

Capitolo 9

Ottica coerente

9.1 Elementi di Ottica coerente

Si è visto nei capitoli 6, 7 e 8 l'importanza dei fenomeni di risonanza nella produzione, trasmissione ed utilizzazione delle onde E.M.. L'utilizzo di sistemi risonanti ottimizza le prestazioni, rispetto a quanto si otterrebbe con l'uso di sistemi non-risonanti. Ci si può chiedere se l'utilizzo di sistemi risonanti rappresenti quanto di meglio si possa ottenere o se esistano ancora altre peculiarità, non ancora prese in esame, delle onde E.M. che potrebbero ulteriormente ottimizzare la risposta degli strumenti progettati per diversi scopi. La risposta è affermativa e la proprietà che non abbiamo ancora preso in esame è la cosiddetta *coerenza*, cioè l'effetto di un'onda E.M. su diversi sistemi elementari (atomi) con una *fase costante*. In effetti, abbiamo sempre trascurato nelle trattazioni precedenti la fase iniziale, in quanto ininfluenza. Nelle operazioni di media eseguite per valutare gli effetti misurabili (vettore di Poynting, Lorentziana, ...) non resta traccia della fase iniziale. Il risultato più spettacolare ottenuto con l'applicazione simultanea dei fenomeni di risonanza e coerenza è stato ottenuto nella costruzione di generatori di onde E.M. (MASER nel campo delle microonde, LASER nel campo dell'infrarosso, visibile, ultravioletto) che non possono essere descritti in questo Corso in quanto necessitano di elementi di Meccanica Quantistica. Le onde emesse (ci limiteremo al campo del visibile) hanno intensità e soprattutto coerenza di ordini di grandezza superiori a quelli delle normali sorgenti luminose e mentre l'aspetto "intensità" è facilmente spiegabile nelle applicazioni come metodo della forza bruta, l'aspetto *coerenza* è più interessante dal punto di vista fisico.

Tratteremo quindi alcuni problemi in cui l'uso di luce coerente permette di ottenere risultati inaspettati. L'interferenza luminosa, assieme alla

diffrazione, è la manifestazione più caratteristica della natura ondulatoria della luce. Rispetto ad altri fenomeni di propagazione ondosa (tipo il suono), la realizzazione di dispositivi interferenziali ottici è peraltro più complessa, proprio per l'impossibilità di ottenere due sorgenti luminose, monocromatiche, che emettano le onde luminose agganciate in fase. Ciò è legato alla natura stessa delle sorgenti luminose. Un fascio luminoso proveniente da una sorgente monocromatica S è in realtà la sovrapposizione di un numero enorme di treni d'onda elementari, la cui lunghezza ct (o c/nt se in un mezzo materiale) è di circa $3 m$, in relazione al fatto che il tempo in cui viene emesso tale treno d'onde è $10^{-8} s$, il tempo tipico di diseccitazione di un atomo. I processi di emissione di atomi eguali, ma appartenenti a sorgenti diverse, sono scorrelati, e quindi i treni d'onda provenienti dalle due sorgenti sono privi di qualsiasi relazione di fase costante. Le sorgenti sono cioè *incoerenti*. Il trucco per ottenere due sorgenti luminose coerenti è quello di ottenere, tramite opportuni sistemi ottici, due immagini virtuali S_1 e S_2 della stessa sorgente S , che a questo punto diventano coerenti in quanto ogni treno d'onda emesso da S viene diviso in due treni d'onda che, percorrendo cammini ottici diversi, si incontrano in un punto dando luogo a fenomeni interferenziali.

È noto che in un P punto in cui si incontrino due raggi luminosi provenienti da S_1 e S_2 sarà:

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_1) \quad (9.1)$$

$$E_2 = E_{01} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_2) \quad (9.2)$$

dove \vec{r}_1 è la distanza del punto P misurata dalla sorgente S_1 e \vec{r}_2 quella dalla sorgente S_2 . Poichè si sta osservando la sovrapposizione dei due campi in P , $\vec{k} \cdot \vec{r}_1$ e $\vec{k} \cdot \vec{r}_2$ sono due costanti. Per il *principio di sovrapposizione* si avrà che il campo elettrico risultante sarà la somma di (9.1) e (9.2):

$$E = E_{01} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_1) + E_{02} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_2) \quad (9.3)$$

L'intensità del campo nel punto considerato sarà proporzionale al quadrato della (9.3) ed è noto che, a causa del doppio prodotto, l'intensità non sarà costante al variare del punto di intersezione dei raggi considerato, ma, supponendo E_{01} e E_{02} uguali, varierà tra $4I_0 = 4\sqrt{(\epsilon_0/\mu_0)}E_0^2/2$ e 0. Si avrà un massimo quando $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ è uguale ad un multiplo pari di $\lambda/2$, un minimo quando è uguale ad un multiplo dispari di $\lambda/2$. È da notare che, in un dispositivo interferenziale con S sorgente tradizionale, $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ non deve essere maggiore di $3 m$, altrimenti i trenini elementari andrebbero fuori fase. Le caratteristiche degli interferometri più comuni (specchi di Fresnel, fenditure di Young, interferometro di Newton, interferometro di Michelson) sono

compendiate in figura 9.1 ed aiutano anche a capire perchè, a seconda delle diverse sistemazioni, si osservino fenomeni apparentemente diversi (anelli, frange diritte, frange storte).

I massimi e i minimi di interferenza, costruiti attorno alle due sorgenti virtuali S_1 e S_2 , sono iperboloidi di rotazione con i fuochi nelle due sorgenti, e con equazione $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 2k\lambda/2$ per i massimi e $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = (2k + 1)\lambda/2$ per i minimi. La figura 9.1 mostra in maniera pittorica una sezione di tali iperboloidi con un piano che contiene le due sorgenti S_1 e S_2 (le curve continue indicano gli iperboloidi corrispondenti ai massimi di intensità, quelle tratteggiate gli iperboloidi corrispondenti ai minimi); osservandola si può comprendere come, a seconda delle diverse sistemazioni, si osservino fenomeni apparentemente diversi (anelli, frange diritte, frange storte). Un interferometro, infatti, intercetterà, generalmente in un piano, una frazione di queste famiglie di iperboloidi e la figura di interferenza osservata varierà a seconda della posizione di questo piano. Nell'interferometro di Newton il piano di osservazione è ortogonale alla retta S_1S_2 e quindi si osserveranno delle circonferenze; in quello di Young il piano è parallelo alla retta S_1S_2 e quindi si osserveranno degli archetti, approssimabili a segmenti; per gli specchi di Fresnel il piano è sghembo rispetto alla retta S_1S_2 e perciò si osserveranno ancora degli archetti. Il caso più importante è però quello dell'interferometro di Michelson, che verrà descritto in dettaglio nel seguito.

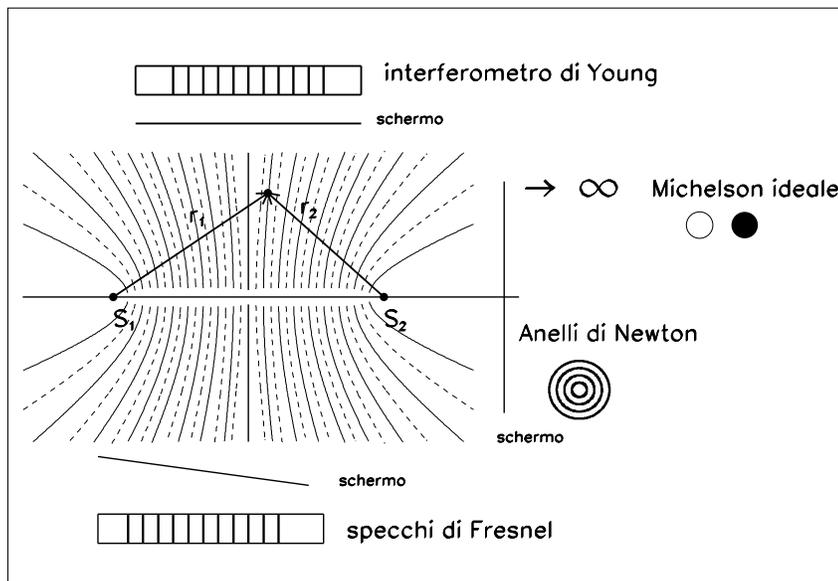


Figura 9.1:

9.2 L'interferometro di Michelson

Di tutti i dispositivi interferenziali escogitati, l'interferometro di Michelson è certamente il più ingegnoso ed utile in molti esperimenti di Fisica fondamentale ed applicata. Il vantaggio principale di questo interferometro è che esso è in grado di misurare spostamenti di oggetti materiali dell'ordine di qualche $10^{-8} m$. Con l'avvento dei laser, in grado di fornire treni d'onda di lunghezza superiore di $10^3 - 10^4$ ordini di grandezza rispetto alle normali sorgenti luminose, l'interferometro di Michelson è diventato uno strumento di routine per misure di precisione in diverse branche delle scienze pure ed applicate. Ideato allo scopo di eseguire una misura fondamentale di Fisica (l'esistenza dell'etere) esso continua ad essere utilizzato per ambiziosi esperimenti di Fisica fondamentale (l'esperimento VIRGO, che dovrebbe rivelare l'esistenza di onde gravitazionali). Descriviamo il principio di funzionamento dello strumento, schematizzato in figura 9.2.

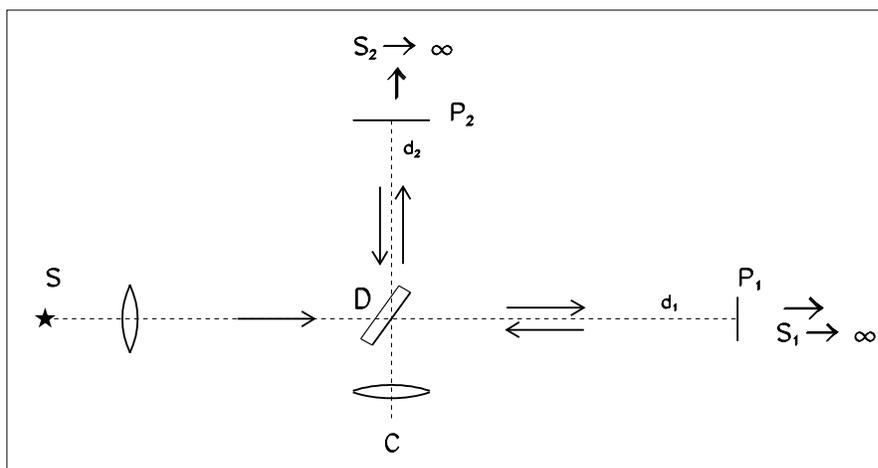


Figura 9.2:

La sorgente luminosa S è posta nel fuoco di una lente, o di un sistema ottico centrato più complesso, che trasforma i raggi luminosi in un fascio parallelo. Il fascio incide su una lastra piana parallela con la superficie posteriore debolmente metallizzata, sì da fungere da specchio semiriflettente, che è chiamato *divisore del fascio*. Il divisore trasforma il fascio incidente in due fasci, di eguale intensità (più o meno!), uno riflesso e l'altro trasmesso, che si propagano in direzioni ortogonali. I due fasci incontrano a distanze d_1 e d_2 dal centro del divisore, due specchi piani ortogonali ai fasci, P_1 e

P_2 , totalmente riflettenti. I fasci riflessi ripercorrono all'indietro i cammini, riattraversano il divisore, questa volta con sorte opposta (il fascio S_1 , che prima era stato trasmesso, ora viene riflesso, e l'opposto accade per il fascio S_2) e, con intensità pari al 25% del fascio iniziale S , si sovrappongono dando luogo a fenomeni di interferenza osservabili col cannocchiale C .

Esaminiamo anzitutto che cosa ci aspettiamo come figure di interferenza. Supponiamo di disporre di un interferometro di Michelson ideale, cioè senza aberrazioni, distorsioni, ecc.. Ricordando la figura 9.1 è facile riconoscere che stiamo osservando all'infinito, l'interferenza di due sorgenti virtuali coerenti poste all'infinito, ad una distanza relativa $d_1 - d_2$. Se $d_1 = d_2$, si dovrebbe osservare interferenza costruttiva all'infinito e quindi un massimo di intensità luminosa. Ad essere pignoli, in questa situazione non si ha lo stesso cammino ottico (il fascio S_1 attraversa la lastra del divisore una volta, il fascio S_2 tre volte) ma la configurazione può essere corretta in modo da eliminare, o per lo meno ridurre il più possibile le differenze tra i due cammini (inserendo una lastra trasparente dello stesso materiale e spessore del divisore lungo il tratto tra il divisore e P_1 , per esempio). In realtà, sperimentalmente, è molto più semplice montare lo specchio P_1 (o P_2) su un dispositivo a viti micrometriche che permette di variare la distanza d_1 . Si osserverà così il passaggio da campo chiaro a campo oscuro per uno spostamento di $\lambda/4$.

In realtà questo metodo non è il più sensibile, perchè l'occhio umano o altro strumento di misura dell'intensità luminosa non è molto sensibile al valore assoluto dell'intensità. È più conveniente inclinare leggermente la superficie di P_2 ed ottenere un sistema di frange chiare e scure sull'oculare del cannocchiale. È intuitivo capire che, spostando uno specchio di $\lambda/4$, si otterrà lo spostamento del sistema di frange: dove c'era una frangia chiara ora ci avrà una frangia scura.

La limitazione dell'interferometro di Michelson con S sorgente tradizionale sta nel fatto che $|d_1 - d_2| < 3 m$, altrimenti non si otterrà più l'interferenza dei due trenini d'onda ottenuti dal divisore. I due bracci devono essere eguali (o quasi) e questo limitava l'uso a misure di laboratorio, ben termostato. Variazioni termiche locali nei due bracci possono comunque falsare i risultati delle misure. Con treni d'onda dell'ordine del km è possibile osservare fenomeni interferenziali con $|d_1 - d_2| < 1 km$. Il braccio con S_1 quindi può essere costituito da uno specchio S_1 molto vicino al divisore e ad esso solidale. S_2 può essere, invece, piazzato a grande distanza (ad es. su una diga, per studiarne le deformazioni, o sul terreno, per studiare le maree terrestri).

9.3 L'esperimento di Michelson e Morley

L'ipotesi di Maxwell e di tutti i fisici dell'epoca (seconda metà '800) era che dovesse esistere un mezzo materiale, chiamato *etere* (o etere luminifero) che era il supporto materiale delle onde E.M.. L'etere pervadeva tutto lo spazio e l'ipotesi più plausibile era che fosse solidale con il sistema delle stelle fisse. La Terra, nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, con velocità $v \simeq 30 \text{ km/s}$, si muoveva quindi con velocità v rispetto all'etere, mentre la luce si propagava con velocità c rispetto all'etere. Disponendo di uno strumento molto sensibile (l'interferometro di Michelson) doveva essere possibile misurare la velocità della Terra v rispetto all'etere solidale con il Sole (il cosiddetto *vento d'etere*). Supponiamo di orientare l'interferometro in modo che esso si muova lungo la retta DP_1 con velocità v e sia Δt_1 il tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza DP_1D per un osservatore solidale all'interferometro. La luce si propaga rispetto all'etere con velocità c nel tratto DP_1 e l'apparato si muove lungo la stessa direzione con velocità v . La velocità della luce relativa all'apparato è $(c-v)$ e il tempo impiegato a percorrere la distanza l è $l/(c-v)$. Abbiamo, per semplicità, posto $d_1 = d_2 = l$. L'opposto accade nel percorso di ritorno P_1D , la velocità della luce relativa all'apparato è $(c+v)$ ed il tempo $l/(c+v)$. Il tempo totale impiegato dalla luce per andare da D a P_1 e poi tornare in D per l'osservatore solidale con l'interferometro sarà quindi:

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (9.4)$$

Da notare che, se l'apparato fosse fermo rispetto all'etere, Δt_1 sarebbe $2l/c$. Determiniamo ora il cammino percorso dal raggio DP_2D ed il tempo Δt_2 impiegato a percorrerlo rispetto all'osservatore.

In figura 9.3 sono rappresentate tre posizioni di D e P_2 , indicate con gli apici, corrispondenti agli istanti in cui la luce lascia il punto D , raggiunge lo specchio nel punto P_2' e quindi ritorna in D'' .

Osservando che:

$$c^2 \left(\frac{\Delta t_2}{2}\right)^2 = v^2 \left(\frac{\Delta t_2}{2}\right)^2 + l^2 \quad (9.5)$$

si ha:

$$\Delta t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (9.6)$$

La differenza tra i tempi impiegati nei due percorsi $\Delta\tau = \Delta t_1 - \Delta t_2$ è:

$$\Delta\tau = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{2l}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right] \quad (9.7)$$

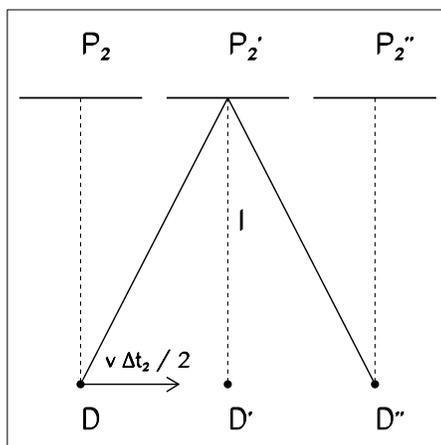


Figura 9.3:

Poichè $v/c \ll 1$ sviluppando le parentesi in serie binomiale arrestata al secondo termine si ha:

$$\Delta\tau = \frac{2l}{c} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) \right] = \frac{lv^2}{c^3} \quad (9.8)$$

Se l'interferometro, che in alcuni esperimenti galleggiava in una vasca di mercurio per evitare le più piccole vibrazioni che avrebbero potuto inficiare i risultati, viene ruotato di $\pi/2$, il cammino DP_2D diventa parallelo a v e DP_1D ortogonale. Anche il ritardo tra le due onde che arrivano al cannocchiale è invertito. Questo provoca uno sfasamento tra le onde che interferiscono e i massimi (e minimi) si spostano. L'esperimento, in sostanza, consiste nell'osservare uno spostamento delle frange, quando si ruota di $\pi/2$ l'apparato.

La variazione della differenza di tempo è $2\Delta\tau$, che corrisponde ad uno spostamento di frange $2\Delta\tau/T = 2\Delta\tau c/\lambda$. La variazione ΔN del numero di frange è quindi:

$$\Delta N = \frac{2\Delta\tau}{T} = \frac{2l}{\lambda} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \quad (9.9)$$

Nel caso del primo esperimento di Michelson e Morley si aveva $l = 11m$ (ottenuti mediante riflessioni multiple) e $\lambda = 590nm$ e quindi ci si aspettava uno spostamento di frange $\Delta N \sim 0.4$, con una precisione dello strumento ΔN di circa un ordina di grandezza inferiore. Tale spostamento non fu osservato, contraddicendo la teoria dell'etere. Ma non fu neanche osservato $\Delta N \sim 0$, come viene spesso riportato nei libri, bensì $\Delta N \sim 0.15$! Il motivo era che non si erano tenuto in conto tanti fattori correttivi, tipo il moto di rotazione

della Terra,... L'esperimento resta, comunque, una pietra miliare nella storia della Fisica.

9.4 La massa apparente dei fotoni

Si era visto nel paragrafo 3.3 che si poteva attribuire, per analogia con il caso meccanico, ad un'onda E.M., o meglio ad un fotone, una massa inerziale:

$$m = \frac{W}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (9.10)$$

La circostanza passò praticamente inosservata, assieme a tante altre, finchè Einstein reinterpretò tutte le relazioni alla luce della teoria della relatività generale. Senza entrare nel merito di questa teoria, oggetto di corsi avanzati, un fotone che “cade” sulla superficie terrestre da un'altezza h dovrebbe presentare un incremento di energia (shift violetto) pari a:

$$\Delta E = gh \frac{E}{c^2} \quad (9.11)$$

in cui si è fatta l'ipotesi dell'equivalenza della massa inerziale del fotone (9.10) con la sua massa gravitazionale. L'incremento percentuale di energia corrisponde ad un incremento percentuale di frequenza dato da:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\Delta\nu}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gh}{c^2} = 1.09 \cdot 10^{-16} h \quad (9.12)$$

dove h sia espresso in metri. In un tipico esperimento di laboratorio h può valere $h = 10 \text{ m}$ e, dalla (9.12) appare chiaro che è necessario misurare delle variazioni percentuali di frequenza dell'ordine di 10^{-15} per poter verificare l'effetto. Da un punto di vista sperimentale è impossibile pensare di poter misurare delle variazioni percentuali di frequenza così piccole, in tutto il campo di frequenze delle onde E.M., a meno che non ci sia un fenomeno fisico specifico che sia sensibile a variazioni così piccole.

Nel 1958 venne scoperto un fenomeno che presentava una sensibilità intrinseca di $\sim 10^{-12}$ a variazioni di frequenza, l'*effetto Mössbauer*, e mediante esso fu possibile verificare sperimentalmente in laboratorio lo shift violetto dei fotoni in un campo gravitazionale (esperimento di Pound e Rebka, 1960). Accenniamo brevemente all'effetto Mössbauer, dal nome del suo scopritore, che può anche essere definito come: “assorbimento risonante nucleare di fotoni senza rinculo”.

Per capire il fenomeno in modo abbastanza intuitivo, cominciamo con il considerare con un po' più di attenzione il fenomeno dell'emissione e dell'assorbimento di un fotone di energia $h\nu$ da parte di un sistema quantistico

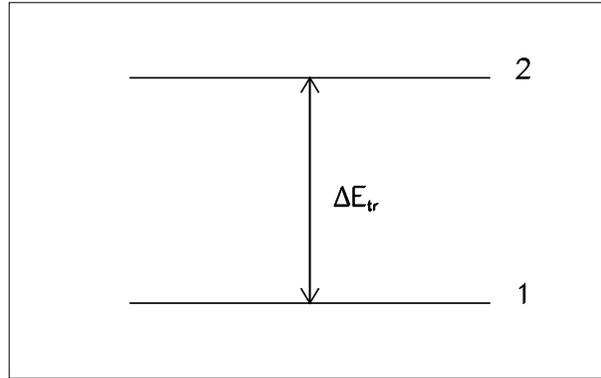


Figura 9.4:

elementare (un atomo o un nucleo) a due livelli, quale quello schematizzato in figura 9.4.

Supponiamo all'inizio che i due livelli energetici siano perfettamente definiti in energia ed indichiamo con ΔE_{tr} la differenza di energia tra di essi, $\Delta E_{tr} = E_2 - E_1$. L'emissione di un fotone dallo stato 2 allo stato 1 viene abitualmente associata all'equazione:

$$\Delta E_{tr} = E_2 - E_1 = h\nu \quad (9.13)$$

che corrisponde alla semplice conservazione dell'energia. Non si deve però dimenticare che bisogna anche conservare la quantità di moto totale del sistema, di massa M , e che quindi una parte, molto piccola, di ΔE_{tr} viene "sprecata" per conservare la quantità di moto e non si ritrova sottoforma di energia E.M. (fotone). Indicando con E_f l'energia del fotone e con R l'energia di rinculo del sistema, la formulazione corretta del fenomeno è descritta dal sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \Delta E_{tr} &= E_f + R \\ p_f &= p_R \end{aligned} \quad (9.14)$$

dove $p_f = h\nu/c = E_f/c$.

Si ricava:

$$R = \frac{p_R^2}{2M} = \frac{p_f^2}{2M} = \frac{E_f^2}{2Mc^2} \quad (9.15)$$

Poichè $R \ll E_f$, dalla (9.10), la (9.15) si può anche riscrivere come:

$$R \simeq \frac{(\Delta E_{tr})^2}{2Mc^2} \quad (9.16)$$

La situazione opposta si verifica per l'assorbimento, in quanto E_f deve non solo compensare ΔE_{tr} , ma fornire anche la quantità di moto necessaria alla conservazione, dato che il sistema assorbente è inizialmente fermo.

Abbiamo per ora considerato il fenomeno indifferenziato a seconda che si trattasse di una transizione atomica ($\Delta E_{tr} \sim 1 \text{ eV}$) o nucleare ($\Delta E_{tr} \geq 10 \text{ keV}$). In realtà il fenomeno si osserva molto facilmente nel caso atomico (si ricordino gli spettri di assorbimento di una luce "bianca"), e non nel caso nucleare. Perché? Bisogna anzitutto tenere conto che, se ΔE_{tr} fosse perfettamente definito non osserveremmo mai l'assorbimento risonante. Infatti in emissione $E_f < \Delta E_{tr}$, anche se di pochissimo, in assorbimento $E_f > \Delta E_{tr}$, sempre di pochissimo.

La natura ci aiuta nel caso atomico. Lo stato E_2 non è stazionario (decade!) e quindi sappiamo, dal principio di indeterminazione di Heisenberg, che, detta Γ l'indeterminazione sull'energia (si ricordi il dipolo smorzato!), vale la relazione:

$$\Gamma \tau \geq \hbar = 1.056 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (9.17)$$

Assumendo come valore tipico di τ per le transizioni atomiche (ottiche) $\tau \sim 10^{-8} \text{ s}$, dalla (9.17) si ottiene $\Gamma \simeq 6.6 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$.

Calcoliamoci ora dalla (9.16) quant'è R , per una transizione ottica in cui $\Delta E_{tr} = 1 \text{ eV}$ e per un atomo di numero di massa $A=100$, per cui supponiamo che $2Mc^2 = 2 \cdot 10^2 \cdot 10^9 \text{ eV}$ (si è supposto per semplicità che la massa di un nucleone sia $M_n = 10^9 \text{ eV}$). Si ottiene

$$R = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \text{ eV} = 5 \cdot 10^{-12} \text{ eV} \quad (9.18)$$

cioè $R \ll \Gamma$. Gli spettri del fotone emesso e di quello assorbito non risentono quindi dell'effetto dell'energia di rinculo.

Nel caso nucleare τ e ΔE_{tr} possono variare di diversi ordini di grandezza (~ 5 per τ , ~ 3 per ΔE_{tr}) e la fenomenologia non è delle più semplici, comunque oggetto di Corsi specialistici. Qui faremo un esempio numerico che, implicitamente, si riferisce alla transizione nucleare più nota nella spettroscopia Mössbauer, quella del ^{57}Fe , riportata nel dettaglio in seguito. Per estrema semplicità assumiamo $\tau \sim 10^{-8} \text{ s}$ e $\Delta E_{tr} = 10 \text{ keV}$, e quindi $R = 5 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$.

Abbiamo ora $R \gg \Gamma$, quindi gli spettri di emissione e di assorbimento non si sovrappongono e il fenomeno non avviene. La figura 9.5 rappresenta graficamente queste osservazioni.

Per fare avvenire il fenomeno dell'assorbimento risonante è necessario fornire al fotone emesso un'energia maggiore, pari a $2R \simeq 10^{-3} \text{ eV}$ e ciò può essere fatto spalmando la sorgente radioattiva che emette il fotone su un disco

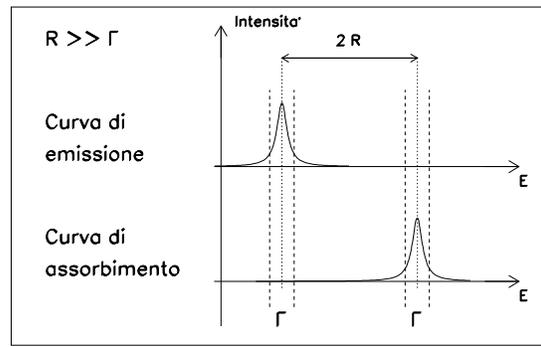
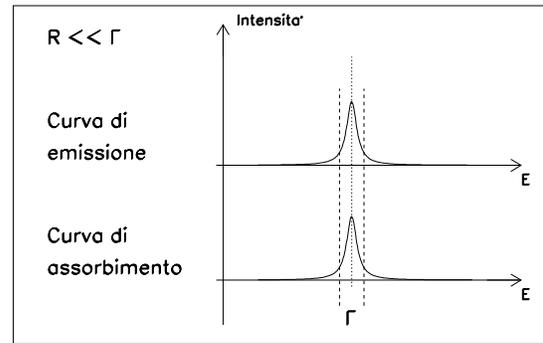


Figura 9.5:

rotante e osservando l'assorbimento in direzione tangenziale. L'incremento di energia $2R$ è dato, ricordando l'effetto Doppler, da $2R = \Delta E v/c$, quindi esso si produce per una velocità tangenziale tale che $v/c \sim 10^{-7}$. Oppure si può ottenere l'incremento di energia sfruttando il fatto che un aumento di temperatura della sorgente e dell'assorbitore corrisponde ad un incremento dell'energia cinetica media degli atomi e quindi ad una probabilità maggiore di osservare il fenomeno. La figura 9.6 schematizza le due differenti possibili modalità di operazione. Tralasciando tutti i dettagli, si può dire che aumentando T si sarebbe dovuto osservare un aumento dell'effetto di assorbimento risonante. Ciò venne effettivamente verificato in vari laboratori, senza che il fenomeno, previsto, suscitasse particolare interesse. Mössbauer, nel 1957, scoprì che nel caso della transizione γ da 129 keV nel ^{191}Ir si verificava un effetto opposto; diminuendo la temperatura ($\sim 20\text{ K}$) l'assorbimento risonante aumentava anziché diminuire. Questo fenomeno venne denominato *effetto Mössbauer*.

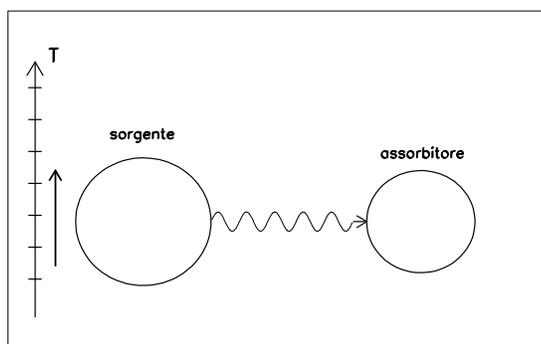
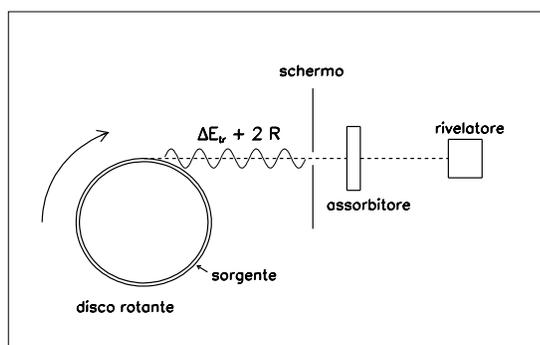


Figura 9.6:

La spiegazione intuitiva dell'effetto Mössbauer consiste nell'ipotizzare che, in una certa percentuale di casi, sia nell'emissione che nell'assorbimento risonante, il nucleo emettitore e quello assorbitore non si comportino come nuclei isolati per quanto riguarda la conservazione della quantità di moto, come sembrerebbe logico, ma è tutta la matrice cristallina a cui appartengono a contribuire alla conservazione. Quantitativamente, non bisogna utilizzare $M_n c^2$ a denominatore della (9.16), ma $M_n c^2 \cdot 10^x$ con x pari ad almeno 15 (cioè un granulo di materiale contenente almeno 10^{15} atomi). In questo caso R risulta 10^{15} volte più piccolo e quindi molto inferiore a Γ . Le linee di emissione e di assorbimento quindi coincidono e l'assorbimento risonante si verifica. L'interesse per l'effetto Mössbauer "esplose" sia nel campo della Fisica fondamentale che di quella applicata con la scoperta, nel 1959, che anche la transizione γ da 14.4 keV del ^{57}Fe presentava un assorbimento risonante, a temperatura ambiente, e in modo molto pronunciato. Ciò aprì la strada ad una lunga serie di esperimenti, che continua tuttora, di cui il più

spettacolare è quello relativo allo shift violetto dei fotoni, eseguito da Pound e Rebka nel 1960.

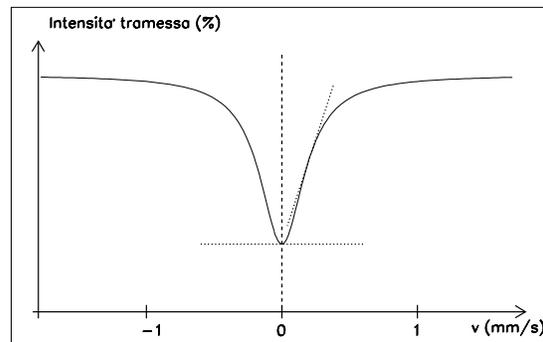
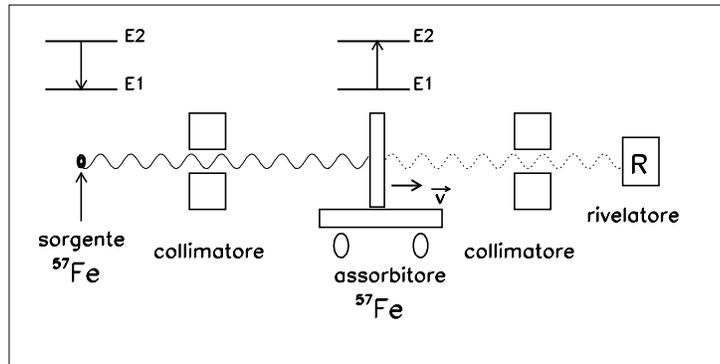


Figura 9.7:

Premettiamo una brevissima introduzione di carattere sperimentale, descrivendo una semplice misura di trasmissione, schematizzata nella figura 9.7. Supponiamo che i nuclei di ^{57}Fe emettitori (sorgente radioattiva) e assorbitori siano contenuti nella stessa matrice cristallina ed alla stessa temperatura. Il rivelatore R misurerà l'intensità del fascio di γ emessi dalla sorgente e trasmessi (cioè non assorbiti) dall'assorbitore. Supponiamo ora, invece, che l'assorbitore sia piazzato su un carrellino che si muove con velocità costante v . Se $v \neq 0$ l'assorbitore vedrà fotoni non più di energia $h\nu$, ma $h(\nu + \Delta\nu)$, con $\Delta\nu = \pm v/c$ a seconda del verso di \vec{v} , e quindi andrà fuori risonanza lasciando passare un numero maggiore di fotoni (alla risonanza i fotoni vengono assorbiti di più e poi riemessi in tutte le direzioni). La larghezza della curva sperimentale della trasmissione in funzione di v permette

di risalire immediatamente alla larghezza intrinseca Lorentziana della linea. Si trovò, per il ^{57}Fe , $\Delta\nu/\nu = 1.13 \cdot 10^{-12}$; bastava una velocità relativa v di qualche centesimo di mm/s per andare fuori risonanza!

Ecco quindi un fenomeno fisico sensibile a variazioni di frequenza che si avvicinavano a quelle richieste per la misura dello shift violetto dei fotoni nel campo gravitazionale. In realtà bisogna ancora guadagnare tre ordini di grandezza (da 10^{-12} a 10^{-15}) e ciò fu ottenuto con l'artificio sperimentale di osservare la variazione della curva Lorentziana di risonanza non al centro del picco (tangente orizzontale, sensibilità minima), ma circa a mezza altezza (tangente al massimo dell'inclinazione, sensibilità massima). Sorgente ed assorbitore di ^{57}Fe erano posti verticalmente ad una distanza di circa 20 m e fu verificata sperimentalmente in laboratorio, con un errore del 10%, la previsione della relatività generale circa lo shift violetto dei fotoni che "cadono" sulla Terra. In seguito l'esperimento fu ripetuto, con lo stesso errore, su una lunghezza di caduta di soli 2 m .

9.5 Coerenza di un'onda E.M.

9.5.1 Coerenza spaziale e temporale

Considerando l'espressione della fase di un'onda E.M. si suole parlare di *coerenza spaziale* e *coerenza temporale*.

- Coerenza spaziale.

Dati due punti P_1 e P_2 del fronte d'onda al tempo t_0 di un'onda E.M., si indichino con E_1 e E_2 i rispettivi campi elettrici. Per definizione di fronte d'onda, la differenza di fase tra i due campi elettrici al tempo t_0 sarà zero. Se tale differenza di fase rimane zero a qualsiasi istante t , i due punti si diranno coerenti. Se questo avviene qualunque siano i due punti sul fronte d'onda, si dirà che l'onda E.M. possiede *coerenza spaziale perfetta*. In realtà per un qualsiasi punto P_1 il punto P_2 deve essere contenuto entro un'area finita S contenente P_1 . In questo caso si dirà che l'onda possiede *coerenza spaziale parziale* e per ogni punto P si può introdurre un'area di coerenza opportunamente definita.

- Coerenza temporale.

In un generico punto P dello spazio si consideri il campo elettrico dell'onda E.M. al tempo t ed al tempo $(t + \tau)$. Se la differenza di fase tra $E(t)$ ed $E(t + \tau)$ rimane costante per qualunque t e se questo avviene per $0 \leq \tau \leq \tau_0$, si dirà che l'onda E.M. possiede *coerenza temporale*

parziale con un tempo di coerenza pari a τ_0 ; se, invece, la differenza di fase rimane costante anche per qualunque valore di τ , si dice che l'onda E.M. possiede *coerenza temporale perfetta*. Un esempio di onda E.M. coerente per un tempo τ_0 è indicato in figura 9.8: in essa è rappresentato un campo elettrico di tipo sinusoidale con salti di fase ad ogni intervallo di tempo in media pari a τ_0 .

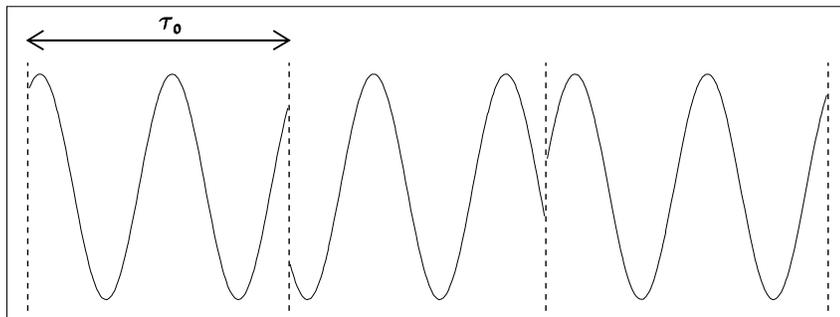


Figura 9.8:

È facile capire che un'onda la cui fase vari uniformemente nel tempo risulterà avere coerenza temporale perfetta, mentre un'onda la cui fase varia in modo non uniforme con il tempo, per esempio a causa di salti improvvisi nel valore della fase iniziale, come indicato nella figura 9.8, o a causa di mutazioni repentine della frequenza, possiederà coerenza temporale limitatamente agli intervalli di tempo τ_0 nei quali la sua fase ha un andamento uniforme.

È bene notare che i due concetti di coerenza spaziale e temporale sono distinti e che, ad esempio, un'onda E.M. può possedere una parziale coerenza temporale pur essendo perfettamente coerente da un punto di vista spaziale. Se, infatti, la stessa onda di figura 9.8 rappresenta sia il campo elettrico in P_1 che in P_2 del fronte d'onda, l'onda E.M. sarà spazialmente coerente pur essendo parzialmente coerente da un punto di vista temporale.

9.5.2 Grado di coerenza spaziale e temporale

Per descrivere quantitativamente le proprietà di coerenza spaziale e temporale di un'onda E.M. si introduce una classe di *funzioni di correlazione* (o matrici di coerenza). Indichiamo con E il campo elettrico propagativo, utilizzando la notazione complessa e limitiamoci alle correlazioni del primo

ordine. In un punto \vec{r}_1 possiamo definire la funzione di correlazione $\Gamma^{(1)}$ al primo ordine come:

$$\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E(\vec{r}_1, t + \tau) E^*(\vec{r}_1, t) dt \quad (9.19)$$

Tale funzione è quindi pari alla funzione di autocorrelazione di $E(\vec{r}, t)$, ovvero pari al valore medio sul tempo del prodotto $E(\vec{r}_1, t + \tau) E^*(\vec{r}_1, t)$. Si può quindi scrivere più semplicemente

$$\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \langle E(\vec{r}_1, t + \tau), E(\vec{r}_1, t) \rangle \quad (9.20)$$

Si può anche definire una funzione normalizzata, $\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$ come segue:

$$\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \frac{\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)}{\langle E(\vec{r}_1, t), E(\vec{r}_1, t) \rangle} = \frac{\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)}{I(\vec{r}_1, t)} \quad (9.21)$$

dove $I(\vec{r}_1, t)$ indica l'intensità del campo elettrico. Dalla disuguaglianza di Schwartz si può immediatamente vedere che $|\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)| \leq 1$. Si può anche dimostrare che $\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, -\tau) = [\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)]^*$. La funzione $\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$ è chiamata *grado complesso di coerenza temporale* nel punto \vec{r}_1 . Il suo modulo $|\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)|$ è invece chiamato *grado di coerenza temporale*. È infatti evidente che $\Gamma^{(1)}$ e quindi $\gamma^{(1)}$ sono un indice di quanta correlazione ci sia nel campo E nello stesso punto a due istanti successivi separati di τ . Nel caso di completa assenza di coerenza temporale, dalle (9.19) e (9.21) si ha infatti $\gamma^{(1)} = 0$ per $\tau > 0$ ($\gamma^{(1)} = 1$ per $\tau = 0$). Nel caso di perfetta coerenza temporale (un'onda sinusoidale, p. es.) si ha $|\gamma^{(1)}| = 1$ per qualsiasi τ . La quantità $|\gamma^{(1)}|$ è quindi una funzione compresa tra 0 e 1 che descrive il grado di coerenza temporale dell'onda. In generale la funzione $|\gamma^{(1)}|$ sarà del tipo indicato in figura 9.9 (si ricorda che $|\gamma^{(1)}(-\tau)| = |\gamma^{(1)}(\tau)|$). Si può quindi definire un tempo caratteristico τ_{co} , detto *tempo di coerenza temporale*, ad es. come quel tempo per cui si ha $|\gamma^{(1)}| = 1/2$. Per un'onda perfettamente coerente si ha ovviamente $\tau_{co} = \infty$.

In modo analogo, si può definire una funzione di correlazione al primo ordine fra due punti \vec{r}_1 e \vec{r}_2 diversi allo stesso istante:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E(\vec{r}_1, t) E^*(\vec{r}_2, t) dt = \\ &= \langle E(\vec{r}_1, t) E(\vec{r}_2, t) \rangle \end{aligned} \quad (9.22)$$

Si può definire inoltre la corrispondente funzione normalizzata $\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$ come

$$\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \frac{\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)}{[\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \Gamma^{(1)}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)]^{1/2}} \quad (9.23)$$

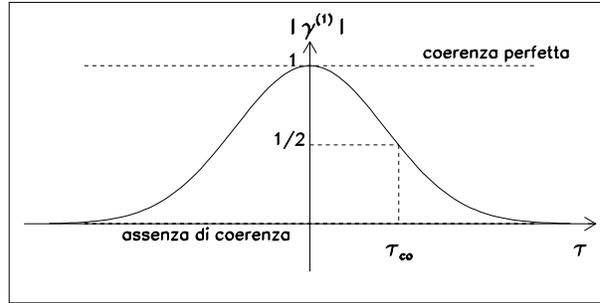


Figura 9.9:

Dalla disuguaglianza di Schwartz si può ancora vedere che $|\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)| \leq 1$. La quantità $\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$ è detta *grado complesso di coerenza spaziale* ed il suo modulo *grado di coerenza spaziale*. In analogia con quanto detto prima, fissato \vec{r}_1 , è chiaro che $|\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)|$ decadrà dal valore 1 (che si ha per $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$, cioè per $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = 0$) a 0 in una certa lunghezza caratteristica che chiameremo *lunghezza di coerenza spaziale* (o *lunghezza di correlazione* d_{corr}) dell'onda luminosa nel punto \vec{r}_1 , come indicato qualitativamente in figura 9.10.

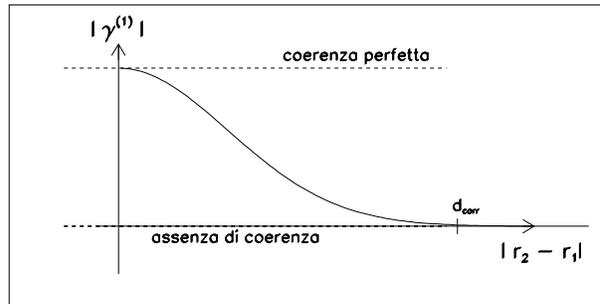


Figura 9.10:

I concetti di coerenza spaziale e temporale possono essere combinati in quello espresso dalla *funzione di coerenza mutua* $\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)$ definita da:

$$\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle E(\vec{r}_1, t + \tau), E(\vec{r}_2, t) \rangle \quad (9.24)$$

che può essere al solito normalizzata come segue:

$$\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{[\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \Gamma^{(1)}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)]^{1/2}} \quad (9.25)$$

La precedente funzione di correlazione definisce il *grado di coerenza complesso* tra due punti dell'onda a due tempi successivi.

9.5.3 Misura della coerenza spaziale e temporale

Una maniera molto semplice per la misura del grado di coerenza spaziale fra due punti x_1 e x_2 di un'onda luminosa è costituita dall'uso dell'interferometro di Young, schematizzato in figura 9.11. Esso è semplicemente costituito da

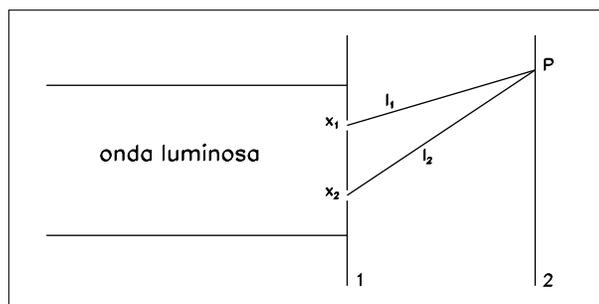


Figura 9.11:

uno schermo 1 in cui siano praticati due piccoli fori in corrispondenza dei punti x_1 e x_2 ed uno schermo 2 su cui si forma la figura di interferenza dovuta alla luce che passa attraverso i due fori. Consideriamo per semplicità il caso in cui l'onda luminosa sia perfettamente coerente da un punto di vista temporale. In questo caso, si vedranno sullo schermo 2 delle frange di interferenza che saranno tanto più nitide quanto più i due campi $E(x_1, t)$ e $E(x_2, t)$ si sono mantenuti in fase durante il tempo di misura delle frange (p. es. il tempo di esposizione di una lastra fotografica). Pertanto il grado di visibilità delle frange è una misura del grado di coerenza spaziale fra i punti x_1 e x_2 . Precisamente, definiamo *visibilità* V_P delle frange nel punto P la quantità:

$$V_P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (9.26)$$

dove I_{max} e I_{min} sono rispettivamente le intensità nel punto di massimo e di minimo delle frange intorno al punto P . Se i due fori 1 e 2 lasciano arrivare nel punto P la stessa intensità di luce e se l'onda è perfettamente coerente da un punto di vista spaziale, si ha $I_{min} = 0$ per cui $V_P = 1$. Nel caso in cui i segnali nei due punti x_1 e x_2 siano completamente incorrelati (cioè incoerenti), le frange scompaiono (cioè $I_{max} = I_{min}$) per cui $V_P = 0$. Per quanto detto nel paragrafo precedente, appare dunque chiaro che V_P debba essere legato al modulo della funzione $\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)$. Tale legame è facilmente ottenibile nel modo seguente. Indichiamo con $E_P(t')$ il campo elettrico nel punto P

all'istante t' . Esso è dovuto alla sovrapposizione dei campi provenienti dai due fori, per cui potremo scrivere:

$$E_P(t') = K_1 E(x_1, t' - t_1) + K_2 E(x_2, t' - t_2) \quad (9.27)$$

dove $t_1 = l_1/c$, $t_2 = l_2/c$. I fattori K_1 e K_2 , chiamati *fattori di obliquità*, sono inversamente proporzionali a l_1 e l_2 e dipendono anche dalle dimensioni dei due fori e dagli angoli fra l'onda incidente e l'onda diffratta nei punti x_1 e x_2 ; in generale, essi saranno due fattori costanti complessi. Definendo ora $t = t' - t_2$ e $\tau = t_2 - t_1$, la (9.26) può scriversi:

$$E_P = K_1 E(x_1, t + \tau) + K_2 E(x_2, t) \quad (9.28)$$

L'intensità nel punto P vale dunque:

$$I_P = E_P E_P^* = I_1(t+\tau) + I_2(t) + 2\text{Re}[K_1 K_2^* E(x_1, t+\tau) E^*(x_2, t)] \quad (9.29)$$

dove I_1 e I_2 sono le intensità nel punto P dovute, singolarmente, alle emissioni dei due punti x_1 e x_2 e sono date da:

$$\begin{aligned} I_1 &= |K_1|^2 |E(x_1, t + \tau)|^2 = |K_1|^2 I(x_1, t + \tau) \\ I_2 &= |K_2|^2 |E(x_2, t)|^2 = |K_2|^2 I(x_2, t) \end{aligned} \quad (9.30)$$

dove $I(x_1, t + \tau)$ e $I(x_2, t)$ sono le intensità nei punti x_1 e x_2 agli istanti di emissione delle onde che interferiscono in P all'istante t' . Eseguendo una media temporale su ambo i membri della (9.29) ed usando la (9.24), si ha:

$$\langle I_P \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2 |K_1| |K_2| \text{Re} \Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) \quad (9.31)$$

Con qualche passaggio, si possono ottenere le espressioni di I_{max} e I_{min} :

$$\begin{aligned} I_{max} &= \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2(\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2} |\gamma^{(1)}| \\ I_{min} &= \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle - 2(\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2} |\gamma^{(1)}| \end{aligned} \quad (9.32)$$

e quindi dalla (9.26)

$$V_P = \frac{2(\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2}}{\langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2, \tau)| \quad (9.33)$$

Nel caso $\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle$ si ha $V_P = |\gamma^{(1)}|$. Nel caso $\tau = 0$ (cioè $l_1 = l_2$) la (9.31) permette dunque una misura di $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2, 0)|$ cioè del grado di coerenza spaziale dell'onda fra i punti x_1 e x_2 .

Una maniera molto semplice per la misura della coerenza temporale è costituita dall'uso dell'interferometro di Michelson (vedi figura 9.2), in cui tra

la sorgente S e l'interferometro sia frapposto uno schermo con un piccolo foro in corrispondenza del punto P in cui si vuole misurare la coerenza temporale dell'onda. Nella direzione C , come noto, a causa dell'interferenza dei due fasci si avrà luce o buio secondo che $2(d_1 - d_2)$ sia uguale ad un numero pari o dispari di semilunghezze d'onda. Per un'onda parzialmente coerente l'intensità I_C nel punto C in funzione di $2(d_1 - d_2)$ andrà come indicato in figura 9.12. Anche in questo caso si può definire una visibilità delle frange $V_P(\tau)$ come nella (9.26), essendo ora $\tau = 2(d_1 - d_2)/c$. In maniera analoga a

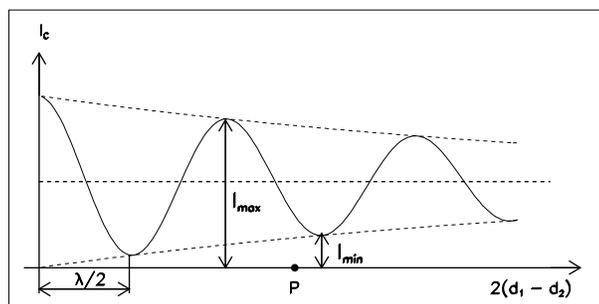


Figura 9.12:

quanto fatto per l'interferometro di Young, si può ora dimostrare che:

$$V_P = |\gamma^{(1)}(P, P, \tau)| \quad (9.34)$$

La misura della visibilità delle frange permette quindi, in questo caso, la misura del grado di coerenza temporale dell'onda nel punto P . Si può anche definire una *lunghezza di coerenza temporale* l_τ come $l_\tau = c\tau_{co}$, dove τ_{co} è il tempo di coerenza temporale. La quantità $l_\tau/2$ fornisce la differenza $(d_1 - d_2)$ fra i due bracci dell'interferometro per cui risulta $V_P = 1/2$.

Il concetto di coerenza temporale di un'onda E.M., come si è visto, è legato alla variazione nel tempo della fase dell'onda ed è intimamente connesso alla sua monocromaticità. Si può dimostrare che esiste un legame preciso tra la indeterminazione in frequenza dell'onda, $\Delta\nu$ e il suo tempo di coerenza τ_{co} : $\Delta\nu \cdot \tau_{co} \geq 1/4\pi$, da cui si deduce che quanto più un'onda è monocromatica, tanto più essa è temporalmente coerente.

Per definire il grado di coerenza di un'onda sono state valutate le correlazioni tra i valori del campo elettrico dell'onda in due punti dello spazio in cui essa si propaga e a due istanti differenti. Considerando, invece, correlazioni esistenti tra i valori del campo elettrico in tre o più punti differenti ed a tre o più istanti differenti (ossia in tre o più punti dello spazio-tempo) è possibile definire la coerenza al secondo ordine o superiore dell'onda in esame.

Nelle sorgenti luminose termiche (Sole, lampade ad incandescenza, lampade al mercurio, ...) si ha la somma dei contributi dei singoli emettitori

scorrelati che le compongono (atomi); tali sorgenti possono dare coerenza solamente al primo ordine.

Il laser, invece, può generare radiazione ottica coerente in più ordini, al limite in tutti, grazie al fatto che il meccanismo che sta alla base del processo di emissione è il processo di *emissione stimolata*, nel quale un atomo, in presenza di un'onda E.M. di frequenza opportuna, incidente su di esso, viene stimolato ad emettere un'altra onda E.M. con gli stessi valori di frequenza e di fase dell'onda incidente.

9.6 Olografia

9.6.1 Generalità

Vediamo ora una delle applicazioni più spettacolari dell'Ottica coerente: l'*olografia* o fotografia tridimensionale. Il principio base dell'olografia è il-

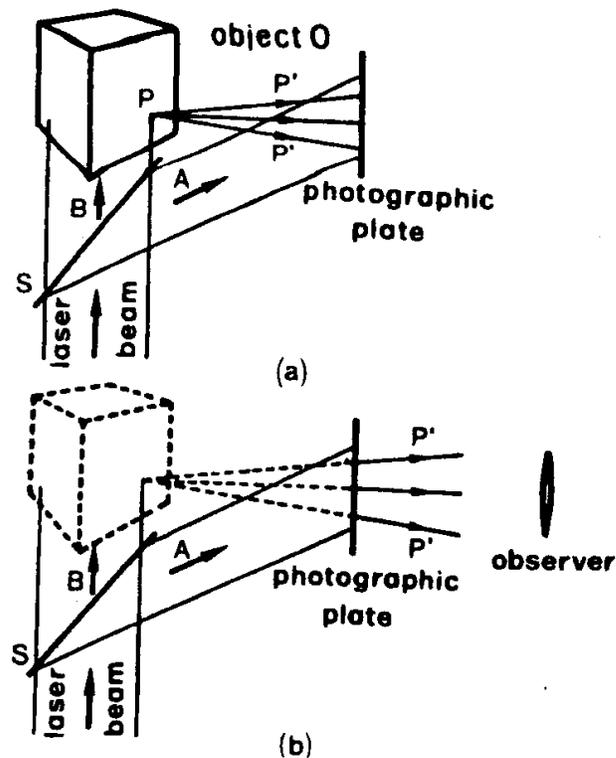


Figura 9.13:

lustrato in figura 9.13. Un fascio di luce coerente (un fascio di luce laser, p.

es.) viene fatto incidere su uno specchio semiriflettente e diviso così in un fascio A riflesso ed un fascio B trasmesso. Il fascio A incide direttamente su una lastra fotografica mentre il fascio B illumina l'oggetto che si vuole "fotografare". Una parte della luce diffusa dall'oggetto cadrà sulla lastra, come indicato in figura 9.13 a). Pertanto sulla lastra, durante la fase di *esposizione*, si verrà a formare una figura di interferenza dovuta alla sovrapposizione di questi due fasci incidenti: il *fascio diretto* o *fascio di riferimento* A e il fascio diffuso dall'oggetto. Se la pellicola viene sviluppata e la si esamina con un ingrandimento sufficiente, si potranno vedere le figure di interferenza che sono estremamente complicate e non hanno alcuna relazione ovvia con l'oggetto "fotografato" ma contengono una registrazione completa delle proprietà geometriche dell'oggetto.

La lastra sviluppata venga di nuovo messa nella posizione in cui si trovava durante l'esposizione e si rimuova l'oggetto, come indicato in figura 9.13 b). Il fascio di riferimento A , durante questa fase di *ricostruzione dell'immagine*, interagisce con la figura di interferenza sulla lastra e riproduce dietro di essa un fascio diffratto che risulta essere esattamente la stessa onda E.M. P' diffusa dall'oggetto in figura 9.13 a). Un osservatore che guardi la lastra fotografica da dietro, come indicato in figura 9.13 b), vedrà l'oggetto dietro la lastra come se esso fosse realmente lì.

Il principio dell'olografia è stato stabilito ben prima dell'avvento dei laser; la tecnica, infatti, è stata proposta da Gabor nel 1948, ma è solo dopo l'invenzione del laser che essa è diventata utilizzabile in pratica ed ha dimostrato il suo grande potenziale. Una delle caratteristiche più interessanti dell'olografia è che l'oggetto ricostruito possiede proprietà tridimensionali. Così, se l'osservatore cambia il suo punto di osservazione può vedere gli altri lati dell'oggetto. Questo avviene perchè la lastra fotografica contiene, sotto forma di figura di interferenza, informazioni su tutte le caratteristiche geometriche dell'oggetto, e pertanto anche la sua tridimensionalità.

9.6.2 Principio fisico dell'olografia

Consideriamo ora più in dettaglio il principio fisico dell'olografia. Per semplicità consideriamo il caso di un oggetto puntiforme P , ad esempio il punto P in figura 9.13 a), e facciamo riferimento ad una disposizione geometrica dei due fasci, di riferimento e diffuso, particolarmente semplice, quale quella schematizzata in figura 9.14. In questo caso il fascio di riferimento è parallelo alla direzione media del fascio diffuso e si parla di *olografia in asse*. Consideriamo come onda di riferimento un'onda piana, mentre l'onda diffusa dal punto P sarà un'onda sferica e scegliamo come origine del sistema di riferi-

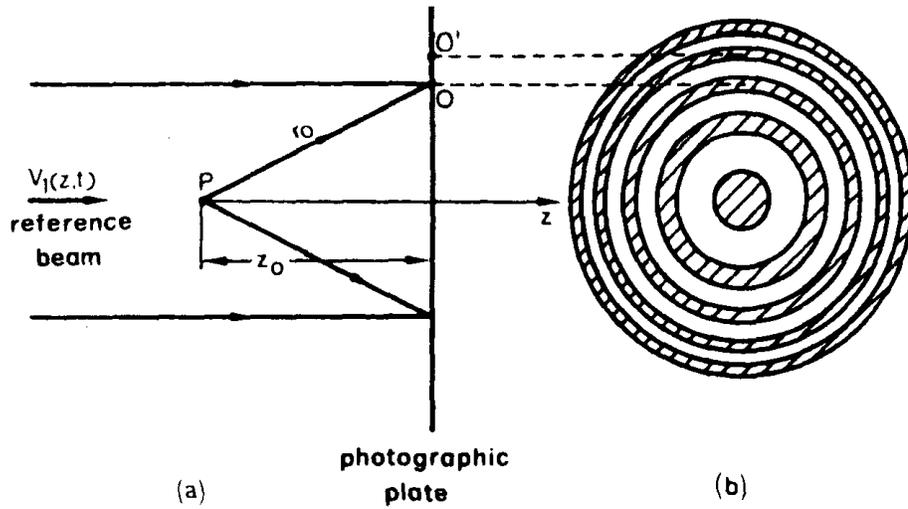


Figura 9.14:

mento il punto P . I campi elettrici delle due onde in un punto O della lastra fotografica sono dati da:

$$E_1(z_0, t) = A_1 e^{i(kz_0 - \omega t)} \quad (9.35)$$

$$E_2(r_0, t) = \frac{A_2}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \quad (9.36)$$

dove A_1 e A_2 sono delle costanti complesse, z_0 è la distanza dal punto P al piano della lastra e r_0 è la distanza del punto O dall'origine. L'intensità in O vale pertanto, a meno di una costante $\epsilon_0 c$:

$$I = |E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1^* E_2 + E_1 E_2^* = I' + I'' + I''' \quad (9.37)$$

con

$$I' = |E_1|^2 + |E_2|^2 = |A_1|^2 + \frac{|A_2|^2}{r_0^2} \quad (9.38)$$

$$I'' = E_1^* E_2 = \frac{A_1^* A_2}{r_0} e^{ik(r_0 - z_0)} \quad (9.39)$$

$$I''' = E_1 E_2^* = \frac{A_1 A_2^*}{r_0} e^{ik(z_0 - r_0)} \quad (9.40)$$

L'intensità totale I è pertanto la somma di una quantità, I' , che è una funzione della posizione del punto O , e delle quantità I'' e I''' , la cui somma può essere scritta come:

$$I'' + I''' \propto \frac{\cos[k(r_0 - z_0) + \phi]}{r_0} \quad (9.41)$$

dove ϕ è una costante. A causa del termine coseno nella (9.41), l'intensità totale I in funzione di r_0 mostra una serie di massimi e minimi. Così l'interferenza tra l'onda piana $E_1(z, t)$ e l'onda sferica $E_2(r, t)$ produce una serie di frange circolari sulla lastra, come mostrato in figura 9.14 b). La distanza Δr_0 tra le frange soddisfa la condizione $k\Delta r_0 = 2\pi$. Così, se nel punto O si ha un massimo, il massimo successivo sarà in un punto O' tale che $PO' - PO = \lambda$.

Quando la lastra viene sviluppata, essa mostrerà una serie di frange chiare e scure. Se supponiamo, come approssimazione alquanto soddisfacente della realtà, che la risposta della pellicola sia proporzionale all'intensità I , allora l'annerimento sarà proporzionale a I e si potrà scrivere:

$$1 - T = \alpha I \quad (9.42)$$

dove T è il coefficiente di trasmissione di potenza della lastra e α è una costante che rappresenta il grado di annerimento. Il coefficiente di trasmissione del campo elettrico della lastra, perciò, è $T' \propto \sqrt{T}$ e dall'equazione (9.42) per un piccolo grado di annerimento, si ha:

$$T' \simeq (1 - \alpha I)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha I \quad (9.43)$$

Supponiamo ora di illuminare la lastra con il fascio di riferimento $E_1(z, t)$, come indicato in figura 9.15. Il campo elettrico subito dietro la lastra sarà:

$$\begin{aligned} E(z_0, r_0, t) &\simeq T' E_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\alpha I\right) E_1 = \\ &= \left[1 - \frac{1}{2}\alpha(I' + I'' + I''')\right] E_1 = E' + E'' + E''' \end{aligned} \quad (9.44)$$

dove, dalle (9.35), (9.38)–(9.40) e (9.43) si ha:

$$E' = \left(1 - \alpha \frac{|A_1|^2}{2} - \alpha \frac{|A_2|^2}{2r_0^2}\right) E_1(z_0, t) \quad (9.45)$$

$$E'' = -\alpha \frac{|A_1|^2 A_2}{2r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \quad (9.46)$$

$$E''' = -\alpha \frac{A_1^2 A_2^*}{2r_0} e^{i(2kz_0 - kr_0 - \omega t)} \quad (9.47)$$

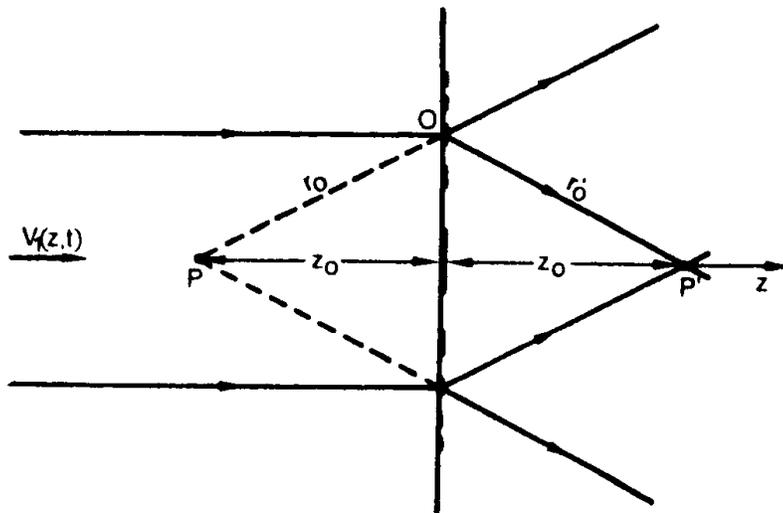


Figura 9.15:

Il comportamento dell'onda diffratta dietro la lastra può, in linea di principio, essere calcolato usando il metodo di Fresnel per un campo $E = E' + E'' + E'''$. Tuttavia, si può vedere immediatamente che il primo termine E' dà origine ad un'onda diffratta

$$\left(1 - \alpha \frac{|A_1|^2}{2} - \alpha \frac{|A_2|^2}{2r_0^2}\right) E_1(z, t) \quad (9.48)$$

Infatti, quest'onda produce un campo uguale a E' sulla lastra, cioè per $z = z_0$. Il termine E' , pertanto, produce dietro la lastra un'onda piana uguale a quella incidente, eccetto per un fattore di attenuazione che corrisponde all'annerimento medio sulla lastra. Analogamente, è facile vedere che i termini E'' e E''' producono due onde sferiche, una divergente dal punto P e l'altra convergente verso il punto P' in figura 9.15. Considerando il termine E''' , per esempio, è sufficiente osservare che un'onda sferica che converge verso il punto P' produce sulla lastra un campo

$$E_{P'} \propto \frac{e^{i(-kr'_0 - \omega t)}}{r'_0} \quad (9.49)$$

dove $r'_0 = P'O$. Ora, dato che $r'_0 = r_0$ un confronto tra la (9.47) e la (9.49) mostra che i due campi sono uguali eccetto che per un fattore di fase costante (e^{i2kz_0}) che non è significativo. Poiché la soluzione è unica, segue che il termine E''' dà origine ad un'onda sferica diffratta che converge in P' .

Trascurando il termine ovvio dovuto a E' (che rappresenta la trasmissione parziale dell'onda che incide sulla lastra sviluppata), si vede infine che

l'ologramma produce un'immagine virtuale P ed un'immagine reale P' del punto P di figura 9.14 a).

Le considerazioni fatte fino ad ora si ripetono nel caso di un corpo non puntiforme; per analogia con il caso di un corpo puntiforme, si può vedere che l'ologramma di un oggetto esteso, illuminato dall'onda di riferimento, produce dietro alla lastra tre contributi: un campo E' , che è l'onda di riferimento E_1 opportunamente attenuata, un campo E'' , che produce un'immagine virtuale dell'oggetto, ed un campo E''' , che produce un'immagine reale dell'oggetto (che può cioè essere proiettata su uno schermo) in una posizione che è speculare all'immagine virtuale rispetto alla lastra. Si può ora vedere come l'olografia permetta di registrare completamente il campo diffuso dall'oggetto. Dalla (9.46) si vede che $E'' \propto E_2$ e pertanto vengono registrate sia l'ampiezza che la fase del campo E_2 . Se non ci fosse l'interferenza con il campo di riferimento, l'intensità del campo sulla lastra, e perciò anche l'annerimento, sarebbe proporzionale a $|E_2|^2$, cioè solo il modulo di E_2 verrebbe registrato. Il principio dell'olografia permette, invece, di registrare anche l'informazione della fase del campo diffuso dall'oggetto e questo rende possibile una ricostruzione completa dell'oggetto.

9.6.3 Olografia in asse e fuori asse

Il semplice dispositivo olografico in asse sopra descritto è analogo a quello proposto da Gabor nel 1948. In esso l'oggetto che viene "fotografato" è un corpo trasparente (Gabor usò una diapositiva con nomi di scienziati) e produce esso stesso l'onda di riferimento; in questo modo le differenze di cammino ottico tra i due fasci sono minime e questo consente l'uso di una sorgente con lunghezza di coerenza relativamente corta, spiegando lo sviluppo della tecnica anche in assenza di sorgenti laser che si sarebbero diffuse solo una ventina di anni più tardi. Le limitazioni di questo tipo di olografia sono dovute essenzialmente al ristretto numero di oggetti di cui è possibile realizzare una registrazione olografica. Inoltre, i tre termini prodotti dall'ologramma durante la restituzione sono spazialmente sovrapposti e l'immagine ottenuta è di scarsa qualità.

Questi inconvenienti vengono superati nella tecnica della *olografia fuori asse*, che è ora considerata la configurazione olografica fondamentale e viene schematizzata nella figura 9.16. In essa le direzioni di propagazione media dei fasci diffuso e di riferimento non sono più coincidenti: per questo si parla di olografia fuori asse. Questo comporta, nella restituzione, la separazione spaziale dei termini prodotti per diffrazione dall'ologramma e quindi una perfetta ricostruzione del fronte d'onda diffuso dall'oggetto, ora non più degradato dalla sovrapposizione con le altre componenti. Per questo tipo

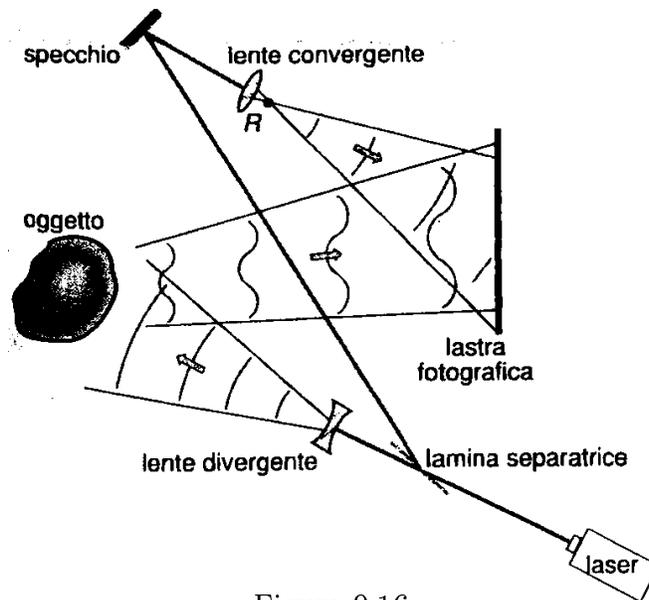
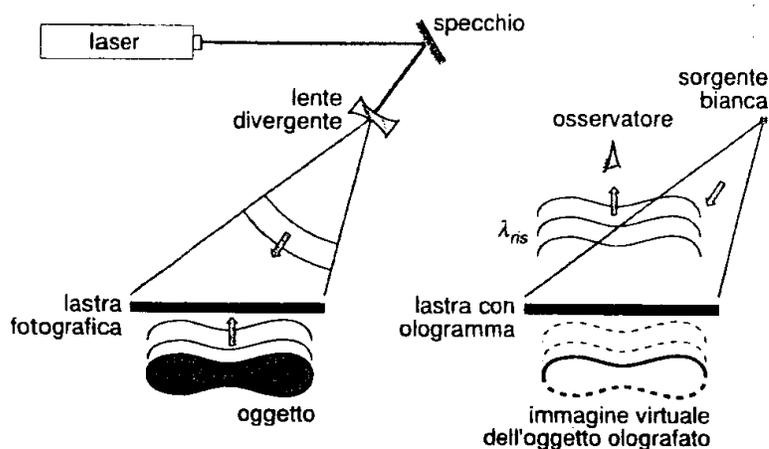


Figura 9.16:

di configurazione non esistono limitazioni sul tipo di oggetti fotografabili; in generale, però, le differenze di cammino ottico tra il fascio oggetto e quello di riferimento possono essere notevoli, soprattutto nel caso di oggetti di dimensioni notevoli. È allora indispensabile l'uso di sorgenti di grande lunghezza di coerenza, quali sono i laser.

9.6.4 Olografia in riflessione

All'inizio degli anni '60 nell'URRS fu sviluppata la configurazione detta *olografia in riflessione*. In questo caso, i fronti d'onda ricostruiti sono ottenuti per riflessione dall'ologramma invece che per trasmissione come nelle tecniche descritte in precedenza. Questa olografia utilizza le proprietà di volume dell'emulsione fotografica e, infatti, in questo caso si parla di *ologrammi di volume*. La tecnica è schematizzata in figura 9.17. Per registrare un ologramma in riflessione i fasci oggetto e di riferimento incidono sulla lastra da parti opposte. L'interferenza produce, dopo il trattamento della lastra, strati di argento metallico all'interno del volume dell'emulsione che, in fase di ricostruzione, agiscono come superfici semiriflettenti. Nel caso particolare di interferenza tra due onde piane, di lunghezza d'onda λ , propagantisi in direzione perpendicolare alla lastra e in versi opposti, queste superfici sono piani paralleli all'emulsione e separati tra loro di $\lambda/2$. Gli ologrammi in riflessione sono visibili anche in luce bianca perchè funzionano essi stessi da filtri monocromatori: fissata la geometria di osservazione, esiste infatti una



- Schema dell'olografia in riflessione: (1) registrazione; (2) ricostruzione con sorgente di luce bianca alla lunghezza d'onda di risonanza dell'ologramma λ_{ris} .

Figura 9.17:

sola lunghezza d'onda di risonanza (λ_{ris}) che soddisfa la condizione di Bragg, come indicato in figura 9.18.

9.6.5 Applicazioni dell'olografia

Dopo aver spiegato il principio su cui si basa la tecnica dell'olografia, consideriamo ora brevemente alcuni suoi campi di applicazione.

Memorie olografiche. Una porzione, anche piccola, di ologramma contiene pur anche se degradata in qualità, l'informazione dell'intero oggetto. Ripartendo la lastra in un numero di piccoli elementi è possibile immagazzinare olograficamente una quantità grandissima di immagini, ciascuna restituibile interrogando selettivamente ogni elemento con il fascio di riferimento.

Interferometria olografica Si tratta di una tecnica di prova non invasiva, che consente il confronto tra stati diversi di uno stesso oggetto e trova applicazioni per l'industria, la medicina, il restauro, i collaudi ottici, ecc. A tal fine, viene dapprima registrato l'ologramma dell'oggetto nella sua condizione iniziale; esposta e sviluppata la lastra, la si riposiziona accuratamente nella sua sede; illuminando quindi l'ologramma con l'onda di riferimento si ricostruisce l'immagine dell'oggetto non perturbato. Illuminando nel contempo anche l'oggetto vero, visto dall'osservatore attraverso la lastra, si ha interferenza tra luce diffusa dall'oggetto vero e quella dell'immagine olografica virtuale; perturbando l'oggetto con un agente esterno (meccanico, termico

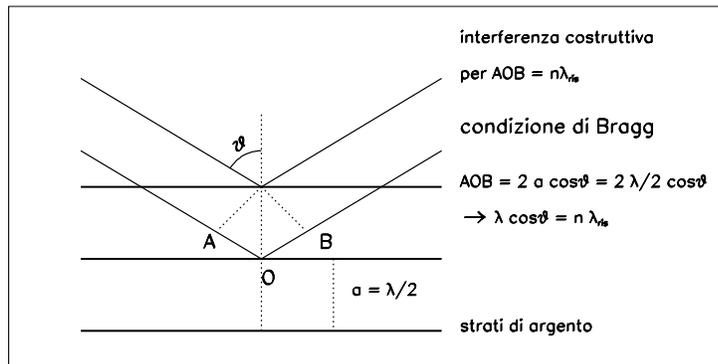


Figura 9.18:

o di altra natura) si visualizza il campo di deformazione superficiale indotto sotto forma di frange di interferenza, continuamente mutanti in funzione delle caratteristiche della perturbazione (interferometria olografica in tempo reale). Come tecnica alternativa, si registrano sulla stessa lastra due ologrammi, uno dell'oggetto nel suo stato iniziale e uno dell'oggetto perturbato. La ricostruzione fornisce due immagini olografiche virtuali, che, per interferenza producono lo stesso tipo di informazione congelata all'istante della seconda esposizione (interferometria olografica in doppia esposizione). La tecnica si estende anche, con opportune varianti, allo studio di vibrazioni di corpi sollecitati.

Da ricordare anche altre applicazioni, quali l'elaborazione ottica dell'informazione, la realizzazione di componenti ottici per via olografica, codici di protezione, creazioni artistiche figurative, documentazione.