

Capitolo 8

Fibre ottiche

8.1 Considerazioni generali

Nelle telecomunicazioni il trasferimento di informazione è generalmente eseguito mediante una modulazione di un'onda E.M. che agisce da vettore dell'informazione stessa. La quantità di informazione che può essere trasferita è legata alla cosiddetta *banda passante* che è un intervallo di frequenze $\Delta\nu_0$ centrato attorno alla frequenza ν_0 dell'onda portante. È quindi evidente che, maggiore la frequenza ν_0 , maggiore sarà la quantità di informazione trasmessa, nell'ipotesi di $\Delta\nu_0/\nu_0$ costante. Passando da $\nu_0 \simeq 10^7$ Hz (radioonde) a $\nu_0 \simeq 10^{10}$ Hz (microonde) a $\nu_0 \simeq 10^{14}$ Hz (visibile) si guadagnano 3 o, rispettivamente, 7 ordini di grandezza nella quantità di informazione trasferita.

Da questa considerazione, legata ad altre di carattere economico (reperibilità dei materiali) e di sicurezza, ha avuto origine lo studio e quindi l'utilizzo delle fibre ottiche per trasmettere, con poca attenuazione, segnali a grandi distanze.

La prima trattazione teorica della propagazione della luce in cilindri dielettrici risale al 1910. Soltanto dopo il 1950 le fibre ottiche incominciarono a trovare delle applicazioni pratiche nel campo della trasmissione di immagini lungo fasci flessibili di fibre. La prima proposta di utilizzo delle fibre ottiche nel campo delle comunicazioni ottiche risale al 1966. La ragione di ciò va ricercata nel fatto che l'attenuazione da cui erano afflitte le fibre di vetro fino a quel tempo era superiore alle centinaia di dB/km. Inoltre le sorgenti ed i rivelatori di luce non erano ottimizzati e compatibili (laser e fotodiodi erano agli albori). Nel decennio 1966–1976 si realizzarono i progressi tecnologici decisivi. Fu dimostrato che l'attenuazione dei materiali vettori utilizzati per le fibre ottiche non è una proprietà intrinseca del materiale, ma è dovuta

alla presenza di impurità, soprattutto ioni metallici. Usando tecnologie di purificazione e deposizione di *silice pura*, si ottennero attenuazioni sempre minori (vedi figura 8.1).

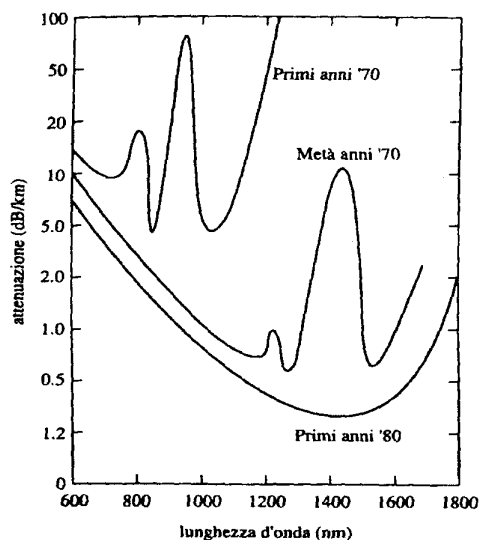


Figura 8.1:

Nel 1976 ricercatori giapponesi riuscirono a fabbricare una fibra con un bassissimo contenuto di ioni OH e attenuazioni minori di 0.47 dB/km, molto vicine alle perdite intrinseche del materiale (diffusione di Rayleigh). La figura 8.2 mostra la curva di attenuazione per una fibra ottica in materiale vetroso. Dalla figura appare chiaro che conviene lavorare nell'intervallo di lunghezze d'onda 800 – 1500 nm, cioè nell'infrarosso, dove la diffusione di Rayleigh (si ricorda che l'attenuazione dovuta a questo fenomeno è proporzionale a ω^4 , cioè a $1/\lambda^4$) è ridotta. Siamo cioè nell'infrarosso e, nel corso degli anni, si è passati successivamente da lunghezze d'onda di lavoro di 850 , 1300 e 1550 nm, denominate rispettivamente *prima*, *seconda* e *terza finestra*. Oggi le comunicazioni avvengono quasi esclusivamente mediante fibre monomodali (vedi in seguito) operanti nella terza finestra (1550 nm).

8.2 Trasmissione di segnali in fibre ottiche

Premettiamo che il fenomeno fisico utilizzato per trasmettere segnali ottici a grandi distanze è quello della *riflessione totale*. È ben noto che un raggio luminoso, incidendo sull'interfaccia tra due mezzi con indici di rifrazione n_1 e n_2 , con $n_1 > n_2$ e provenendo dal mezzo n_1 , subisce riflessione totale, senza rifrazione, se l'angolo di incidenza i con la normale alla superficie di

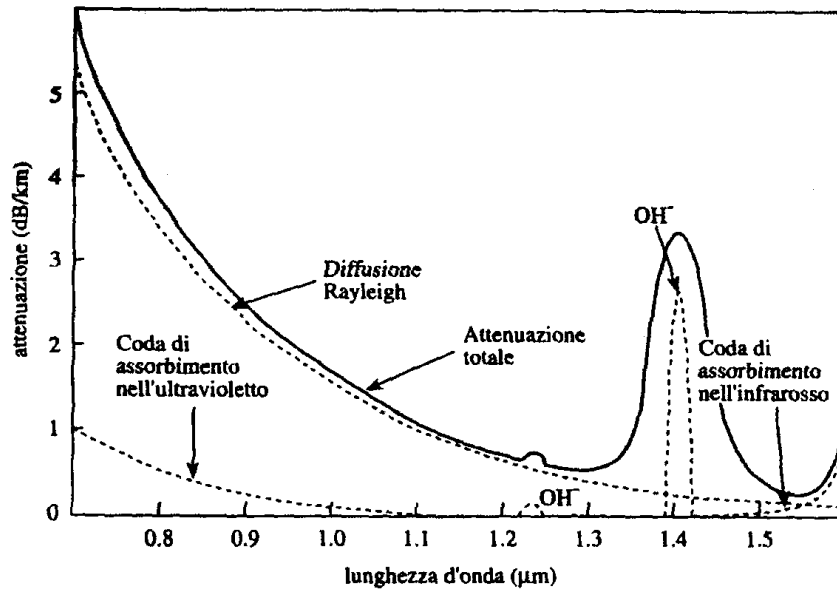


Figura 8.2:

separazione tra i due mezzi è maggiore o eguale al cosiddetto *angolo limite* θ_L , definito dalla relazione:

$$\sin \theta_L = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.1)$$

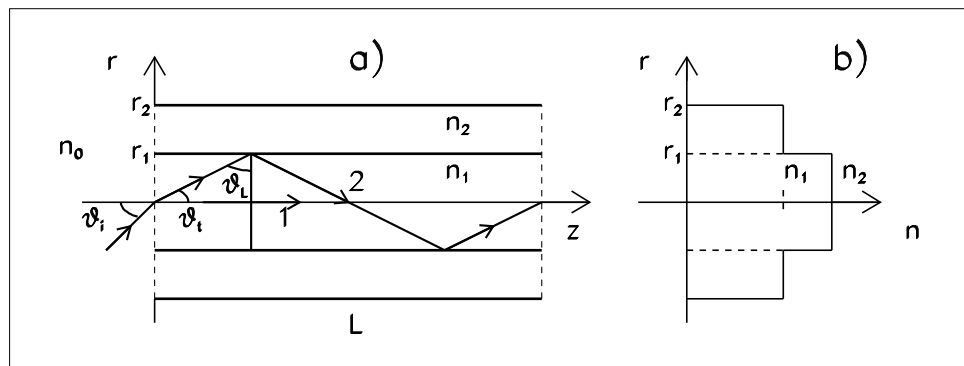


Figura 8.3:

Consideriamo il sistema rappresentato in figura 8.3, costituito da un cilindro di materiale vetroso di raggio r_1 e indice di rifrazione n_1 , detto *nociolo*, contornato da un cilindro cavo, sempre di materiale vetroso, di raggio

interno r_1 , raggio esterno r_2 ed indice di rifrazione n_2 , con $n_1 > n_2$, chiamato *mantello*. Il mantello è racchiuso da una guaina opaca di materiale plastico.

Premettiamo anzitutto che esistono tre tipi di configurazione in cui la luce può trasmettersi per riflessione totale e che sono dette:

- a) le *guide di luce*, con r_1 dell'ordine del cm , costituite solo dal mantello, solitamente di materiale plastico;
- b) le *fibre multimodali*, con r_1 dell'ordine di $30 \mu m$ e r_2 dell'ordine di $60 \mu m$;
- c) le *fibre monomodali*, con r_1 dell'ordine di $5 \mu m$ e r_2 dell'ordine di $60 \mu m$.

Le guide di luce sono usate per trasmettere a distanze dell'ordine di $1-5 m$ i segnali luminosi prodotti dal passaggio di particelle ionizzanti in opportuni materiali (gli scintillatori) a rivelatori optoelettronici (fotomoltiplicatori, fotodiodi). Le fibre multimodali sono usate per trasmettere immagini lungo cammini incurvati, sempre dell'ordine di $1-5 m$. Le fibre monomodali sono usate per trasmettere segnali nell'infrarosso per telecomunicazioni fino a distanze di $100 km$, senza amplificazione. Per trasmettere a lunghe distanze (intercontinentali) è necessario, ogni $100 km$ circa, introdurre un amplificatore ottico (una *fibra attiva*, che funziona secondo i principi del *laser* e che non viene qui descritta).

Vediamo che cosa c'è di comune tra questi tre sistemi e dove differiscono. Riferendoci sempre alla figura 8.3, che rappresenta il caso più semplice di una fibra a *step index* (salto di indice di rifrazione, rappresentato graficamente a destra nella figura), vediamo le semplici considerazioni che si possono trarre nelle ipotesi di validità dell'ottica geometrica. Consideriamo per semplicità raggi luminosi meridiani, che si propagano, cioè sul piano contenente l'asse z della fibra. Le considerazioni possono essere ripetute anche per raggi sghembi, in cui le traiettorie sono molto più complesse, ma le conclusioni non molto diverse.

Il raggio luminoso indicato in figura viene immesso nel nocciolo della fibra attraverso la superficie di separazione aria (indice di rifrazione n_0)–vetro (indice di rifrazione n_1) e verrà rifratto secondo la ben nota *legge di Snellius Cartesio*:

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_t \quad (8.2)$$

avendo indicato come al solito con θ_t l'angolo formato dal raggio rifratto con la normale alla superficie nel punto di incidenza. Il raggio prosegue fino all'interfaccia con il mantello, dove subisce riflessione totale se l'angolo θ_L è

\geq al valore dell'angolo limite (8.1). Si ricava quindi immediatamente dalle (8.1) e (8.2) che l'angolo θ_i massimo per cui i raggi luminosi si propagano nella fibra per riflessione totale, ponendo $n_0 = 1$ per semplicità, è dato da:

$$\begin{aligned}\theta_i &= \arcsin(n_1 \sin \theta_t) = \arcsin \left[n_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_L \right) \right] = \\ &= \arcsin(n_1 \cos \theta_L) = \arcsin \left(n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_L} \right) = \\ &= \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\end{aligned}\quad (8.3)$$

La quantità $\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ viene comunemente definita *apertura numerica (N.A.)* della fibra e il suo arcoseno rappresenta l'angolo di apertura del cono entro cui i raggi incidenti vengono trasmessi per riflessione totale.

Se questa fosse l'unica considerazione riguardante la trasmissione totale, è evidente che converrebbe operare con N.A. il più grande possibile, riducendo il sistema al solo nocciolo, con anche $n_2 \simeq 1$ (aria). È quanto avviene per le guide di luce. In realtà un'altra considerazione, riguardante i tempi di arrivo dei segnali luminosi, dimostra che converrebbe lavorare con N.A. $\rightarrow 0$. Questa circostanza si può verificare supponendo di immettere ad un certo istante t_0 un certo numero di fotoni in $z = 0$ e valutando la dispersione dei tempi di arrivo dopo aver percorso una lunghezza L di fibra rettilinea. Il cammino percorso dai fotoni che si muovono lungo l'asse è il minore, quello dei fotoni che vengono riflessi secondo θ_L il maggiore. Indicando con l_1 e l_2 questi cammini (distanze percorse dai raggi luminosi) si ha:

$$l_1 = L; \quad l_2 = \frac{L}{\sin \theta_L}; \quad l_2 - l_1 = \Delta L = L \left(\frac{1}{\sin \theta_L} - 1 \right) \quad (8.4)$$

Ricordando che la velocità di propagazione nel nocciolo è $v = c/n_1$, la differenza di tempo tra il fotone che ha percorso il cammino 1 e quello che ha percorso il cammino 2 è:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta L}{v} = \frac{Ln_1}{c} \left(\frac{1}{\sin \theta_L} - 1 \right) = \\ &= \frac{Ln_1}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) = \frac{Ln_1}{cn_2} (n_1 - n_2)\end{aligned}\quad (8.5)$$

Come vedremo, nelle fibre ottiche per telecomunicazioni è $n_1 \simeq n_2$ e quindi si può approssimare:

$$(N.A.)^2 = (n_1^2 - n_2^2) = (n_1 + n_2)(n_1 - n_2) \simeq 2n_1(n_1 - n_2) \quad (8.6)$$

da cui, sostituendo nella (8.5), si ha:

$$\Delta t = \frac{L(N.A.)^2}{2cn_2} \quad (8.7)$$

Il tempo Δt , chiamato di solito *dispersione modale*, aumenta con il quadrato di (N.A.). Per ottenere una piccola dispersione modale è necessario ricorrere, a differenze $(n_1 - n_2)$ molto piccole, dell'ordine di (1-2)% di n_1 ed utilizzare altri artifici (fibre ad indice graduato, trasmissione monomodale) per ottenere il risultato cercato. Prima di discutere questi ulteriori aspetti è però necessario ricordare alcune proprietà importanti della propagazione della luce in un dielettrico trasparente.

8.3 L'approssimazione dell'iconale

Le leggi dell'ottica geometrica sono valide nell'ipotesi che le dimensioni spaziali degli oggetti che la luce incontra siano molto maggiori della sua lunghezza d'onda λ . Quando, invece, esse sono dell'ordine di grandezza di λ , i fenomeni che si osservano (diffrazione, interferenza) possono essere spiegati soltanto con l'equazione della propagazione ondosa. Verifichiamo che dalle equazioni delle onde è possibile ricavare le leggi dell'ottica geometrica.

Nel Capitolo 4 era stato dimostrato che una qualsiasi delle componenti di \vec{E} e \vec{B} , indicata per semplicità con f , e per una frequenza determinata ω , soluzione della (4.3), era esprimibile dalla (4.20), che qui riscriviamo come:

$$f = f_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} = \psi e^{-i\omega t} \quad (8.8)$$

ψ soddisfa l'equazione per la parte spaziale (4.12).

Supponiamo ora che la propagazione avvenga in un mezzo materiale isotropo non dispersivo di indice di rifrazione costante $n = c/v$. È immediato verificare che l'equazione di propagazione è sempre la (4.3), in cui però al posto di $1/c^2$ si ha $1/v^2 = n^2/c^2$. La (4.12) diventa allora:

$$\nabla^2 \psi_1 + \omega^2 \frac{n^2}{c^2} \psi_1 = 0 \quad (8.9)$$

Se $n = cost$, la soluzione sarà simile alla (8.8), ma con $k_1 = k_0 n$ al posto di k_0

$$\psi_1 = f_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \quad (8.10)$$

Facciamo ora l'ipotesi che n non sia più una costante, ma una funzione del posto, $n(x, y, z)$, la cui variazione sia però molto lenta su distanze paragonabili alla lunghezza d'onda λ dell'onda di frequenza angolare ω . La (8.9) diventa allora:

$$\nabla^2 \psi_1 + \omega^2 \frac{n^2(x, y, z)}{c^2} \psi_1 = 0 \quad (8.11)$$

Si può provare a soddisfare la (8.11) con una funzione del tipo:

$$\psi_1 = f_0 e^{ik_0 S(x,y,z)} \quad (8.12)$$

supponendo per semplicità che sia ancora f_0 costante ed S reale. Osservando che si ha:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = -k_0^2 f_0 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 e^{ik_0 S} + ik_0 f_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} e^{ik_0 S} \quad (8.13)$$

e analogamente per le derivate parziali rispetto a y e z , sostituendo nella (8.11) si deduce:

$$ik_0 f_0 \nabla^2 S e^{ik_0 S} - k_0^2 f_0 (\nabla S)^2 e^{ik_0 S} + k_0^2 n^2 f_0 e^{ik_0 S} = 0 \quad (8.14)$$

Dividendo la (8.14) per $k_0^2 = 4\pi^2/\lambda_0^2$ si ottiene:

$$f_0 e^{ik_0 S} [(\nabla S)^2 - n^2] - \frac{if_0 \lambda_0}{2\pi} e^{ik_0 S} \nabla^2 S = 0 \quad (8.15)$$

Introducendo ora l'ipotesi dell'ottica geometrica, e cioè che sia $\lambda_0 \rightarrow 0$, la (8.15) si riduce a:

$$(\nabla S)^2 = n^2 \quad (8.16)$$

detta anche *equazione dell'iconale*, attribuendo questo nome alla funzione S . Dalla (8.12) appare chiaro il significato fisico dell'iconale. Le superfici $S(x, y, z) = \text{cost}$ rappresentano le superfici di eguale fase, in altre parole i fronti d'onda nel mezzo di indice di rifrazione variabile $n(x, y, z)$. È noto che nelle onde piane, in un mezzo con $n = \text{cost}$, i raggi luminosi sono ortogonali ai fronti d'onda. È intuitivo ammettere che anche nel caso di n variabile il raggio luminoso passante per un punto di un fronte d'onda sia ortogonale ad esso. Indicando con \vec{u}_s il versore ortogonale alla superficie S , si avrà:

$$\nabla S = |\nabla S| \vec{u}_s = n \vec{u}_s \quad (8.17)$$

Moltiplicando scalarmente la (8.17) per \vec{u}_s , ed indicando con s la coordinata curvilinea del raggio passante per $S(x, y, z)$, si ha:

$$\frac{dS}{ds} = n \quad (8.18)$$

di cui si deduce chiaramente il significato fisico. Dati due fronti d'onda vicini, $S = \text{cost}$ e $S + dS = \text{cost}$, la distanza ds tra queste due superfici è in ogni punto inversamente proporzionale a n . Il concetto di iconale permette quindi di estendere anche al caso di n variabile la rappresentazione con raggi luminosi, non più rettilinei. È possibile dimostrare rigorosamente le (8.17) e (8.18) partendo dallo sviluppo in serie da Taylor della funzione iconale nell'intorno di un punto.

8.4 Le formule di Fresnel

Ricaveremo ora le formule di Fresnel, molto importanti per calcolare le potenze trasmesse e riflesse quando un fascio luminoso incide sulla superficie di separazione tra due mezzi materiali dielettrici. Si suppone che la superficie sia liscia ed i mezzi materiali omogenei, isotropi e non dispersivi. La trattazione potrebbe essere quella generale relativa ad un'onda E.M. di frequenza angolare ω qualsiasi. Ci limiteremo al caso ottico per semplificare i calcoli e l'interpretazione dei risultati. Supporremo valide le equazioni di Snellius-Cartesio (che si potrebbero anche ricavare come premessa delle equazioni di Fresnel), che le permeabilità magnetiche relative dei due mezzi siano $= 1$ e che quindi $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}} = c/v_1$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}} = c/v_2$.

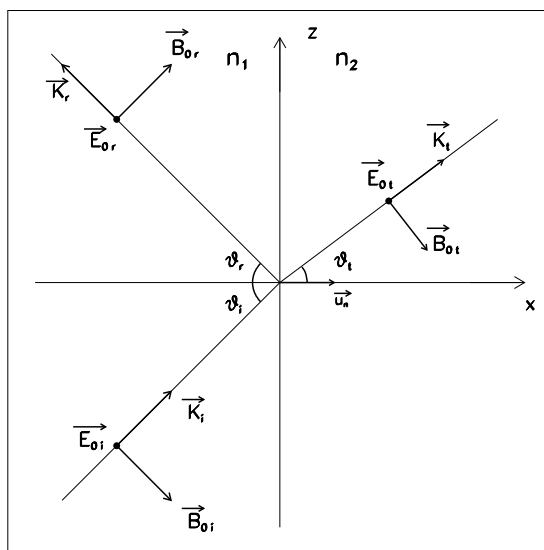


Figura 8.4:

I raggi incidente i , riflesso r e trasmesso (o rifratto) t , saranno rappresentati dalle onde piane:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \quad (8.19)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \quad (8.20)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cos(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}) \quad (8.21)$$

Per le ipotesi fatte e facendo riferimento alla figura 8.4, $\theta_i = \theta_r$, $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$, $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_r| = \omega n_1/c$, $|\vec{k}_t| = \omega n_2/c$ ed i raggi i , r e t stanno nello

stesso piano, contenente anche la normale \vec{u}_n alla superficie di separazione nel punto di incidenza, orientata verso il mezzo 2. Vogliamo ricavare le relazioni tra i valori E_{0i} , E_{0r} e E_{0t} nell'ipotesi che nel punto di incidenza le fasi dell'onda incidente, riflessa e rifratta coincidano. Supponiamo ancora che l'onda incidente sia linearmente polarizzata ($\vec{E}_{0i} = \text{cost}$). Qualunque sia l'orientazione di \vec{E}_{0i} , potremo sempre scomporlo in due vettori, uno parallelo e l'altro ortogonale al piano di incidenza (definito come il piano individuato dalla normale alla superficie di separazione e dalla direzione di incidenza dell'onda), e considerare solo queste due situazioni, senza ledere la generalità della trattazione. È noto che, come conseguenza delle (6.1)–(6.4), all'interfaccia tra i due mezzi 1 e 2 sono continue le componenti di \vec{E} tangenziali e quelle di $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0\mu_r$. Nella semplificazione fatta ($\mu_r = 1$), ciò significa le componenti tangenziali di \vec{B} (da notare bene la differenza rispetto a mezzi con $\mu_r \neq 1$, soprattutto ferromagnetici !!).

Consideriamo separatamente i due casi.

- A) \vec{E}_{0i} perpendicolare al piano di incidenza.

Si ricava immediatamente:

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (8.22)$$

$$-B_{0i} \cos \theta_i + B_{0r} \cos \theta_i = -B_{0t} \cos \theta_t \quad (8.23)$$

ricordando anche che in un mezzo materiale è $B = nE/c$, la (8.23) diviene:

$$\cos \theta_i (E_{0i} - E_{0r})n_1 = n_2 E_{0t} \cos \theta_t \quad (8.24)$$

Dividendo le (8.22) e (8.24) per E_{0i} e ponendo:

$$r_{\perp} = E_{0r}/E_{0i} \quad t_{\perp} = E_{0t}/E_{0i} \quad (8.25)$$

dove r e t rappresentano i coefficienti di riflessione e trasmissione (rifrazione) per le ampiezze, le (8.22) e (8.24) si riducono a:

$$1 + r_{\perp} = t_{\perp} \quad (8.26)$$

$$n_1 (1 - r_{\perp}) \cos \theta_i = n_2 t_{\perp} \cos \theta_t \quad (8.27)$$

che, risolte, forniscono:

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (8.28)$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (8.29)$$

- B) \vec{E}_{0i} parallelo al piano di incidenza.

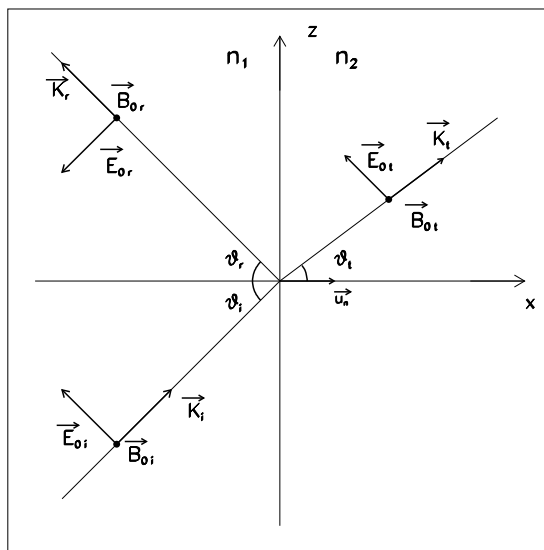


Figura 8.5:

Riferendoci ora alla figura 8.5, si verifica che si deve ora porre:

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_i = E_{0t} \cos \theta_t \quad (8.30)$$

$$B_{0i} + B_{0r} = B_{0t} \quad (8.31)$$

da cui si ricava, in maniera del tutto analoga al caso A):

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (8.32)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (8.33)$$

Le equazioni (8.28), (8.29), (8.32) e (8.33) costituiscono le *formule di Fresnel*, applicabili in maniera generale a tutti i mezzi isotropi, omogenei e non dispersivi. Si fa notare che esse sono applicabili alle specifiche direzioni dei campi ipotizzati in partenza, cioè le fasi (i versi dei vettori) sono state scelte arbitrariamente e le formule di Fresnel calcolate per quella configurazione. Nei casi A e B è stata scelta una orientazione “giusta”; se se ne fosse scelta una sbagliata, sarebbe comparso un valore negativo per r o t , ad indicare che uno dei campi andava ruotato di π .

Le equazioni di Fresnel possono essere ancora scritte eliminando gli indici di rifrazione n_1 e n_2 con la legge di Snellius–Cartesio. Si ottiene, con qualche passaggio:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ r_{\parallel} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\parallel} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Delle (8.34) è particolarmente significativa ed interessante la seconda, che permette di ricavare e definire l'angolo di Brewster. Si vede che se $(\theta_i + \theta_t) = \pi/2$, $r_{\parallel} = 0$, cioè la luce riflessa è totalmente polarizzata in un piano perpendicolare al piano di incidenza. L'angolo di Brewster, tramite la solita legge di Snellius–Cartesio, è dato dalla relazione:

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad (8.35)$$

Le equazioni di Fresnel definiscono i coefficienti di riflessione e trasmissione dei campi, mentre nelle applicazioni si è interessati ai *coefficienti di riflessione di potenza* R (o *riflettanza*) e di *trasmissione di potenza* T (o *trasmittanza*), definiti come:

$$R = \frac{\text{potenza riflessa}}{\text{potenza incidente}} \quad (8.36)$$

$$T = \frac{\text{potenza trasmessa}}{\text{potenza incidente}} \quad (8.37)$$

Per calcolare R e T , riferiamoci alla figura (8.5), ma immaginando di avere anzichè un raggio incidente, un fascio di luce incidente sull'interfaccia

tra i due mezzi, e che definisce su di essa un'area σ . Le sezioni dei fasci incidente e riflesso saranno evidentemente $\sigma \cos \theta_i$ e quella del fascio trasmesso $\sigma \cos \theta_t$. Il vettore di Poynting in un mezzo materiale di indice di rifrazione n e $\mu_r = 1$ è dato dall'espressione:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad |\vec{S}| = \frac{|\vec{E}|^2 n}{c\mu_0} \quad (8.38)$$

ed il valore medio:

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 n}{c\mu_0} \quad (8.39)$$

La potenza media dei fasci incidente, riflesso e trasmesso sarà data dal prodotto di $\langle |\vec{S}| \rangle$ per le rispettive sezioni. Sarà quindi:

$$R = \frac{\langle |\vec{S}| \rangle_r \sigma \cos \theta_i}{\langle |\vec{S}| \rangle_i \sigma \cos \theta_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2 \quad (8.40)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\langle |\vec{S}| \rangle_t \sigma \cos \theta_t}{\langle |\vec{S}| \rangle_i \sigma \cos \theta_i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 \\ &= \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t^2 \end{aligned} \quad (8.41)$$

in cui r e t vanno intesi o con i pedici \parallel e \perp oppure come una media di essi. Si può verificare che $R + T = 1$. La figura 8.6 rappresenta l'andamento di R e T nel caso di \vec{E}_{0i} perpendicolare al piano di incidenza, per due mezzi materiali costituiti dal materiale vetroso del nocciolo e del mantello di una fibra in cui $n_1 = 1.461$, $n_2 = 1.457$, tipici di fibre monomodali. È anche evidente che per $\theta_i > \theta_L$ si ha $R = 1$, $T = 0$ (riflessione totale).

A questo proposito notiamo un aspetto particolare della propagazione per riflessione, che è poi forse il fattore determinante per la trasmissione in fibra ottica. Per $\theta_i = \theta_L$ l'onda trasmessa si propaga parallelamente alla superficie di separazione e non c'è trasporto di energia attraverso la superficie stessa. Che cosa succede per $\theta_i > \theta_L$? Dalla formula di Snellius–Cartesio appare chiaro che diventa $\sin \theta_t > 1$, e cioè che θ_t è un angolo complesso con un coseno immaginario. Tralasciando i calcoli che necessiterebbero, tra l'altro, dell'estensione al campo complesso delle funzioni trigonometriche, si verifica che il fattore di propagazione dell'onda rifratta diventa:

$$e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = e^{-k_r' [(\sin \theta_i / \sin \theta_L)^2 - 1]^{1/2} x} e^{-ik_r' (\sin \theta_i / \sin \theta_L) z} \quad (8.42)$$

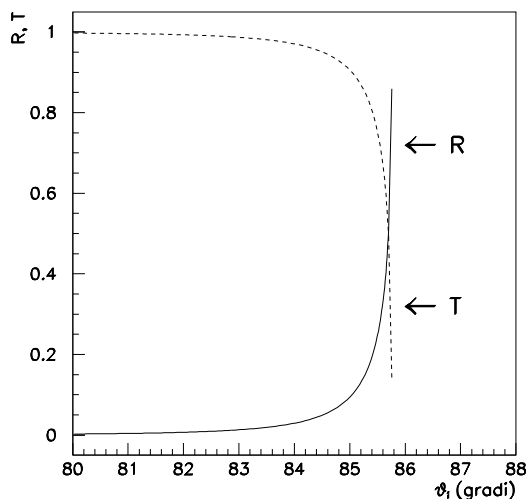


Figura 8.6:

cioè l'onda rifratta si propaga parallelamente alla superficie di separazione tra i due mezzi, con ampiezza che decresce esponenzialmente al crescere di x , distanza dalla superficie stessa nel mezzo 2. Quest'onda viene detta *onda evanescente* e si annulla per distanze dalla superficie di separazione di qualche lunghezza d'onda. È interessante notare che non vi è trasporto di energia attraverso la superficie, nonostante il campo sia non nullo, come si può verificare esaminando il vettore di Poynting, che ha una componente ortogonale alla superficie puramente immaginaria.

8.5 Propagazione modale nelle fibre ottiche

Vediamo ora di capire come avviene la propagazione della luce in una fibra secondo modi discreti in analogia alla guida d'onda. Riferendoci alla figura (8.3) il cammino spezzato 2, secondo l'ottica geometrica, può essere pensato come risultante di una propagazione lungo l'asse, caratterizzata da una costante di fase β analoga alla costante α (6.11) introdotta nelle (6.12) e (6.13) ed una configurazione stazionaria lungo la direzione ortogonale che soddisfi le condizioni al contorno.

Con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per la guida d'onda a contorno circolare, si possono esprimere i campi E_{0z} e B_{0z} in coordinate cilindriche e verificare che essi devono soddisfare alle due equazioni (6.54) e (6.55). L'autovalore λ viene di solito indicato con il simbolo β_t , chiamato *costante di fase trasversa*. Le differenze nascono ora. Nel nocciolo si deve ottenere la propagazione di un'onda che trasporti energia e quindi β

deve essere reale; nel mantello si deve ottenere la propagazione di un'onda evanescente e quindi β deve essere immaginario. Nel nocciolo si ha:

$$\beta^2 = k^2 n_1^2 - \beta_t^2 > 0, \text{ cioè } \beta < kn_1, \beta_t \text{ reale} \quad (8.43)$$

Nel mantello si ha invece:

$$\beta^2 = k^2 n_2^2 - \beta_t^2 < 0, \text{ cioè } \beta > kn_2, \beta_t \text{ immaginario} \quad (8.44)$$

Cioè sarà

$$kn_2 < \beta < kn_1 \quad (8.45)$$

Si era già visto che la soluzione delle (6.54) e (6.55) con il metodo della separazione delle variabili porta a scrivere E_{0z} e B_{0z} come il prodotto di una combinazione lineare di funzioni di Bessel di argomento $(\beta_t r)$. Nel caso di β_t reale, cioè nel nocciolo, poichè la propagazione può avvenire lungo l'asse z ($r = 0$), si può accettare come soluzione sola la $J_n(\beta_t r)$, che è regolare. Nel caso di β_t immaginario, cioè nel mantello, bisogna ricorrere alle funzioni modificate di Bessel I e di Neumann K , rappresentate in figura F.4 per due valori di n .

Appare chiaro che solo le funzioni di Neumann modificate possono rappresentare un'onda evanescente, di ampiezza decrescente. La funzione che rappresenta i campi nel piano trasverso, che si propagano, dovrà essere regolare e quindi bisognerà imporre l'eguaglianza della funzione di Bessel di ordine n ed argomento $(\beta_t r)$ e della funzione di Neumann modificata, sempre di ordine n e argomento $(\beta_t r)$, per $r = r_1$, nonchè delle loro derivate prime rispetto a r . Si otterranno così due insiemi discreti di valori di n e di $(\beta_t r_1)$, radici di un sistema di equazioni trascendenti che non vengono riportate, che permetteranno di caratterizzare i modi di propagazione secondo la solita classificazione ($TE_{n,j}$, $TM_{n,j}$).

A questo punto cerchiamo di capire intuitivamente il funzionamento di una fibra multimodale e quello di una monomodale e perchè la seconda sia usata per le trasmissioni a distanza. Il raggio del nocciolo di una fibra multimodale è circa $30 \mu m$, e quindi procederanno per riflessione totale un intervallo notevole di raggi meridiani, in dipendenza della N.A.. Ciò corrisponde di fatto ai "molti modi" trasmessi, ma non è particolarmente utile perchè la dispersione modale diventa troppo elevata, almeno per fibre a salto d'indice. È possibile ovviare a questo inconveniente abbandonando l'ipotesi di n_1 costante nel nocciolo, ma ipotizzando una variazione di n_1 con r tale da compensare la dispersione modale. Esempi di graduazione dell'indice di rifrazione sono riportati in figura 8.7.

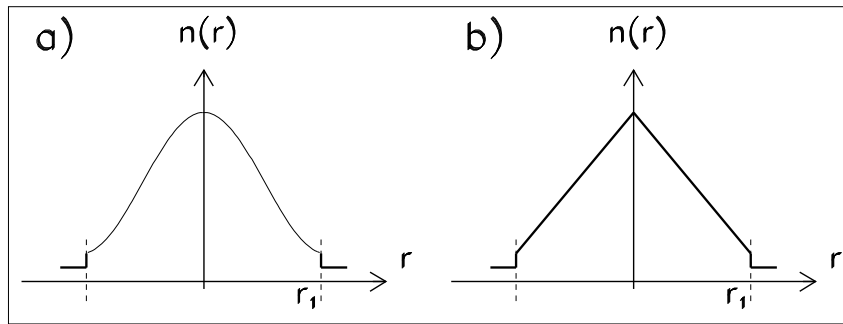


Figura 8.7:

Da notare che si tende a lasciare sempre una piccola discontinuità in corrispondenza all'interfaccia nocciolo–mantello, per avere comunque una trasmissione per modi. Ricordando l'approssimazione dell'iconale, è possibile immaginare che i raggi luminosi percorrano traiettorie come quelle indicate in figura 8.8. Più i raggi si allontanano dall'asse della fibra e più aumenta

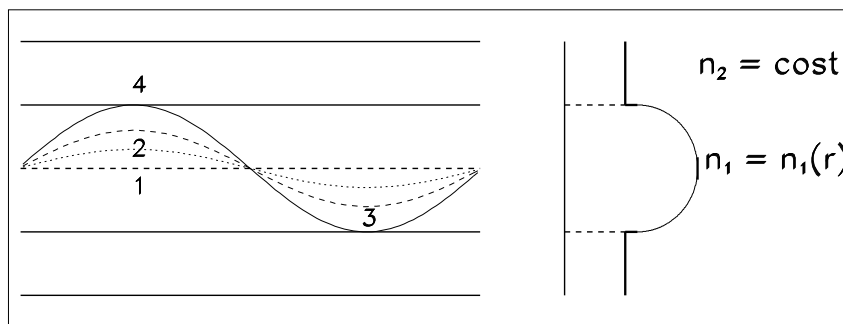


Figura 8.8:

la loro velocità, in quanto si trovano in zone in cui n_1 è localmente minore. Sarebbe possibile, utilizzando l'equazione dell'iconale, trovare una forma di $n(r)$ per cui tutti i raggi impiegano lo stesso tempo e quindi la dispersione modale è nulla. Si fa notare che, in questa ipotesi, più che di una trasmissione risonante, sarebbe il caso di parlare di una *lente continua*. È evidente che la realizzazione di una guida multimodale ad “indice graduato perfetto” è impossibile, e anche una graduazione semplice, come quella lineare rappresentata in figura 8.7 b), e che pure si dimostra molto efficiente (è in grado di diminuire la dispersione modale di 3 ordini di grandezza), comporta costi economici di realizzazione molto elevati. Per questo motivo le fibre multimodali

hanno applicazioni soprattutto per la trasmissione di immagini e di segnali (laser) su piccole distanze lungo cammini curvi (endoscopie, microchirurgia).

Le fibre monomodali, a semplice salto d'indice, sono invece ideali per la trasmissione a lunga distanza, in cui una dispersione modale minima è un requisito fondamentale. Anche il loro costo di fabbricazione è contenuto.