρ è la resistività specifica del mezzo materiale.

Vogliamo studiare se è possibile propagare un'onda E.M. lungo l'asse della guida senza perdite. Si vede subito che questa condizione fisica impone che il campo elettrico \vec{E} che si propaga sia, in ogni istante ed in ogni punto del contorno, normale alla superficie, cioè:

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0 \quad (6.8)$$

Questa condizione assicura che non ci sono perdite di potenza per effetto Joule sulle pareti. Dalla (6.7) si vede che la condizione (6.8) ammette solo \vec{j} ortogonale in ogni punto alla superficie del contorno della guida, ipotizzata per ora come una pura superficie geometrica, di "spessore" nullo.

Supponiamo di propagare onde E.M. armoniche rispetto al tempo, che variano cioè in ogni punto rispetto al tempo come e^{ikct} , dove k è il numero d'onda nel vuoto, cioè $\omega = kc$. Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui l'asse z coincida con l'asse della guida e consideriamo una configurazione dei campi \vec{E} e \vec{B} per $t = 0$ e $z = 0$ (cioè la sezione della guida a $z = 0$), che chiameremo \vec{E}_0 e \vec{B}_0 . Sarà:

$$\vec{E}_0(x, y) = E_{0x}(x, y)\vec{i} + E_{0y}(x, y)\vec{j} + E_{0z}(x, y)\vec{k} \quad (6.9)$$

e

$$\vec{B}_0(x, y) = B_{0x}(x, y)\vec{i} + B_{0y}(x, y)\vec{j} + B_{0z}(x, y)\vec{k} \quad (6.10)$$

Chiediamoci se è possibile propagare lungo l'asse z le configurazioni (6.9) e (6.10) con una *velocità di fase* v_f . Poniamo cioè:

$$\alpha = \frac{\omega}{v_f} = \frac{kc}{v_f} \quad (6.11)$$

Si precisa che v_f è diverso da c , ovviamente, in quanto non siamo nel vuoto, ma sarà anche diverso, come vedremo, da $c/\sqrt{\epsilon\mu}$, cioè la velocità di propagazione nel mezzo materiale infinito, non limitato dalle pareti conduttrici.

I campi \vec{E} e \vec{B} saranno allora descritti, in ogni punto P interno alla guida e ad ogni istante t , dalle equazioni:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = [E_{0x}(x, y)\vec{i} + E_{0y}(x, y)\vec{j} + E_{0z}(x, y)\vec{k}] e^{i(kct - \alpha z)} \quad (6.12)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = [B_{0x}(x, y)\vec{i} + B_{0y}(x, y)\vec{j} + B_{0z}(x, y)\vec{k}] e^{i(kct - \alpha z)} \quad (6.13)$$

Data la (6.12), la condizione (6.8) diventa:

$$\vec{E}_0 \times \vec{n} = 0 \quad (6.14)$$

Con le posizioni (6.12) e (6.13), le (6.3)–(6.4) in cui si ponga $\vec{j}_{cond} = 0$, e si utilizzino le (6.5), (6.6), diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} + i\alpha B_{0y} &= i\epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} E_{0x} \\ -i\alpha B_{0x} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} &= i\epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} E_{0y} \\ \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} &= i\epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} E_{0z} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} + i\alpha E_{0y} &= -ikc B_{0x} \\ -i\alpha E_{0x} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} &= -ikc B_{0y} \\ \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} &= -ikc B_{0z} \end{aligned} \quad (6.16)$$

e le (6.1)–(6.2), in cui si ponga $\rho_{libere} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} - i\alpha E_{0z} &= 0 \\ \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y} - i\alpha B_{0z} &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Di queste ultime possiamo non tenere conto poichè sono una conseguenza delle (6.15) e (6.16). Risolvendo le prime due delle (6.15) e (6.16) rispetto a E_{0x} , E_{0y} , B_{0x} , B_{0y} , si ottiene:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= -\frac{i}{\lambda^2} \left[\alpha \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + kc \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \right] \\ E_{0y} &= -\frac{i}{\lambda^2} \left[\alpha \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - kc \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \right] \\ B_{0x} &= \frac{i}{\lambda^2} \left[\epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \alpha \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \right] \\ B_{0y} &= -\frac{i}{\lambda^2} \left[\epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

dove per semplicità si è posto:

$$\lambda^2 = \epsilon_r \mu_r k^2 - \alpha^2 \quad (6.19)$$

supponendo $\lambda^2 \neq 0$.

Sostituendo le (6.18) nell'ultima equazione delle (6.15) e (6.16), si ha che queste risultano soddisfatte se:

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} + \lambda^2 E_{0z} = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} + \lambda^2 B_{0z} = 0 \quad (6.21)$$

Consideriamo ora la condizione al contorno (6.14). Con riferimento alla figura 6.1, se indichiamo con $\vec{\tau}$ il versore tangente al contorno della guida nel punto $(x, y, 0)$ e con \vec{n} il versore normale, si ha evidentemente $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{\tau}$.

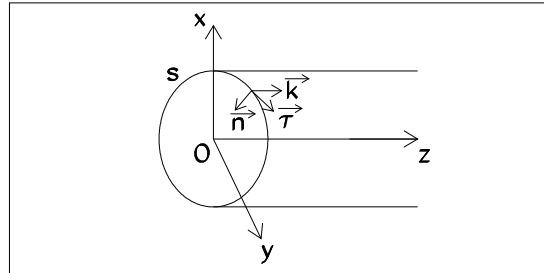


Figura 6.1:

Ricordando l'espressione del doppio prodotto esterno (A.5) avremo:

$$\vec{E}_0 \times \vec{n} = \vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{\tau}) = (\vec{E}_0 \cdot \vec{\tau})\vec{k} - (\vec{E}_0 \cdot \vec{k})\vec{\tau}$$

e quindi dovremo avere, separatamente:

$$(\vec{E}_0 \cdot \vec{k}) = E_{0z} = 0 \quad \text{sul contorno} \quad (6.22)$$

$$(\vec{E}_0 \cdot \vec{\tau}) = 0 \quad \text{sul contorno} \quad (6.23)$$

Indicando con dx/ds e dy/ds i coseni direttori della tangente al contorno s , la condizione (6.23) equivale a:

$$E_{0x} \frac{dx}{ds} + E_{0y} \frac{dy}{ds} = 0 \quad (6.24)$$

Sostituendo nella (6.24) le prime due delle (6.18) in cui si sia posto $E_{0z} = 0$, ricaviamo:

$$kc \left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad (6.25)$$

Ricordando che i coseni direttori della normale \vec{n} al contorno s sono rispettivamente $\frac{dx}{dn} = -\frac{dy}{ds}$ e $\frac{dy}{dn} = \frac{dx}{ds}$, la condizione al contorno (6.24) diventa:

$$\frac{dB_{0z}}{dn} = 0 \quad \text{sul contorno} \quad (6.26)$$

Da un punto di vista fisico il fatto che l'unica condizione iniziale (6.14) si trasformi nelle due condizioni (6.22) e (6.26) corrisponde al fatto che il campo elettrico totale è costituito da due componenti, una di tipo "elettrostatico" ed una di tipo "indotto".

Il problema della propagazione di onde E.M. entro un tubo cilindrico riempito con un mezzo dielettrico omogeneo è dunque ridotto all'integrazione delle equazioni differenziali (6.20) e (6.21), con le rispettive condizioni al contorno (6.22) e (6.26). Ricavate E_{0z} e B_{0z} , le (6.18) forniscono le altre componenti di \vec{E} e \vec{B} e le condizioni al contorno risultano soddisfatte.

Fra le soluzioni del sistema considerato sono particolarmente importanti quelle in cui è nulla la componente assiale B_{0z} del campo magnetico, oppure quelle in cui è nulla la componente assiale E_{0z} del campo elettrico. Le prime sono dette *onde di tipo elettrico* o *trasversali magnetiche* (T.M.); le seconde sono dette *onde di tipo magnetico* o *trasversali elettriche* (T.E.). Si fa notare che, secondo questa terminologia, le onde E.M. che si propagano nello spazio indefinito, privo di sorgenti, sarebbero *trasversali elettriche e magnetiche* (T.E.M.).

Per le onde di tipo elettrico il problema si riduce a determinare la componente assiale E_{0z} del campo elettrico soddisfacente alla (6.20) e alla condizione al contorno (6.22). Dopo ciò, le altre componenti del campo saranno date da:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= -\frac{i\alpha}{\lambda^2} \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} & E_{0y} &= -\frac{i\alpha}{\lambda^2} \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \\ B_{0x} &= -\frac{i}{\lambda^2} \epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} & B_{0y} &= -\frac{i}{\lambda^2} \epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Per le onde di tipo magnetico il problema si riduce, invece, a determinare la componente assiale B_{0z} del campo magnetico soddisfacente alla (6.21) con la condizione al contorno (6.26). In tal caso le altre componenti del campo saranno date da:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= -\frac{ikc}{\lambda^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} & E_{0y} &= \frac{ikc}{\lambda^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \\ B_{0x} &= -\frac{i\alpha}{\lambda^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} & B_{0y} &= -\frac{i\alpha}{\lambda^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Le equazioni (6.20) e (6.21) sono una vecchia conoscenza della Fisica Matematica. Se consideriamo una membrana elastica piana con l'orlo fisso (un tamburo) ed indichiamo con $\vec{z}(x, y)$ lo spostamento lungo la normale al piano di un punto qualsiasi della membrana, otterremo che la membrana vibrerà secondo l'equazione (6.20), con z al posto di E_{0z} , e la condizione al contorno $z = 0$. Se volessimo, invece, studiare le vibrazioni di una membrana con il bordo libero, ma vincolato a spostarsi solo perpendicolarmente al piano della membrana (i piatti di una batteria musicale), otterremo l'equazione (6.21) con la condizione al contorno (6.26).

Si sapeva quindi che ambedue le equazioni ammettevano soluzioni non nulle soltanto per valori discreti del parametro λ^2 , detti *autovalori*, dipendenti dalla forma del contorno s della sezione del tubo. Le soluzioni corrispondenti ad un dato autovalore si chiamano *autofunzioni*. Si può dimostrare che λ^2 è un numero reale e positivo; dalla (6.19), ricordando la (6.11), si ha:

$$\alpha^2 = \frac{k^2 c^2}{v_f^2} = \epsilon_r \mu_r k^2 - \lambda^2 \quad (6.29)$$

da cui risulta che v_f^2 è reale. Però, affinché in corrispondenza dell'autovalore λ^2 si abbia un'onda non smorzata, deve essere α , e quindi anche v_f , reale. Ciò richiede che sia $\epsilon_r \mu_r k^2 - \lambda^2 \geq 0$, e quindi:

$$k \geq \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (6.30)$$

la quale mostra che esiste un valore minimo di k , cioè della frequenza $\nu = kc/(2\pi)$, al di sotto della quale nessuna propagazione è più possibile nella guida. Se λ_0^2 è il più piccolo degli autovalori della (6.20) o (6.21), nel tubo si possono propagare soltanto onde di frequenza ν superiore, o tutto al più eguale, alla frequenza ν_c , che diremo *critica*, espressa dalla relazione:

$$\nu_c = \frac{\lambda_0 c}{2\pi \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (6.31)$$

Ogni modo di propagazione, identificato da un autovalore λ , avrà poi una frequenza di taglio, definita da una relazione analoga alla (6.31) ove a λ_0 si sostituisca il corrispondente valore di λ , al di sotto della quale il modo non può propagarsi nel tubo senza smorzarsi, in quanto α diventa complesso. L'andamento di α in funzione della frequenza è indicato qualitativamente nella figura 6.2, ove sono rappresentati solamente i primi cinque generici modi di propagazione e le relative frequenze di taglio sono indicate con ν_i ($i=0, \dots, 4$). Si può riconoscere che per ogni frequenza assegnata, maggiore della frequenza critica, c'è solo un numero finito di modi che si possono propagare, indicati in figura dai punti sulle rette verticali di equazione $\nu = \text{cost}$ disegnate per due generici valori di ν diversi da ν_i .

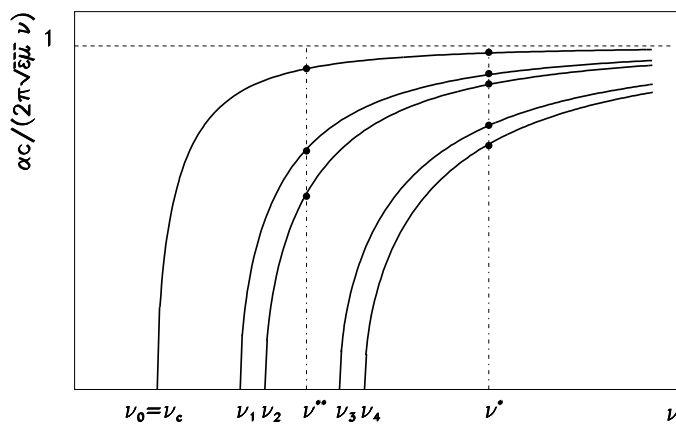


Figura 6.2:

Dalla (6.29), per ν_f reale, si ricava ancora:

$$\nu_f = \frac{kc}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r k^2 - \lambda^2}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\epsilon_r \mu_r k^2}}} > \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (6.32)$$

dalla quale risulta che variando k dal valore $\lambda/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ ad ∞ , la ν_f , sempre decrescendo, varia da $+\infty$ al valore $c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$. Ora $c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ è la velocità di

propagazione in un mezzo dielettrico identico a quello contenuto nel tubo e che riempia tutto lo spazio. Ne segue che la velocità di propagazione delle onde nel tubo è superiore a quella delle onde libere (non guidate) in un dielettrico identico a quello contenuto nel tubo stesso e che riempia tutto lo spazio. In particolare, se il dielettrico nel tubo è il vuoto, allora detta velocità supera la velocità della luce nel vuoto. Questo risultato non contraddice la teoria della relatività poichè si tratta di velocità di propagazione della fase, che è una grandezza geometrica, mentre nella teoria della relatività si intende la velocità di propagazione di un segnale fisico, quindi di una velocità di gruppo.

Fissato un autovalore di λ , ad ogni valore di k corrisponde un valore di α , e quindi un valore della velocità di propagazione di fase v_f dato dalla (6.32). D'altra parte è impossibile realizzare fisicamente un generatore con k esattamente definito, ma sarà più realistico parlare di un intervallo $(k, k+dk)$, in corrispondenza al quale avremo un intervallo di valori di α , $(\alpha, \alpha+d\alpha)$, che si può scrivere anche come $(\alpha, \alpha + \frac{d\alpha}{dk} dk)$. Consideriamo ora la sovrapposizione delle onde appartenenti al piccolo intervallo $(k, k + dk)$. Questo insieme di onde è detto *gruppo di onde*, e la quantità v_g , definita dalla relazione:

$$v_g = c \frac{dk}{d\alpha} \quad (6.33)$$

è detta *velocità di gruppo*. Ora risulta:

$$\frac{dk}{d\alpha} = \frac{\alpha}{\epsilon_r \mu_r k} \quad (6.34)$$

e quindi:

$$v_g = \frac{c\alpha}{\epsilon_r \mu_r k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\epsilon_r \mu_r k^2}} < \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \leq c \quad (6.35)$$

che mostra che la velocità di gruppo è minore della velocità della luce. Si ha inoltre che v_f e v_g sono legate dalla relazione:

$$v_g v_f = \frac{c^2}{\epsilon_r \mu_r} \quad (6.36)$$

6.2 Esempi di propagazione in guide d'onda con contorno definito

6.2.1 Guida d'onda a sezione rettangolare

Il caso più semplice che si può presentare è quello di una guida d'onda a sezione rettangolare i cui lati indichiamo con a e b . Assumeremo uno dei

vertici del rettangolo sezione come origine degli assi, con gli assi x e y diretti rispettivamente secondo i lati di lunghezza a e b , come indicato in figura 6.3. Le equazioni (6.20) e (6.21) sono dello stesso tipo di quella risolta per la pro-

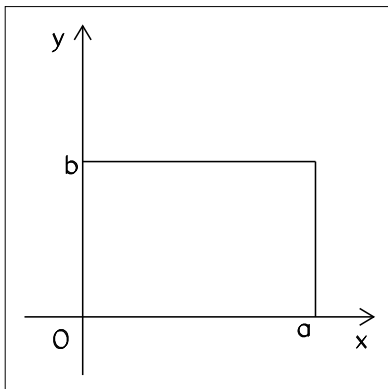


Figura 6.3:

pagazione di onde libere in coordinate cartesiane (vedi paragrafo 4.2.1), anzi più semplici in quanto in due dimensioni (x, y) e con l'unica differenza che abbiamo indicato con λ^2 (anzichè con ω^2/c^2) la costante reale. Procedendo esattamente allo stesso modo col criterio della separazione delle variabili e passando direttamente all'espressione con funzioni trigonometriche, si trova facilmente che, per onde di tipo elettrico ($H_{0z}=0$) la soluzione sarà:

$$E_{0z} = (A \cos px + B \sin px) (C \cos qy + D \sin qy) \quad (6.37)$$

con A, B, C, D costanti per ora arbitrarie e con

$$p^2 + q^2 = \lambda^2 \quad (6.38)$$

Rispetto alle onde libere le cose cambiano ora. Mentre nel caso della (4.13) non c'erano condizioni al contorno da rispettare, e quindi tutti i valori di ω erano permessi, il soddisfacimento della (6.22) sul contorno cambia radicalmente la situazione. Dobbiamo avere:

$$E_{0z} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{per } x = 0 \text{ ed } x = a, y \text{ arbitrario} \\ \text{per } y = 0 \text{ ed } y = b, x \text{ arbitrario} \end{array} \quad (6.39)$$

ne segue che deve essere $A = 0, C = 0$, ed inoltre $pa = m\pi, qb = n\pi$, da cui $p = m\pi/a, q = n\pi/b$, con m, n numeri interi. Si ha dunque:

$$E_{0z} = C_1 \sin \frac{m\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{b}y \quad (6.40)$$

con C_1 costante complessa arbitraria. Ricordando la (6.38) si deducono per λ^2 gli autovalori:

$$\lambda_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (6.41)$$

In figura 6.4 è riportato, in vista tridimensionale, l'insieme degli autovalori λ_{mn}^2 per $m=0, \dots, 10$ e $n=0, \dots, 10$.

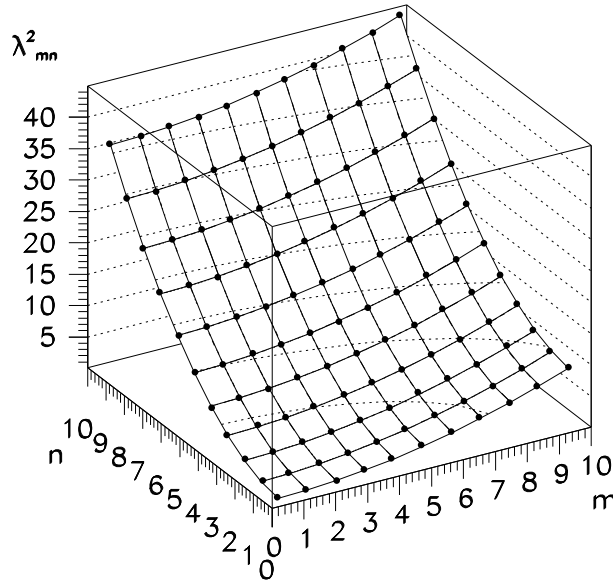


Figura 6.4:

Dalle (6.27) e scrivendo $\lambda^2 C_1'$ al posto di C_1 , abbiamo in conclusione le seguenti soluzioni di tipo elettrico (T.M.):

$$\begin{aligned} E_{0x} &= -iC_1' \alpha_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ E_{0y} &= -iC_1' \alpha_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \\ E_{0z} &= C_1' \lambda_{mn}^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ B_{0x} &= iC_1' \epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \\ B_{0y} &= -iC_1' \epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ B_{0z} &= 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

ove, in virtù della (6.29) è:

$$\alpha_{mn}^2 = \epsilon_r \mu_r k^2 - \lambda_{mn}^2, \quad \alpha_{mn} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r k^2 - \lambda_{mn}^2} \quad (6.43)$$

Dalle prime due delle (6.42) si riconosce che è soddisfatta la condizione al contorno (6.23). In figura 6.5 sono riportate le dipendenze delle tre componenti di \vec{E}_0 da x e y separatamente: le tre curve si riferiscono a $m=1, 2, 3$ e $n=1, 2, 3$ rispettivamente. In figura 6.6 sono riportati i grafici bidimensionali delle tre componenti di \vec{E}_0 per $m=1, n=1$, nell'ipotesi $a=10$ unità e $b=5$ unità.

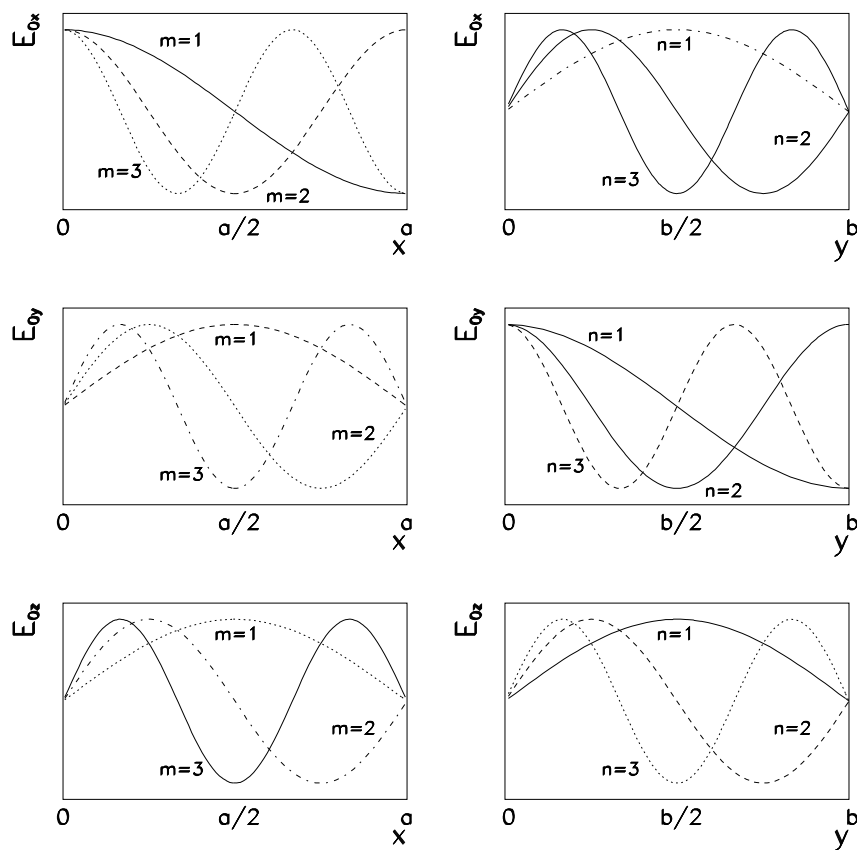


Figura 6.5:

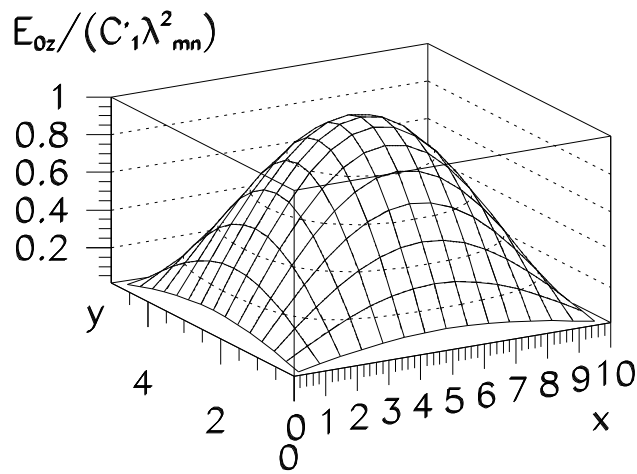
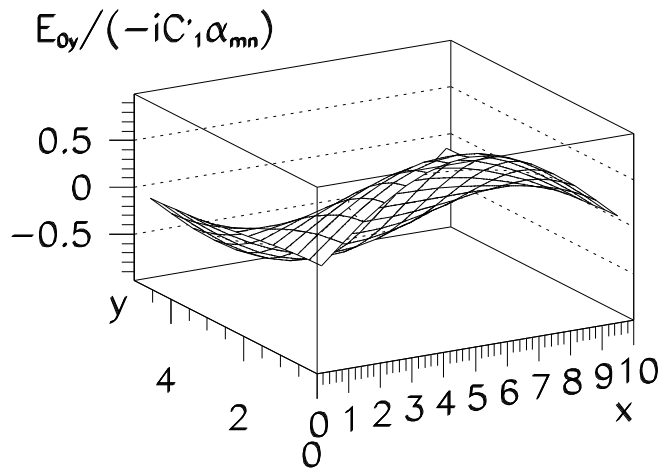
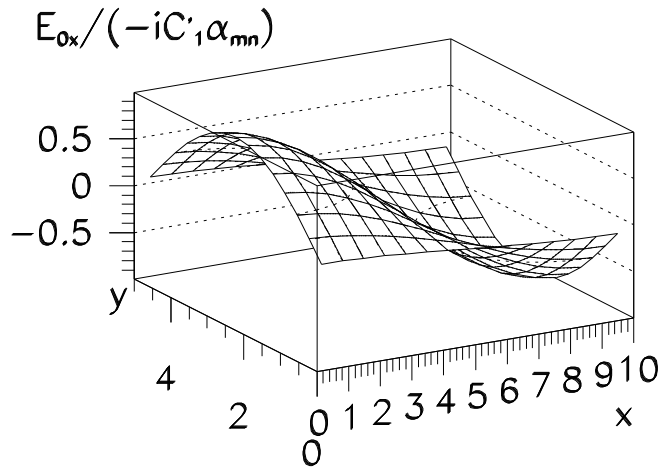


Figura 6.6:

Per avere soluzioni di tipo magnetico (T.E.), dobbiamo porre $E_{0z} = 0$ e possiamo sempre scrivere B_{0z} , in analogia alla (6.37), come:

$$B_{0z} = (A \cos px + B \sin px) (C \cos qy + D \sin qy) \quad (6.44)$$

sempre con la condizione (6.38). La condizione al contorno (6.26) si traduce in:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} &= 0 \quad \text{per } x = 0 \text{ ed } x = a, y \text{ arbitrario} \\ \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} &= 0 \quad \text{per } y = 0 \text{ ed } y = b, x \text{ arbitrario} \end{aligned} \quad (6.45)$$

Sarà quindi $B = 0$, $D = 0$, $p = m\pi/a$, $q = n\pi/b$, e quindi, dalle (6.28) si otterranno le seguenti soluzioni di tipo magnetico:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= iC'_2 kc \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ E_{0y} &= -iC'_2 kc \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \\ E_{0z} &= 0 \\ B_{0x} &= iC'_2 \alpha_{mn} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \\ B_{0y} &= iC'_2 \alpha_{mn} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ B_{0z} &= C'_2 \lambda_{mn}^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \quad (6.46)$$

dove C'_2 è al solito un fattore costante complesso arbitrario, e gli autovalori λ_{mn}^2 di λ^2 sono definiti ancora dalla (6.41) e (6.43).

È ovvio che, tanto per le soluzioni T.E. quanto per le soluzioni T.M., per avere le componenti del campo E.M. dappertutto nella guida occorre moltiplicare ciascuna delle (6.42) e (6.46) per il fattore di propagazione $e^{i(kct - \alpha_{mn}^2 t)}$. Dovendo α_{mn} essere reale, affinché l'onda non sia smorzata, dalla (6.43) si deduce che la guida non può trasmettere tutte le frequenze. Per ogni onda, caratterizzata dalla coppia di numeri interi m e n , vi è dunque un valore minimo di k , compatibile con una propagazione senza smorzamento; questo valore minimo definisce per ogni tipo di onda la frequenza di rottura, al di sotto della quale non vi può più essere propagazione. Supposto $a > b$, la più piccola delle frequenze di rottura, o *frequenza critica* ν_c , corrisponde al valore:

$$k_{min} = \frac{\lambda_{10}}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{\pi}{a \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (m = 1, \quad n = 0) \quad (6.47)$$

per cui, ricordando che $\nu = \frac{kc}{2\pi}$,

$$\nu_c = \frac{c}{2a \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (6.48)$$

Esaminando le (6.42) e (6.46), si vede che per ν di poco superiore a ν_c , avremo onde di tipo (6.44), cioè T.E., non di tipo T.M., che sono identicamente eguali a zero. Cioè le onde di frequenza di poco superiore a quella critica che si propagano nel tubo sono di tipo T.E.. Affinchè nel tubo a sezione rettangolare si propagano anche onde di tipo T.M. è necessario che k superi il minimo autovalore corrispondente alla (6.20) con valori dei campi non identicamente nulli, e cioè:

$$k \geq \frac{\lambda_{11}}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad (6.49)$$

e quindi

$$\nu \geq \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad (6.50)$$

Si osserva infine che, assegnato un valore di k maggiore del valore minimo (6.47), si possono propagare nel tubo un numero finito di onde di tipo elettrico e di tipo magnetico e precisamente tutte le onde corrispondenti agli autovalori λ_{mn} di λ per cui è verificata la (6.30).

6.2.2 Guida d'onda a sezione circolare

Consideriamo ora una guida d'onda costituita da un cilindro circolare di raggio a e, assumendo come asse z l'asse del cilindro, riferiamo i campi \vec{E} e \vec{B} interni ad esso ad un sistema di coordinate cilindriche r, φ, z , come indicato in figura 6.7. Come nel caso precedente, assumeremo che i campi

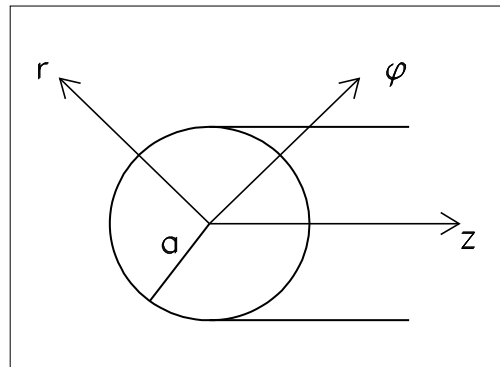


Figura 6.7:

\vec{E} e \vec{B} dipendano dal tempo t e dalla coordinata z per mezzo del termine di

propagazione $e^{i(kct-\alpha z)}$. Nel piano (r, φ) esprimeremo invece i campi mediante le componenti $E_r, E_\varphi, B_r, B_\varphi$. Le (6.12) e (6.13) saranno quindi riscritte come:

$$\vec{E}(r, \varphi, z, t) = [E_{0r}(r, \varphi)\vec{i}_r + E_{0\varphi}(r, \varphi)\vec{i}_\varphi + E_{0z}(r, \varphi)\vec{k}] e^{i(kct - \alpha z)} \quad (6.51)$$

$$\vec{B}(r, \varphi, z, t) = [B_{0r}(r, \varphi)\vec{i}_r + B_{0\varphi}(r, \varphi)\vec{i}_\varphi + B_{0z}(r, \varphi)\vec{k}] e^{i(kct - \alpha z)} \quad (6.52)$$

Con un po' di facile ginnastica matematica si ottengono le equazioni:

$$\begin{aligned} E_{0r} &= -\frac{i}{\lambda^2} \left[\alpha \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} + kc \frac{1}{r} \frac{\partial B_{0z}}{\partial \varphi} \right] \\ E_{0\varphi} &= -\frac{i}{\lambda^2} \left[\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial E_{0z}}{\partial \varphi} - kc \frac{\partial B_{0z}}{\partial r} \right] \\ B_{0r} &= \frac{i}{\lambda^2} \left[\epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial E_{0z}}{\partial \varphi} - \alpha \frac{\partial B_{0z}}{\partial r} \right] \\ B_{0\varphi} &= -\frac{i}{\lambda^2} \left[\epsilon_r \mu_r \frac{k}{c} \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} + \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial B_{0z}}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (6.53)$$

analoghe alle (6.18) e in cui è sempre $\lambda^2 = \epsilon_r \mu_r k^2 - \alpha^2$. Si ricavano ancora, ricordando l'espressione del laplaciano trasverso (cioè nelle coordinate x e y) in coordinate polari $\nabla^2 f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 = \partial^2 f / \partial r^2 + 1/r \partial f / \partial r + 1/r^2 \partial^2 f / \partial \varphi^2$, le equazioni:

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 E_{0z} = 0 \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{0z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 B_{0z} = 0 \quad (6.55)$$

analoghe alle (6.20) e (6.21). Le condizioni al contorno che vanno associate rispettivamente alle (6.54) e (6.55) sono:

$$E_{0z} = 0 \quad \text{per } r = a \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial r} = 0 \quad \text{per } r = a \quad (6.57)$$

Potremo considerare onde di tipo magnetico ($E_{0z} = 0$) o di tipo elettrico ($B_{0z} = 0$) ponendo eguale a zero i primi o rispettivamente i secondi membri nelle parentesi delle (6.53). Le equazioni (6.54) e (6.55) erano state già trovate (con la complicazione di un termine aggiuntivo con $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$) nel paragrafo 4.2.2 relativo alla propagazione di onde libere a simmetria cilindrica e si era già

visto il metodo della separazione delle variabili per ottenere due integrali particolari e quindi l'integrale generale dalla combinazione lineare dei due integrali particolari. Più precisamente, esprimendo E_{0z} o B_{0z} come prodotti delle due funzioni $R(r)$ e $\Phi(\varphi)$, le (6.54) e (6.55) vengono soddisfatte dalle equazioni:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (6.58)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0 \quad (6.59)$$

con n numero intero. Si era già visto che la (6.58) è l'equazione differenziale di Bessel di ordine n , di argomento λr , che ammette come soluzioni la funzione di Bessel $J_n(\lambda r)$ e la funzione di Neumann $N_n(\lambda r)$ (cfr. Appendice F). Avevamo già visto che $N_n(\lambda r)$ non è regolare per $r = 0$, che è per altro una coordinata possibile per la propagazione nella guida (l'asse del cilindro). Le soluzioni accettabili per le (6.54) e (6.55) saranno quindi del tipo $J_n(\lambda r) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$ con A_n e B_n costanti arbitrarie. Consideriamo onde di tipo elettrico:

$$E_{0z} = J_n(\lambda r) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (6.60)$$

con la condizione al contorno (6.56). Essa richiede che:

$$J_n(\lambda a) = 0 \quad (6.61)$$

e se indichiamo con $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \xi_{n3}, \dots, \xi_{nj}$, gli zeri positivi (non nulli) della funzione $J_n(\lambda r)$ (cfr. la figura F.1), disposti in ordine crescente, la condizione (6.61) è soddisfatta ponendo:

$$\lambda = \lambda_{nj}^{(e)} = \frac{\xi_{nj}}{a} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.62)$$

che fornisce gli autovalori $\lambda_{nj}^{(e)}$ del parametro λ per le onde di tipo elettrico. Ponendo $\alpha_{nj}^{(e)} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r k^2 - \lambda_{nj}^{(e)2}}$ e tenendo conto delle (6.53) in cui sia stato posto $B_{0z} = 0$, si ottengono le relazioni esplicite di E_{0r} , $E_{0\varphi}$, B_{0r} , $B_{0\varphi}$, di cui si omette di riportare le espressioni complete per brevità. In figura 6.8 è riportato l'andamento della componente radiale e di quella angolare di E_{0z} , nonchè il grafico bidimensionale di E_{0z} nel caso in cui si considera $J_1(\lambda r)$ con $\lambda = \xi_{11}/a$, con una dimensione radiale a pari a 10 unità.

Nel caso di onde di tipo magnetico avremo:

$$B_{0z} = J_n(\lambda r) (A'_n \cos n\varphi + B'_n \sin n\varphi) \quad (6.63)$$

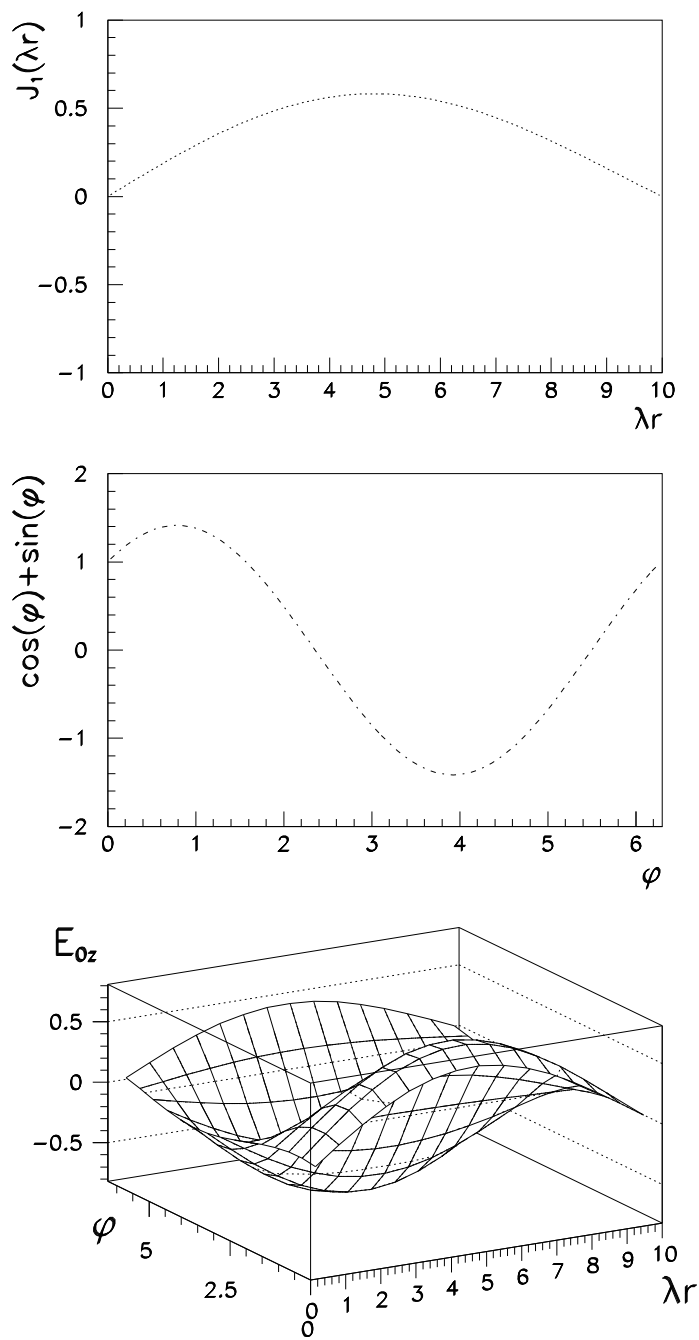


Figura 6.8:

con la condizione al contorno (6.57), la quale richiede che sia:

$$J'_n(\lambda a) = 0 \quad (6.64)$$

Se indichiamo ora con $\eta_{n1}, \eta_{n2}, \eta_{n3}, \dots, \eta_{nj}, \dots$ gli zeri positivi non nulli, disposti in ordine crescente, della $J'_n(\lambda r)$ (cfr. la figura F.2), gli autovalori di λ , per le onde di tipo magnetico, saranno

$$\lambda = \lambda_{nj}^{(m)} = \frac{\eta_{nj}}{a} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.65)$$

con i corrispondenti valori $\alpha_{nj}^{(m)} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r k^2 - \lambda_{nj}^{(m)2}}$. Sostituendo tali espressioni nella (6.53) in cui sia stato posto $E_{0z} = 0$, si ottengono le espressioni esplicite di $E_{0r}, E_{0\varphi}, B_{0r}, B_{0\varphi}$, non riportate esplicitamente per brevità.

Tanto nel caso di onde T.M. che T.E. esiste dunque una successione doppiamente infinita di autovalori del parametro λ , ciascuno caratterizzato da due numeri interi, per i quali si ha propagazione lungo la guida. Per le onde T.M. il più piccolo autovalore di λ è $\lambda_{01}^e = \frac{\xi_{01}}{a} \simeq \frac{2.4}{a}$ e quindi

$$\nu_{min}^{(e)} = \frac{1.2 c}{\pi a \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (6.66)$$

Per le onde T.E., se indichiamo con η_0 il più piccolo degli zeri η_{nj} della (6.64), si ha:

$$\nu_{min}^{(m)} = \frac{\eta_0 c}{2\pi a \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (6.67)$$

Ma qui, contrariamente a quello che avviene per gli zeri ξ_{nj} delle $J_n(\lambda r)$, il più piccolo degli zeri delle $J'_n(\lambda r)$ non è η_{01} bensì η_{11} , come si può dimostrare da alcune relazioni di ricorrenza delle $J'_n(\lambda r)$ e $J_n(\lambda r)$ (cfr. la figura F.2). Ne segue che mentre per le onde T.M., quella di più bassa frequenza che si può propagare nel tubo è la $T.M._{01}$, per le onde T.E. sarà la $T.E._{11}$, e la prima a propagarsi sarà la $T.E._{11}$, diversamente dal caso della guida a sezione rettangolare.

6.3 Cavo coassiale

Col nome di cavo coassiale si intende un tubo limitato da due cilindri metallici circolari e coassiali che serve a guidare un'onda E.M. che si propaga nello spazio anulare tra i due cilindri.

Indicheremo con a il raggio del cilindro esterno, con b il raggio di quello interno e riferiremo al solito i campi interni alla guida a coordinate cilindriche r, φ, z , con z asse della guida.

Analogamente al caso precedente, il problema si riduce ancora a determinare la soluzione delle (6.58) e (6.59) con le rispettive condizioni al contorno:

$$E_{0z} = 0 \quad \text{per } r = a, \quad r = b \quad (6.68)$$

e

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial r} = 0 \quad \text{per } r = a, \quad r = b \quad (6.69)$$

Ma qui l'asse z non è più compreso nel dominio di propagazione dell'onda e quindi non è più necessario imporre la condizione che la funzione $R(r)$ definita dall'equazione differenziale (6.58) sia regolare per $r = 0$, ma solamente per $b \leq r \leq a$. In questo caso le soluzioni sono le funzioni di Bessel $J_n(\lambda r)$ e di Neumann $N_n(\lambda r)$ di ordine n . Possiamo perciò prendere come soluzione della (6.58) una combinazione lineare a coefficienti costanti delle suddette funzioni, ponendo:

$$R(\lambda r) = C J_n(\lambda r) + D N_n(\lambda r) \quad (6.70)$$

Per le onde di tipo T.M. avremo allora:

$$E_{0z} = [C J_n(\lambda r) + D N_n(\lambda r)] (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (6.71)$$

con la condizione (6.68). Ne segue che deve essere:

$$\begin{aligned} C J_n(\lambda a) + D N_n(\lambda a) &= 0 \\ C J_n(\lambda b) + D N_n(\lambda b) &= 0 \end{aligned} \quad (6.72)$$

Queste equazioni, lineari omogenee in C e D , sono compatibili soltanto quando il loro determinante è nullo, cioè:

$$J_n(\lambda a) N_n(\lambda b) - J_n(\lambda b) N_n(\lambda a) = 0 \quad (6.73)$$

I valori accettabili per λ , cioè gli autovalori di λ , sono le radici dell'equazione trascendente (6.73), che disposte in ordine crescente indicheremo con β_{n1} , β_{n2} , β_{n3} , ..., β_{nj} . Avremo allora:

$$\frac{C}{D} = - \frac{N_n(\beta_{nj} a)}{J_n(\beta_{nj} a)} = - \frac{N_n(\beta_{nj} b)}{J_n(\beta_{nj} b)} \quad (6.74)$$

e potremo assumere:

$$E_{0z} = \beta_{nj}^2 [N_n(\beta_{nj} a) J_n(\beta_{nj} r) - J_n(\beta_{nj} a) N_n(\beta_{nj} r)] (A_{nj} \cos n\varphi + B_{nj} \sin n\varphi) \quad (6.75)$$

con A_{nj} , B_{nj} costanti arbitrarie. Sostituendo nelle (6.53), in cui si sia posto $B_{0z} = 0$, si ottengono le altre componenti di \vec{E}_0 e \vec{B}_0 .

Per le onde di tipo T.E. avremo analogamente:

$$B_{0z} = [C' J_n(\lambda r) + D' N_n(\lambda r)] \\ (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (6.76)$$

con la condizione al contorno (6.69).

Sarà pertanto:

$$C' J'_n(\lambda a) + D' N'_n(\lambda a) = 0 \\ C' J'_n(\lambda b) + D' N'_n(\lambda b) = 0 \quad (6.77)$$

da cui segue

$$J'_n(\lambda a) N'_n(\lambda b) - J'_n(\lambda b) N'_n(\lambda a) = 0 \quad (6.78)$$

che è l'equazione trascendente che determina gli autovalori del parametro λ , che, disposti in ordine crescente, indicheremo con γ_{n1} , γ_{n2} , γ_{n3} , ..., γ_{nj} . Avremo ora:

$$\frac{C'}{D'} = - \frac{N'_n(\gamma_{nj}a)}{J'_n(\gamma_{nj}a)} = - \frac{N'_n(\gamma_{nj}b)}{J'_n(\gamma_{nj}b)} \quad (6.79)$$

e pertanto potremo assumere:

$$B_{0z} = \gamma_{nj}^2 [N'_n(\gamma_{nj}a) J_n(\gamma_{nj}r) - J'_n(\gamma_{nj}a) N_n(\gamma_{nj}r)] \\ (A'_{nj} \cos n\varphi + B'_{nj} \sin n\varphi) \quad (6.80)$$

con A'_{nj} , B'_{nj} costanti arbitrarie. Sostituendo nelle (6.53), in cui si sia posto $E_{0z} = 0$, si ottengono le altre componenti di \vec{E}_0 e \vec{B}_0 .

Concludendo, anche per i cavi coassiali vi è per ogni intero n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) una successione di infiniti autovalori del parametro λ . Inoltre ad ogni valore di n e di j corrisponde un valore minimo di k per il quale la propagazione del tipo di onda considerata è possibile. Si può osservare che, a parità di raggio esterno a , le frequenze critiche corrispondenti ai modi di oscillazione di un cavo coassiale costituiscono un insieme più denso di quello della guida d'onda a sezione circolare e quindi il cavo coassiale è più adatto alla trasmissione di segnali analizzabili in serie di Fourier.

6.4 Attenuazione lungo una guida d'onda reale

Finora abbiamo trattato il problema della propagazione di onde E.M. con interessanti conseguenze, ma con ipotesi non fisiche, in particolare una: che lo spessore del conduttore fosse eguale a zero. Chiediamoci quale sia l'effetto di pareti metalliche di spessore finito, costituite da buoni conduttori metallici (con ρ piccola, ma non nulla). Un'onda E.M. che incida su di una lastra metallica viene assorbita in quanto il campo elettrico mette in movimento gli elettroni di conduzione, liberi di muoversi con relativa facilità. L'onda cede quindi energia al metallo per effetto Joule. L'ampiezza dei campi dell'onda si attenua secondo la solita legge esponenziale, $e^{-z/\delta}$, dove:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \pi \nu \sigma}} \quad (6.81)$$

rappresenta lo spessore di conduttore necessario a ridurre ad $1/e$ l'ampiezza dell'onda incidente e viene detto *profondità di pelle*; esso dipende sia dal metallo, attraverso la conducibilità σ , sia dalla frequenza dell'onda. Nel caso delle guide d'onda E_{0z} si annulla sulla superficie nel caso ideale. In realtà, si può dimostrare che, se σ è grande, la costante di propagazione α conterrà dei piccoli termini addizionali, reali ed immaginari. Indicando, cioè, con α_0 anziché α , la costante di propagazione nel caso della guida ideale trattata in precedenza, sarà:

$$\alpha = \alpha_0 + \zeta_\lambda + i\beta_\lambda \quad (6.82)$$

dove ζ_λ è una correzione ininfluenza e β_λ può essere considerato come la costante di attenuazione della potenza trasmessa nella guida:

$$P(z) = P(0) e^{-2\beta_\lambda z} \quad (6.83)$$

Si può dimostrare che β_λ è data dalla formula:

$$\beta_\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} \frac{1}{\sigma \delta_\lambda} \frac{C}{2\Delta} \frac{(\nu/\nu_\lambda)^{1/2}}{\left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_\lambda^2}\right)} \left[\xi_\lambda + \eta_\lambda (\nu/\nu_\lambda)^2 \right] \quad (6.84)$$

dove ν_λ è la frequenza critica del modo considerato, corrispondente all'autovalore λ , C è la lunghezza del contorno della guida, Δ la sezione della guida, σ la conducibilità e δ_λ la profondità di pelle alla frequenza critica considerata, ξ_λ e η_λ numeri puri dell'ordine di grandezza dell'unità. Si fa notare che η_λ per i modi T.M. è nulla.

Il calcolo dei parametri adimensionali ξ_λ e η_λ nella (6.84) può essere effettuato senza complicazioni di principio. Ad esempio, per la guida rettangolare ed il modo TE_{01} , i valori sono $\xi_{01} = a/(a+b)$ e $\eta_{01} = 2b/(a+b)$.

Il comportamento di β_λ in funzione di ν/ν_λ è rappresentato in figura 6.9. L'attenuazione minima si ha per una frequenza superiore a quella critica.

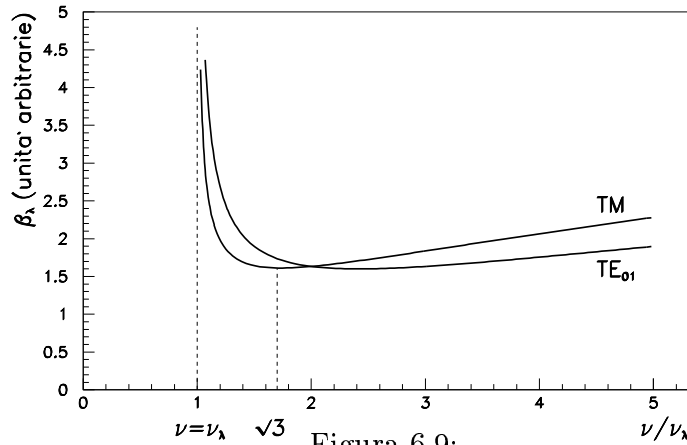


Figura 6.9:

Per i modi T.E. i valori relativi di ξ_λ e η_λ dipendono dal contorno della guida e da λ , e quindi non è possibile fare considerazioni generali sulla frequenza alla quale si ha l'attenuazione minima. Per i modi T.M., invece, il minimo si ha sempre per $\nu_{min} = \sqrt{3} \nu_\lambda$. Ad alte frequenze l'attenuazione varia come $\nu^{1/2}$. Come ordine di grandezza, in una guida con pareti di rame β_λ corrisponde ad una lunghezza di attenuazione dell'ordine di qualche centinaio di metri.

6.5 Cavità risonanti

Affrontiamo ora il problema di studiare la risonanza di onde E.M. nel caso tridimensionale. In altre parole chiediamoci se è possibile immagazzinare l'energia E.M. in un volume delimitato da una superficie chiusa metallica conduttrice. La risposta è affermativa e consideriamo per semplicità il caso ideale già affrontato con le guide d'onda, e cioè spessore dei conduttori nullo e conducibilità infinita. È immediato constatare che anche in questo caso la condizione al contorno affinché non ci sia dissipazione di energia per effetto Joule è che in ogni punto della superficie chiusa sia soddisfatta la condizione (6.14).

Consideriamo una guida d'onda di sezione rettangolare chiusa da due

piani perpendicolari all'asse z , posti nell'origine e ad una distanza d . Per ottenere onde stazionarie anche lungo l'asse z , del tipo:

$$E_z = E_{0z}(x, y) [F \sin rz + G \cos rz] \quad (6.85)$$

con $E_{0z}(x, y)$ dato dalla (6.37), è immediato verificare che r deve essere eguale a $o \pi/d$ con o numero intero e F e G devono essere posti eguali a zero rispettivamente per onde T.M. e onde T.E., per evitare perdite ohmiche sulle pareti metalliche poste in $z = 0$ e $z = d$. Gli autovalori relativi alla soluzione (6.85) saranno dati da:

$$\lambda_{mno}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{o^2}{d^2} \right) \quad (6.86)$$

corrispondenti alle frequenze:

$$\nu_{mno} = \frac{c}{2 \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{o^2}{d^2} \right)^{1/2} \quad (6.87)$$

ed alle autofunzioni per il campo elettrico \vec{E}_0 , nel caso di onde T.M.:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= C_{mno} \lambda_{mno}^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{o\pi}{d} z \\ E_{0y} &= C_{mno} \lambda_{mno}^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{o\pi}{d} z \\ E_{0z} &= C_{mno} \lambda_{mno}^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{o\pi}{d} z \end{aligned} \quad (6.88)$$

Notiamo due aspetti delle soluzioni trovate. Se paragoniamo la (6.87) con la (4.15), notiamo che, mentre le onde libere possono avere qualsiasi valore di ω , quelle risonanti in una scatola chiusa da pareti metalliche possono avere soltanto valori discreti della frequenza, dipendenti dai tre interi m , n , o . Ancora, ricordando la (6.35) si può considerare l'onda stazionaria in una scatola come l'onda propagantesi in una guida con k esattamente uguale a $\lambda_{mn}/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, e quindi $v_g = 0$, con l'ulteriore condizione da avere un nodo per $z = 0$ e $z = d$.

Come per il caso delle guide d'onda, una cavità reale, con spessore finito e condicibilità σ non infinita, non si comporterà come la schematizzazione descritta. L'effetto che ci si può aspettare è che le frequenze di risonanza ν_{mno} definite dalla (6.87) non siano esattamente definite, ma abbiano un certo allargamento, dovuto alla dissipazione dell'energia E.M. per effetto Joule sulle pareti.

Per caratterizzare una cavità risonante si definisce il *fattore di merito* o *fattore Q*, definito come:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\text{energia immagazzinata nell'interno della cavità}}{\text{energia persa per ciclo}} = \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \frac{\text{energia immagazzinata nell'interno della cavità}}{\text{energia persa per secondo}} \end{aligned} \quad (6.89)$$

Dal teorema della conservazione dell'energia, indicata con U , e dalla definizione di Q si ricava che:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega U}{2\pi Q} \quad (6.90)$$

da cui

$$U(t) = U(0) e^{\frac{-\omega t}{2\pi Q}} \quad (6.91)$$

cioè se si immagazzina al tempo $t = 0$ l'energia U_0 nella cavità, essa decade esponenzialmente con una costante inversamente proporzionale a Q . La (6.91) significa che le oscillazioni del campo elettrico nella cavità sono smorzate con la legge:

$$E(t) = E_0 e^{\frac{-\omega t}{4\pi Q}} e^{-i\omega t} \quad (6.92)$$

in cui si è tenuto conto che $U \propto E^2$.

Ricordando la trattazione svolta per il dipolo oscillante smorzato (paragrafo 5.3) si trova in maniera del tutto analoga che la curva di risonanza di una cavità è una Lorentziana del tipo:

$$|E(\omega)|^2 = \text{cost} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0/2Q)^2} \quad (6.93)$$

Il parametro $\omega_0/2Q$ determina, come è noto, la larghezza della Lorentziana, e quindi una cavità sarà tanto più efficace quanto più Q è grande. Per cavità con pareti di rame si arriva a valori di Q di 10^4 . Usando materiali superconduttori ($\sigma \rightarrow \infty$) si può arrivare a valori di Q 2–3 ordini di grandezza superiori.