

INTRODUZIONE

I segnali sono nati come strumento di comunicazione fin dall'antichità (per esempio segnali luminosi o sonori); l'uso del telegrafo (l'alfabeto Morse è del 1852) ne segna la nascita moderna. Ora i segnali elettrici sono alla base della teoria.

I segnali rappresentano una relazione funzionale che contiene informazioni e, quasi sempre, anche disturbi di natura casuale. Per ridurre il fondo si deve ottimizzare il rapporto segnale/rumore.

I segnali possono essere continui (analogici) oppure discreti (digitali) sia per la variabile indipendente che per quella dipendente.

Esempi	Variabile dipendente continua	Variabile dipendente discreta
v. indep. continua	intensita' di corrente in un altoparlante: $i = i(t)$	interruzioni di corrente in una linea elettrica: $n = n(t)$
v. indep. discreta	temperatura ad una data ora del giorno: $T = T(i)$	numero di nascite per anno: $n = n(i)$

I circuiti elettrici sono il tipico esempio di segnali analogici. La trasmissione dati e l'uso dei calcolatori sono il tipico esempio di segnali digitali.

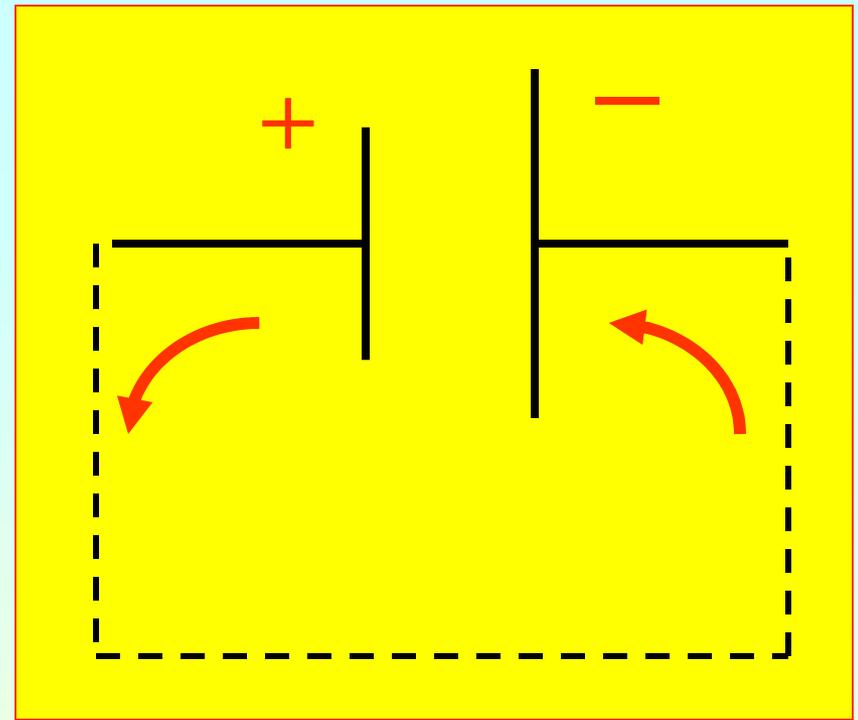
In genere, i segnali possono essere periodici, aperiodici, campionati o casuali; il loro studio puo` essere fatto in termini di analisi nel dominio del tempo o della frequenza. Il campionamento serve a trasformare segnali analogici in digitali. Tra gli scopi principali della teoria si ha:

- caratterizzazione, rivelazione e ripristino di un segnale,
- caratterizzazione, progettazione e modifiche di un sistema.

La teoria dei segnali comprende l'analisi, il trattamento e le previsioni. Dopo il loro riconoscimento i segnali possono essere confrontati e processati con tecniche di miscelamento, campionamento e filtraggio mediante opportuni sistemi (i più semplici sono i sistemi lineari).

Allo studio dei segnali analogici si è affiancato, con lo sviluppo dei calcolatori, un analogo studio dei segnali digitali.

Segnali analogici: i circuiti elettrici



La **corrente elettrica**, definita come $\mathbf{i} = \mathbf{dq}/\mathbf{dt}$ e misurata in Ampere [$1\text{A} = 1\text{C}/1\text{s}$], rappresenta il flusso di cariche **positive** attraverso la sezione di un conduttore ai cui capi e' applicata la differenza di potenziale $V = V_A - V_B$.

Effetto Joule: il lavoro $L = q(V_A - V_B) = q\Delta V$ prodotto dallo spostamento di una carica elettrica tra due punti del campo elettrostatico puo` essere espresso in termini di passaggio della corrente elettrica $i = q/t$ in un conduttore di resistenza $R = \Delta V/i$.

Si ottiene cosi` $L = Ri^2t$ e l'energia termica associata a questo lavoro $Q = Ri^2t/J$ (J equivalente meccanico del calore: 1 cal = 4,186 J) viene dispersa nell'ambiente sotto forma di calore.

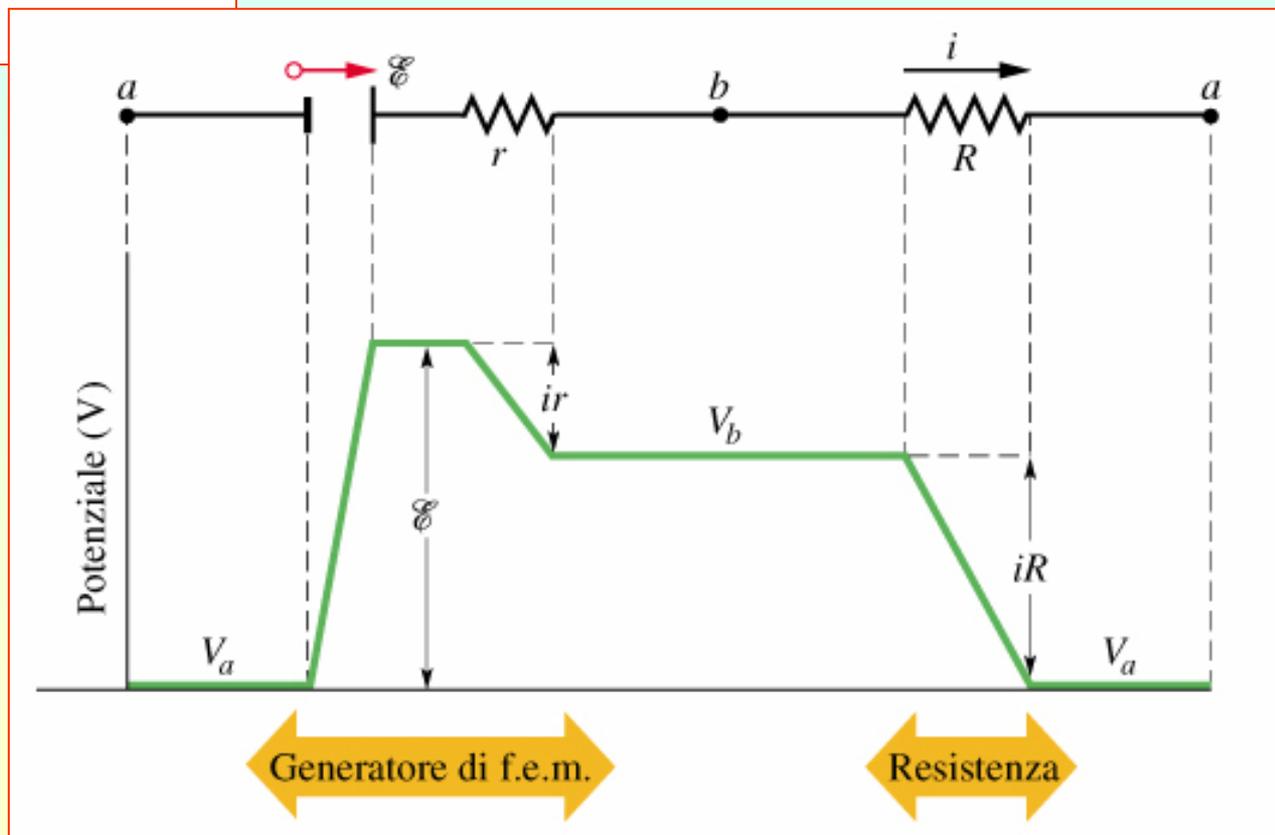
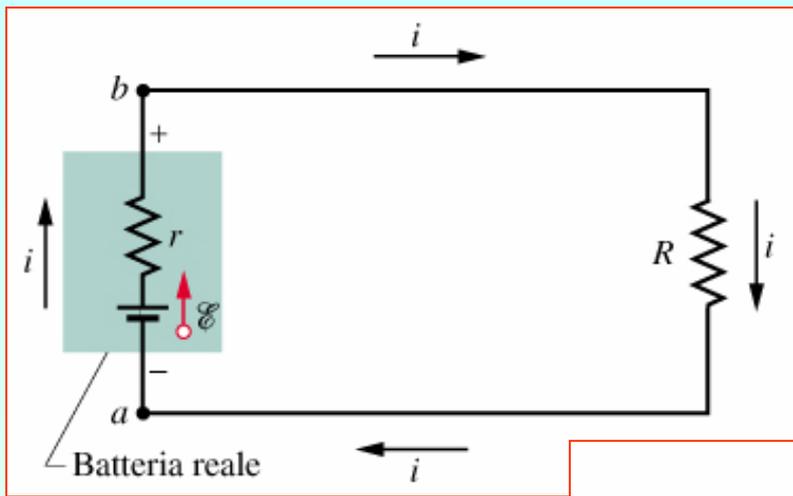
Potenza: per definizione la potenza associata al lavoro e` $P = L/t = Ri^2 = V^2/R = Vi$. Si noti che la potenza si misura in watt (o kW) mentre il kWh e` un lavoro, o l'energia elettrica utilizzata per compiere il lavoro.

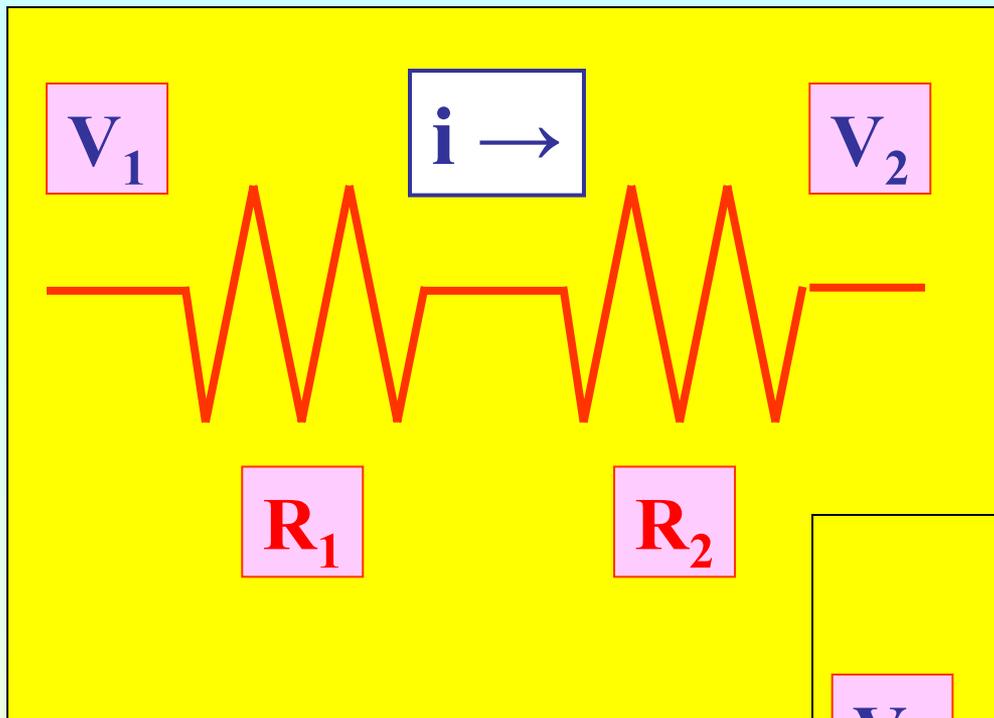
Le leggi di Ohm

$$V = Ri \quad R = \rho \frac{l}{S}$$

forniscono la relazione tra il passaggio della corrente in un conduttore e la tensione applicata ai suoi capi. La grandezza R , misurata in $[\Omega]$, e' detta **resistenza** elettrica e la grandezza ρ , misurata in $[\Omega \text{ m}]$, e' detta resistivita`. Il suo inverso, la conducibilita` $\sigma = 1/\rho$, e' misurata in Siemens $[\Omega^{-1}\text{m}^{-1}]$.

In un circuito le resistenze possono essere in serie o in parallelo. La resistenza interna r di un generatore di tensione (generatore ideale) si puo` spesso trascurare nel calcolo della **resistenza equivalente** R_{eq} di un circuito.

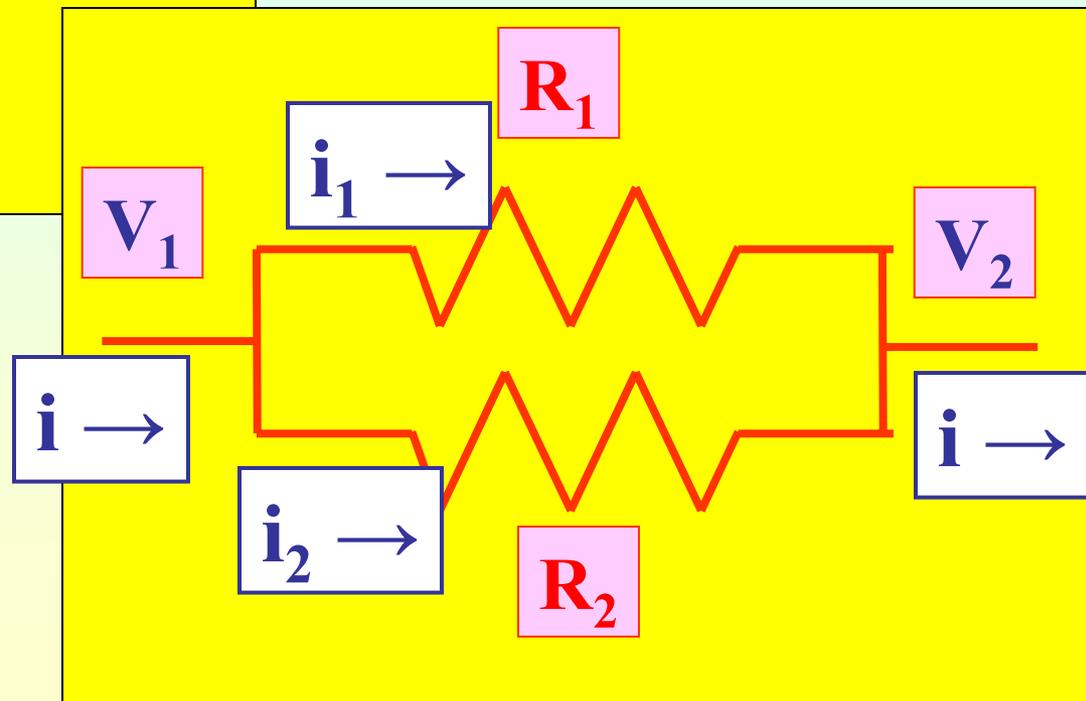




$$V = (R_1 + R_2)i$$

$$i = i_1 + i_2$$

$$R_1 i_1 = R_2 i_2$$



Poiche' la corrente che attraversa resistenze in serie e' la stessa, la resistenza equivalente e' data da:

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

Resistenze in parallelo hanno invece la stessa differenza di potenziale ai loro capi e la corrente si suddivide tra i vari rami in modo inversamente proporzionale ai valori delle resistenze. In questo caso la resistenza equivalente e' data da:

Per esempio, nel caso di 2 resistenze la resistenza equivalente e' data da:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Per i condensatori vale la regola opposta:
se in parallelo la capacità totale è
se in serie la capacità totale è

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

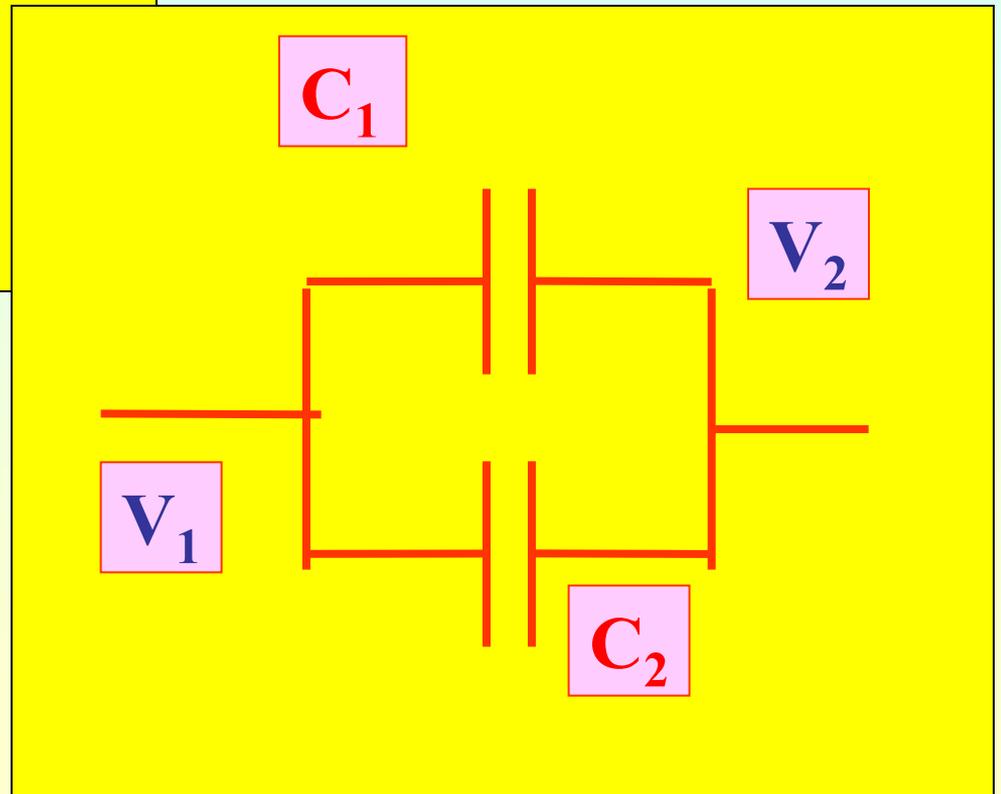
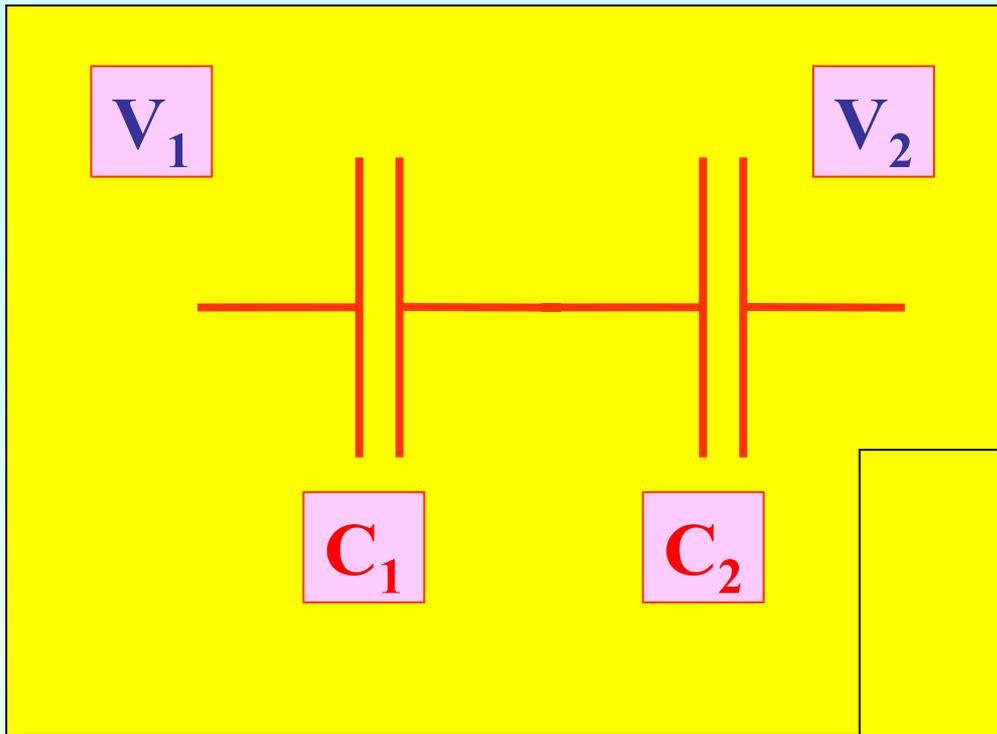
La capacità di un condensatore è definita dal rapporto tra la carica elettrica accumulata sulle armature e la differenza di potenziale a cui si trovano:

$$C = \frac{|q|}{V_1 - V_1}$$

C dipende dalla costante dielettrica del mezzo interposto tra le armature e dalle sue caratteristiche geometriche.

La capacità, minima nel vuoto, si misura in farad [1F = 1C/1V] o sottomultipli.

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$



Serie

Parallelo

Resistenze

$$R_{\text{eq}} = \sum_{j=1}^n R_j$$

Stessa corrente attraverso
tutte le resistenze

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}$$

Stessa differenza di potenziale
ai capi di tutte le resistenze

Serie

Parallelo

Condensatori

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j}$$

Stessa carica in tutti
i condensatori

$$C_{\text{eq}} = \sum_{j=1}^n C_j$$

Stessa differenza di potenziale
ai capi di tutti i condensatori

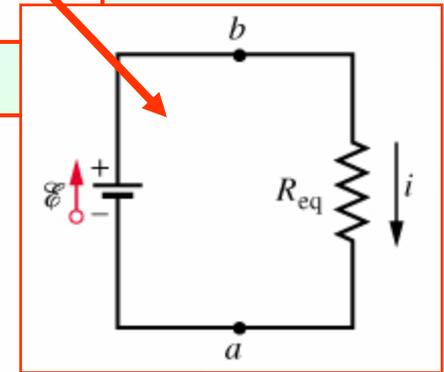
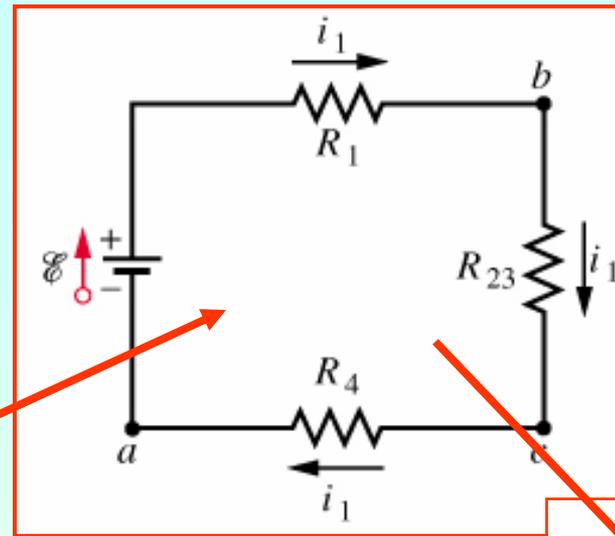
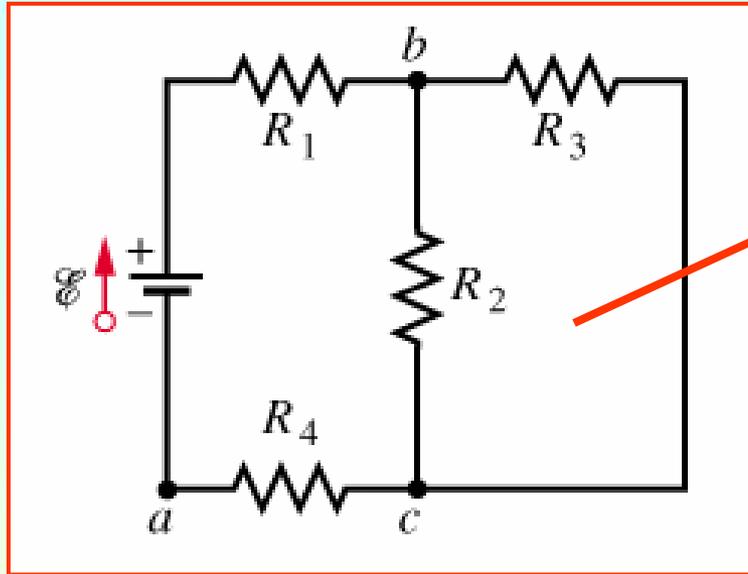
La semplificazione e risoluzione di un circuito elettrico si ottiene applicando alcuni teoremi (per esempio quelli di Thevenin e Norton).

Spesso un circuito si puo` semplificare in un circuito equivalente applicando le **leggi di Kirchoff**:

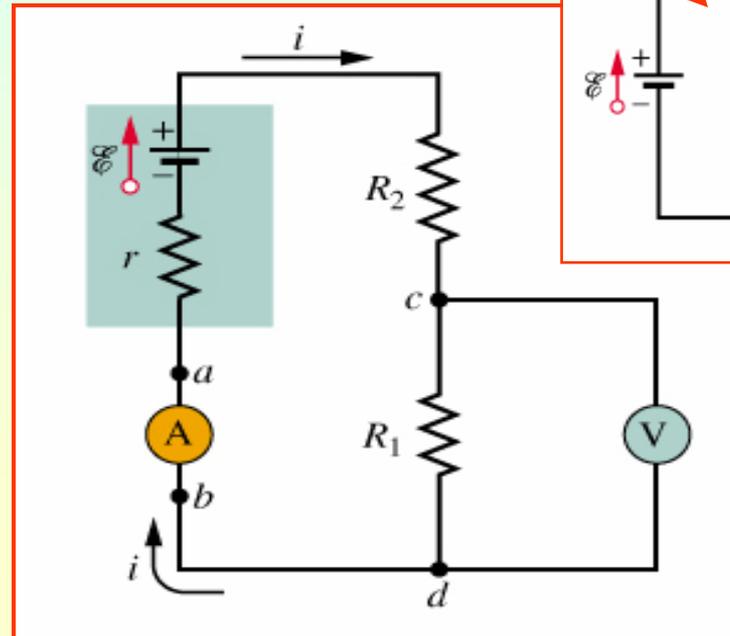
- *prima legge* (**dei nodi**): in un nodo la somma delle correnti e` nulla,
- *seconda legge* (**delle maglie**): in una maglia la somma algebrica delle tensioni e` nulla.

Inoltre deve valere il *Principio di sovrapposizione*: se in una rete sono presenti piu generatori di tensione, la corrente in un ramo e` la somma delle correnti prodotte dai singoli generatori.

semplificazione di un circuito



circuito a maglia singola
che mostra come collegare
un amperometro e un
voltmetro



Applicazione del principio di sovrapposizione

Come esempio, si abbia il circuito a 2 maglie, con:

$$E_1 = 3 \text{ V}, \quad E_2 = 6 \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \Omega, \quad R_2 = 4 \Omega$$

Per le leggi di Kirchoff:

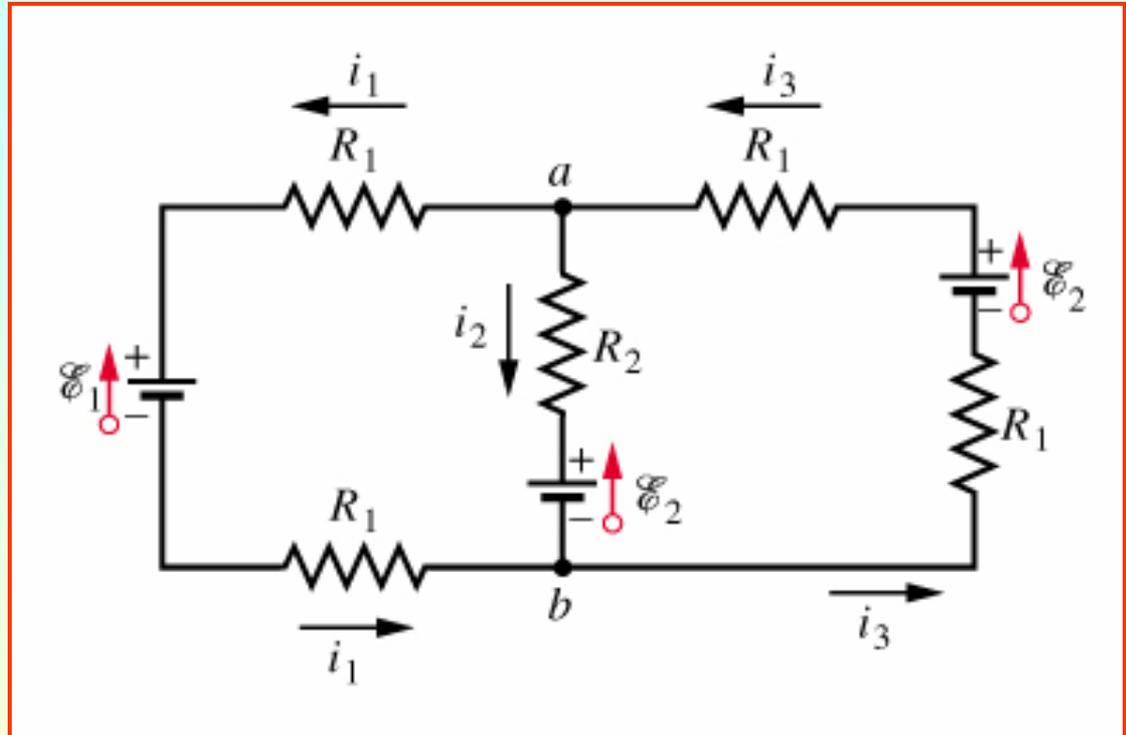
nel nodo a: $i_3 = i_1 + i_2$,

nella maglia di sinistra

$$-i_1 R_1 - E_1 - i_1 R_1 + E_2 + i_2 R_2 = 0$$

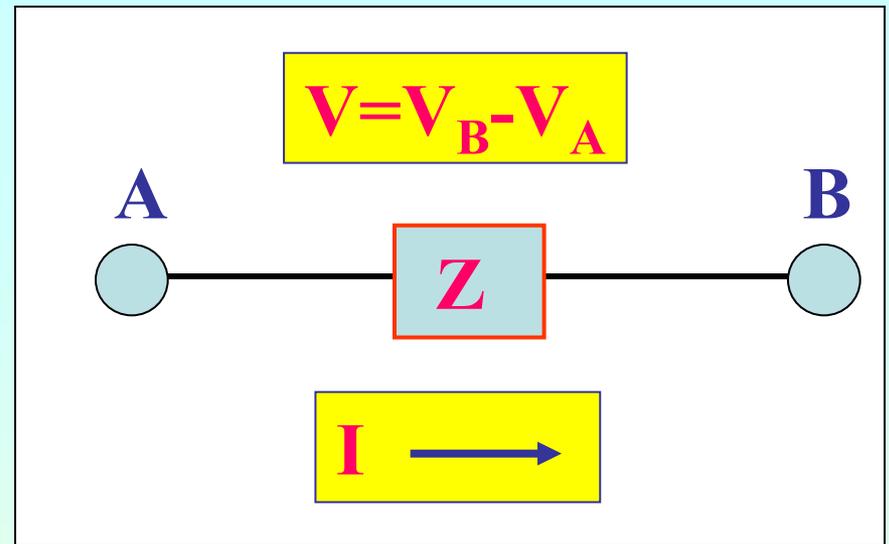
nella maglia di destra:

$$-i_3 R_1 - E_2 - i_3 R_1 + E_2 + i_2 R_2 = 0$$



I segni delle correnti e il verso di percorrenza delle maglie sono stati scelti in modo arbitrario. Risolvendo il sistema di equazioni si ricavano le correnti e il loro verso in ogni ramo del circuito.

In circuiti a corrente alternata si deve considerare anche la fase tra corrente e tensione.



In ogni circuito valgono le leggi di Ohm ($V = ZI$) e di Kirchhoff (per maglie e nodi). L'**impedenza** Z è data da resistenze $Z = R$, induttanze $Z = j\omega L$ o capacità $Z = -j/\omega C$. In circuiti puramente resistivi, la corrente e la tensione sono in fase, nelle induttanze la tensione anticipa la corrente, nei condensatori la corrente anticipa la tensione.

1) R, puramente dissipativo, $V = Ri$
non introduce spostamenti di fase

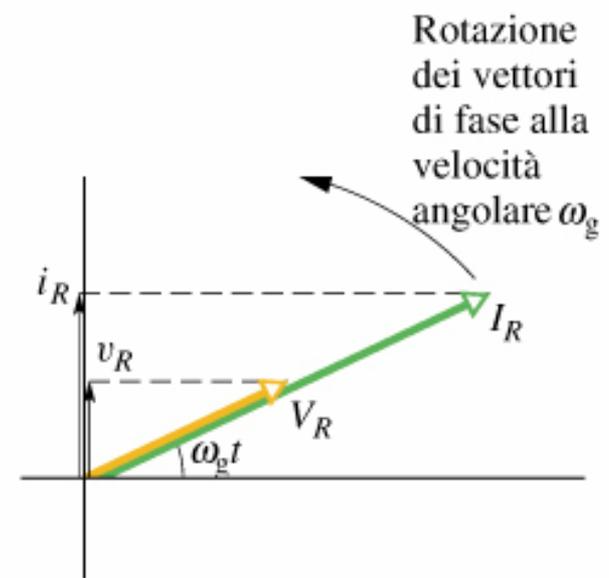
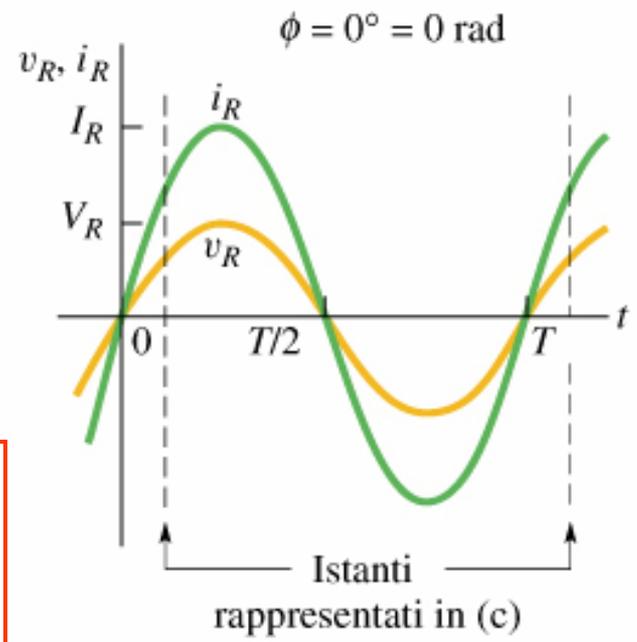
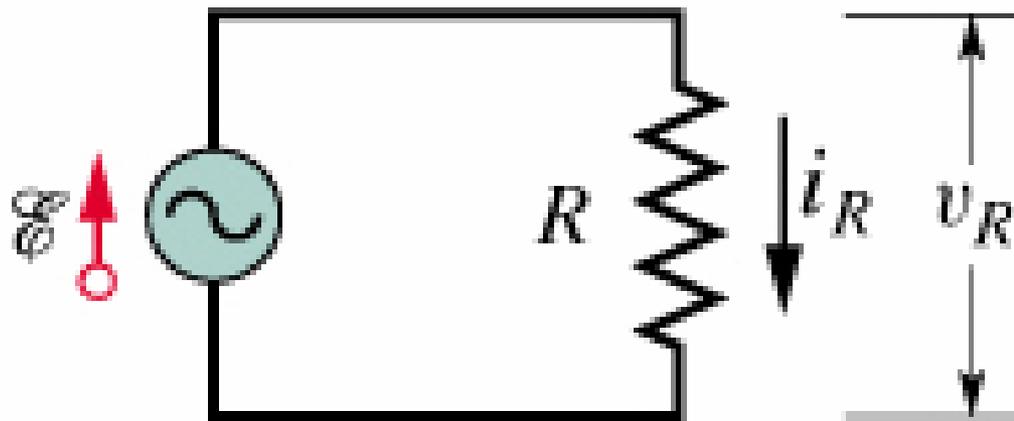
$$2) \quad V = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (i_0 e^{j\omega t}) = Li_0 j\omega e^{j\omega t} = j\omega Li$$

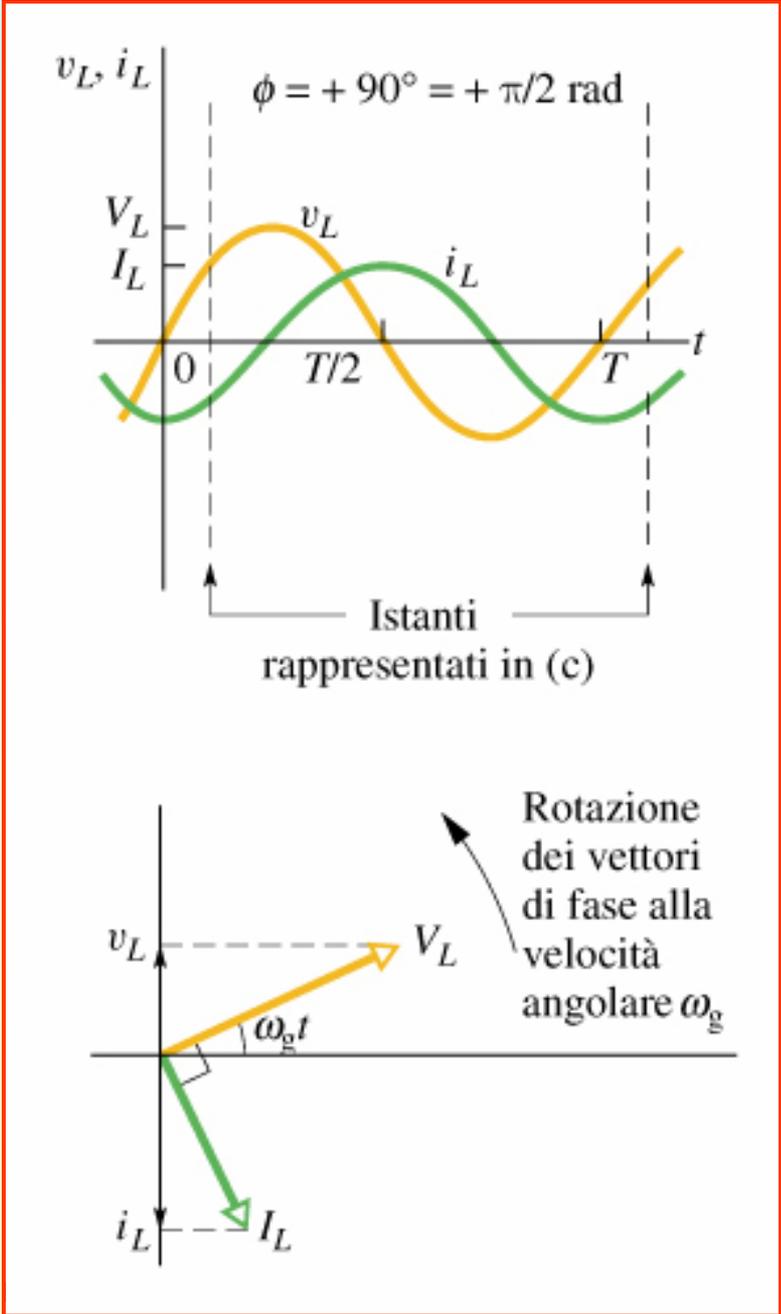
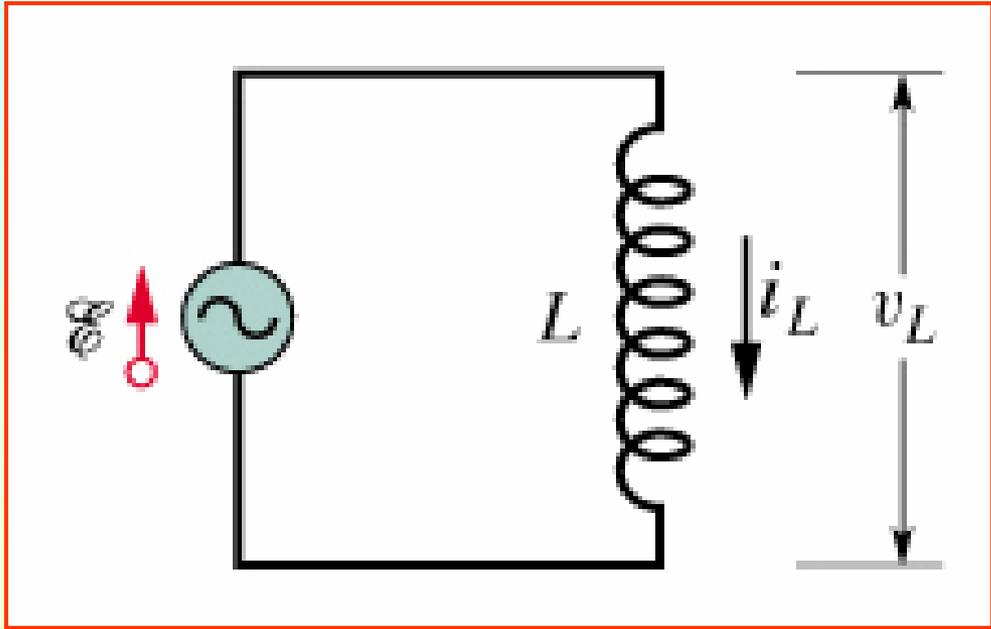
$$3) \quad V = \frac{Q}{C}; \quad \text{(anticipo di fase)}$$

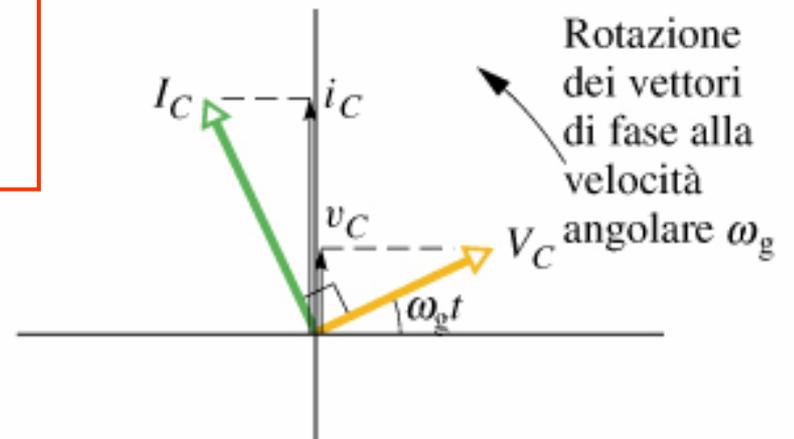
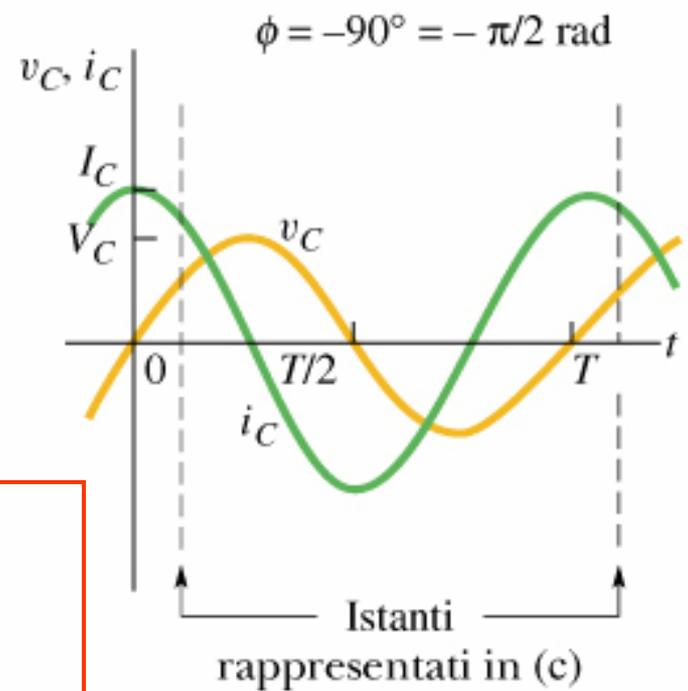
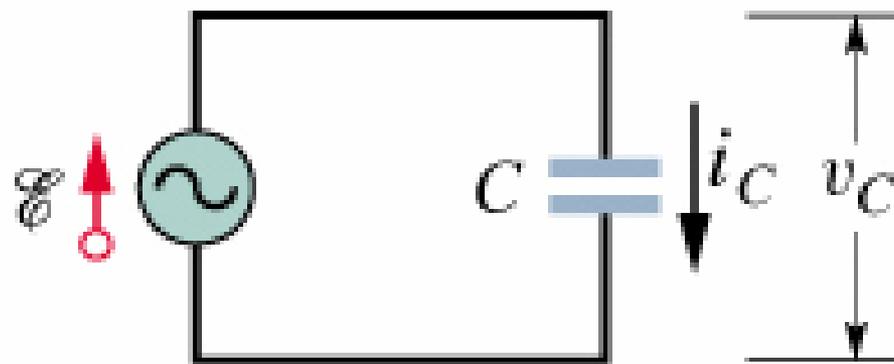
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{i}{C};$$

$$i = C \frac{dV}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_0 e^{j\omega t}) = CV_0 j\omega e^{j\omega t} = j\omega CV$$

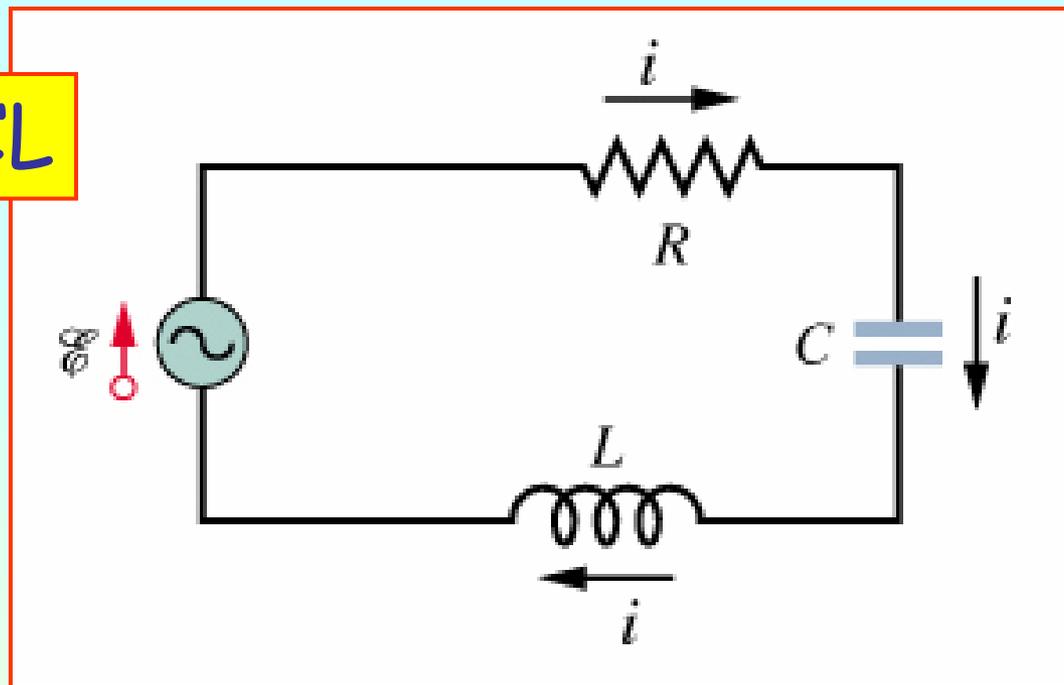
quindi $V = \frac{1}{j\omega C} i = -\frac{j}{\omega C} i$ **(ritardo di fase)**





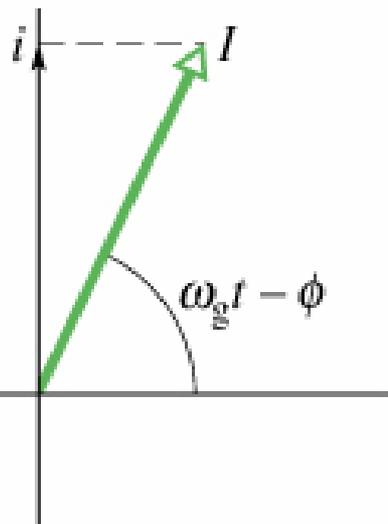


circuito RCL

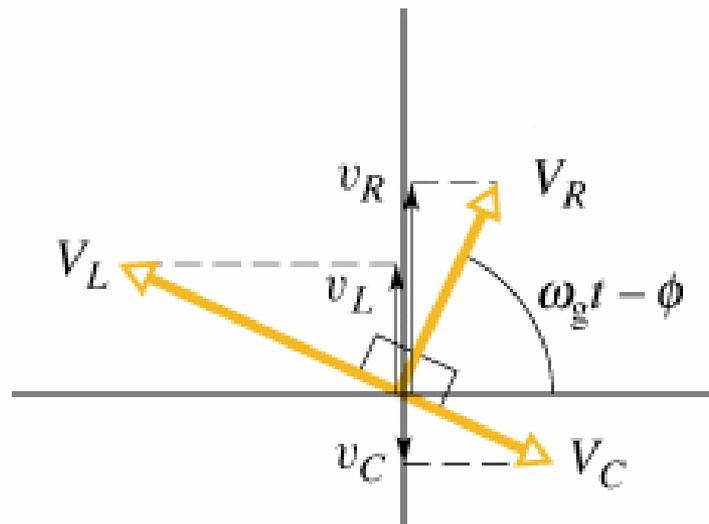


Relazioni tra fase e ampiezza per correnti e tensioni alternate

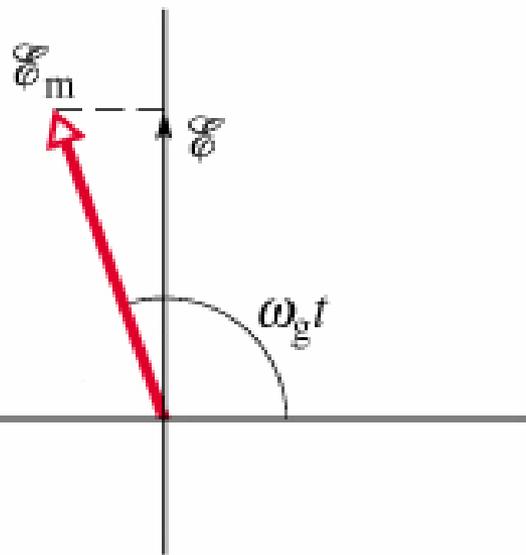
Elemento di circuito	Simbolo	Resistenza o reattanza	Fase della corrente	Angolo di fase ϕ	Relazione tra le ampiezze
Resistenza	R	R	in fase con v_R	0°	$V_R = IR$
Condensatore	C	X_C	precede v_C di 90°	-90°	$V_C = IX_C$
Induttanza	L	X_L	segue v_L di 90°	$+90^\circ$	$V_L = IX_L$



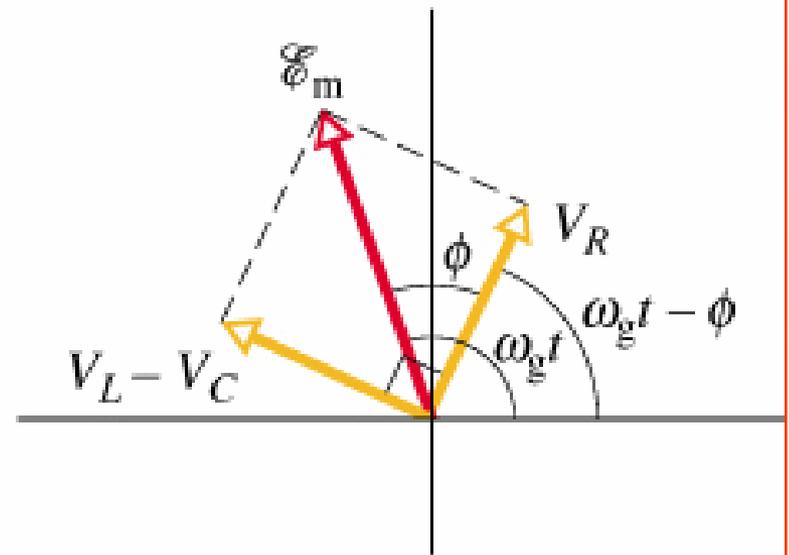
(a)



(b)



(c)



(d)

Cominciamo a esaminare i circuiti RC e RL alimentati in continua; vedremo in seguito gli stessi circuiti alimentati in alternata e il loro uso come filtri.

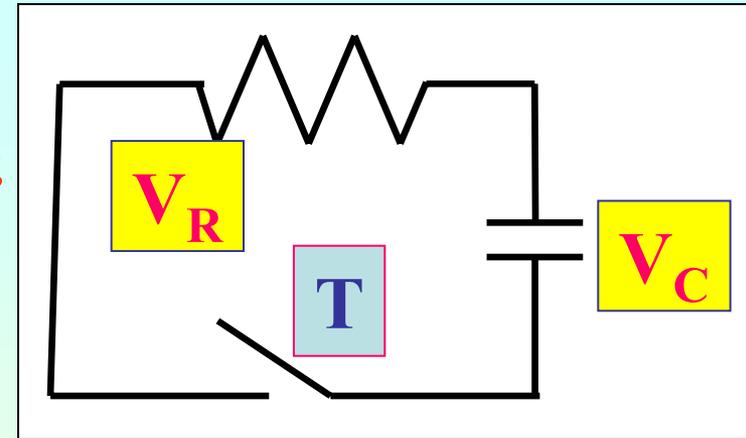
Scarica di un condensatore

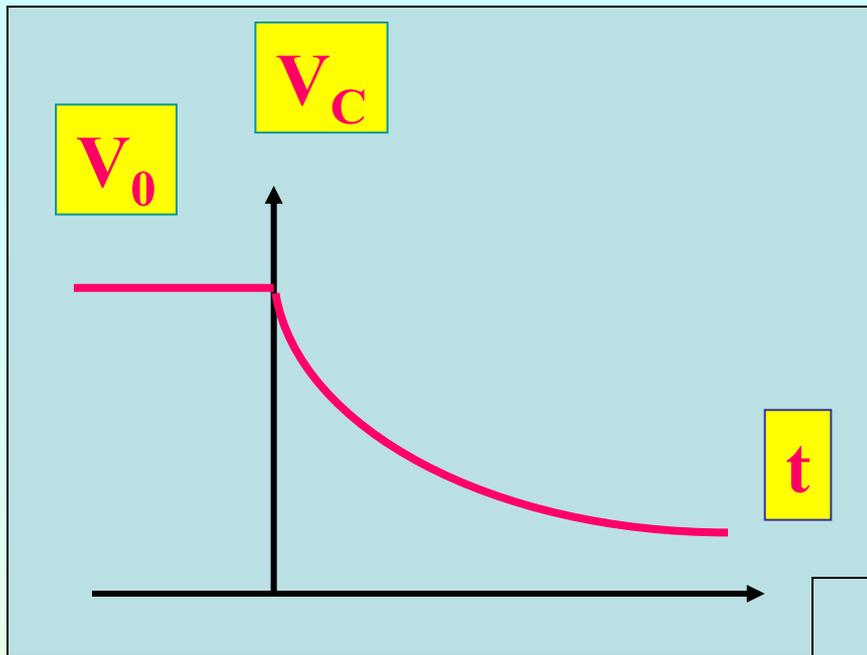
A tasto aperto nel circuito non circola corrente. Alla chiusura del tasto si ha:

$$V_C + Ri = V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = 0$$

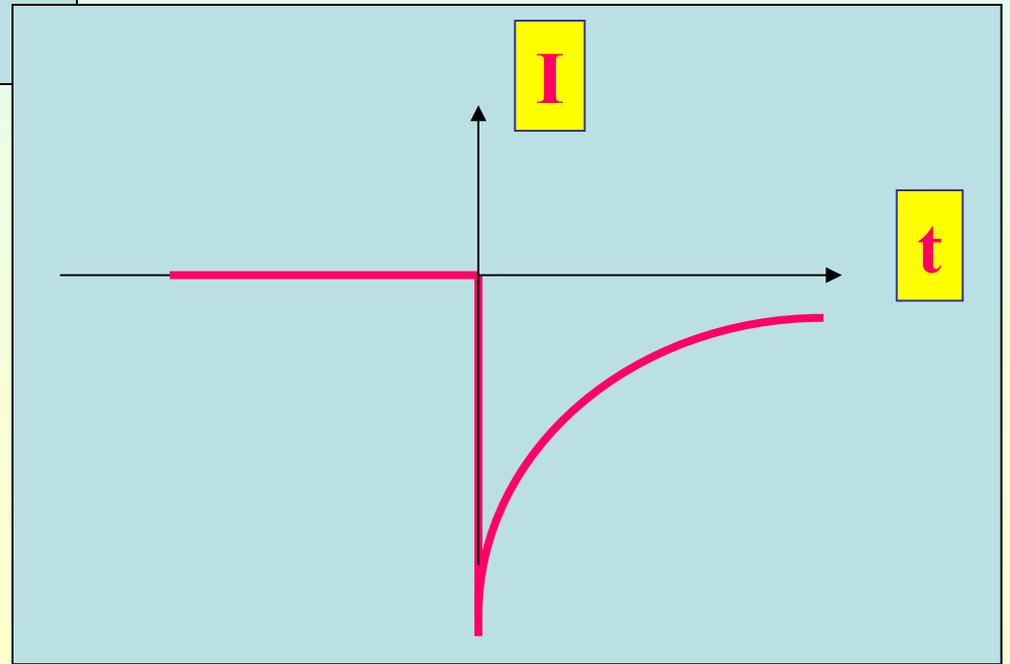
Se V_0 e' la carica iniziale del condensatore, separando le variabili e posto **RC = τ** (**costante di tempo**) e, si ottiene:

$$V_C = V_0 e^{-t/\tau}, \quad i = -\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

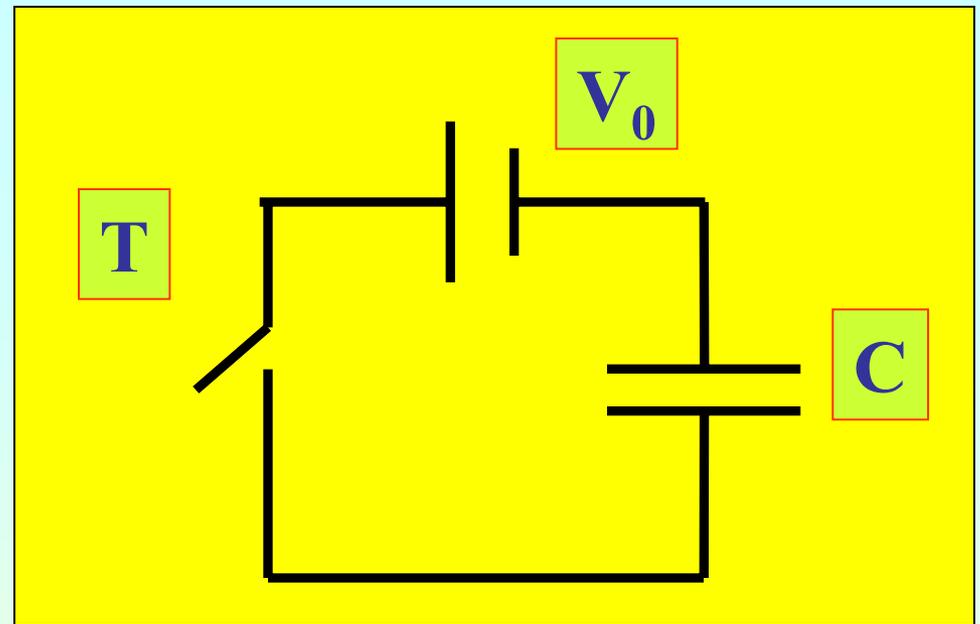




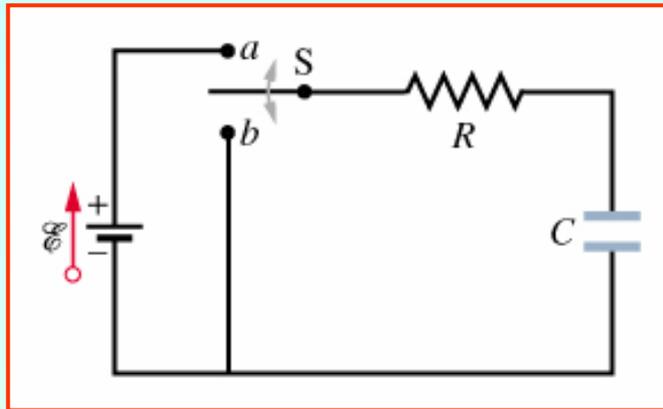
$$V_C = V_0 e^{-t/\tau}, \quad i = -\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$



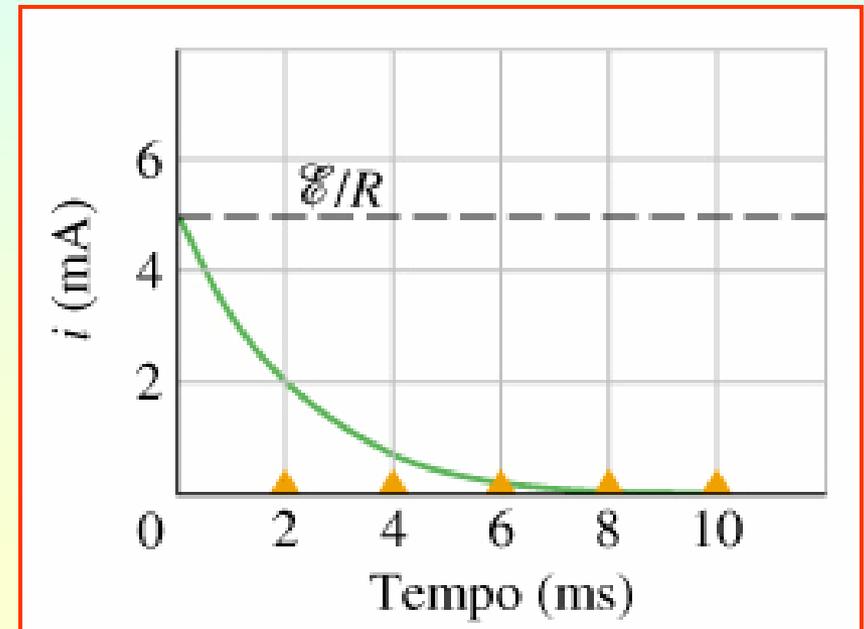
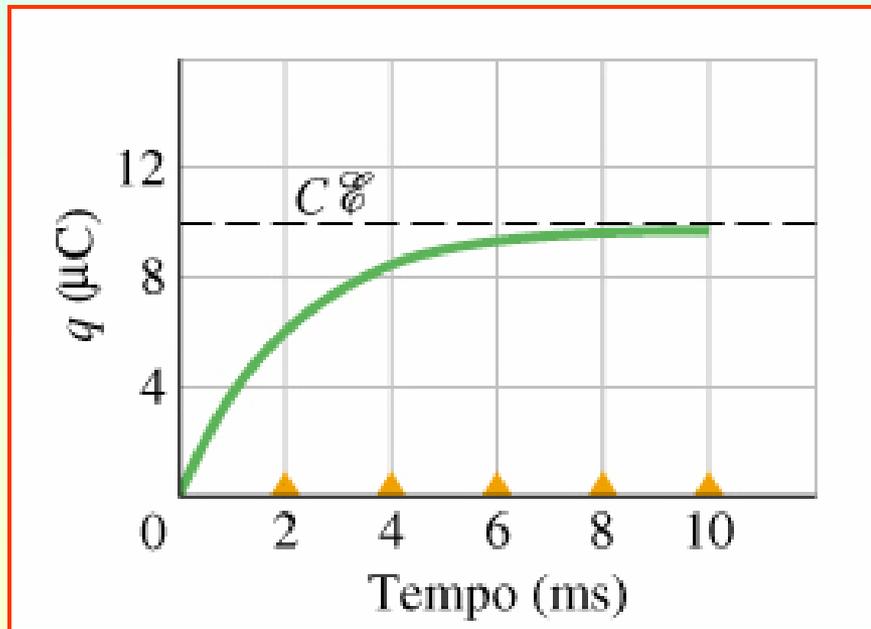
Carica di un condensatore



Alla chiusura del tasto il condensatore, inizialmente scarico, si porta alla tensione V_0 del generatore di tensione; dopo si comporta come un circuito aperto. La corrente è discontinua. Il verso della corrente è opposto a quello corrispondente alla carica del condensatore.



$$V_C = V_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad i = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$



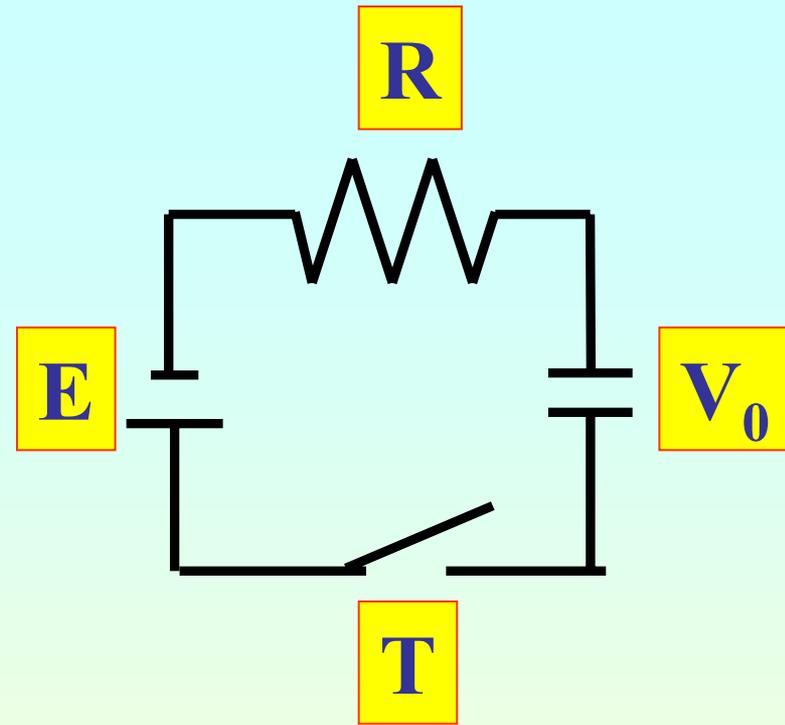
Circuito RC

(continuità in tensione)

Supponiamo che, a tasto aperto, sia $V_C = V_0$.

Poiché:

$$i = C \frac{dV_C}{dt}$$



alla chiusura del tasto, per la legge di Kirchoff sulle maglie, si deve avere: $E = V_R + V_C = RCdV_C/dt + V_C$, da cui, posto **$RC = \tau$** (*costante di tempo*), si ottiene:

$$(E - V_C)dt = RCdV_C \text{ ossia } \frac{dV_C}{(E - V_C)} = \frac{1}{\tau} dt$$

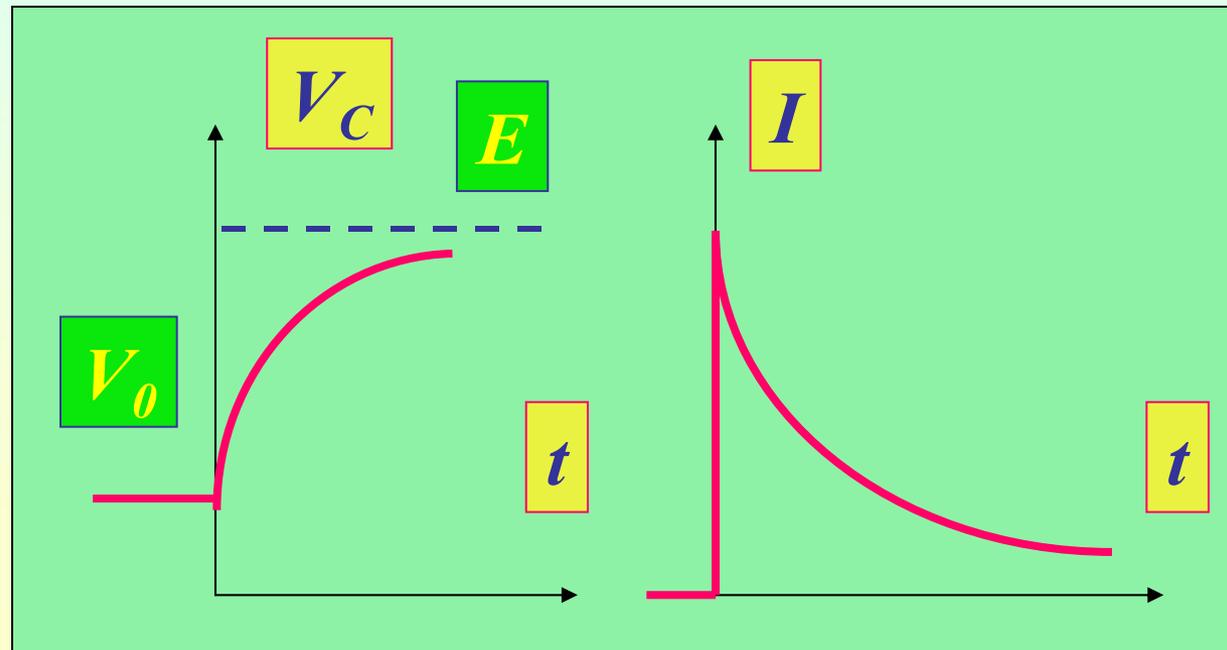
da cui, integrando, si ha:

$$\log(V_C - E) = -\frac{t}{\tau} + A \text{ con } \tau = RC, \text{ e } A = \log(V_0 - E)$$

$$V_C = E - (E - V_0)e^{-t/\tau}, \quad \text{se } V_0 = 0, V_C = E(1 - e^{-t/\tau}),$$

$$i = C \frac{dV_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

Quindi si ha
continuita' in
tensione:

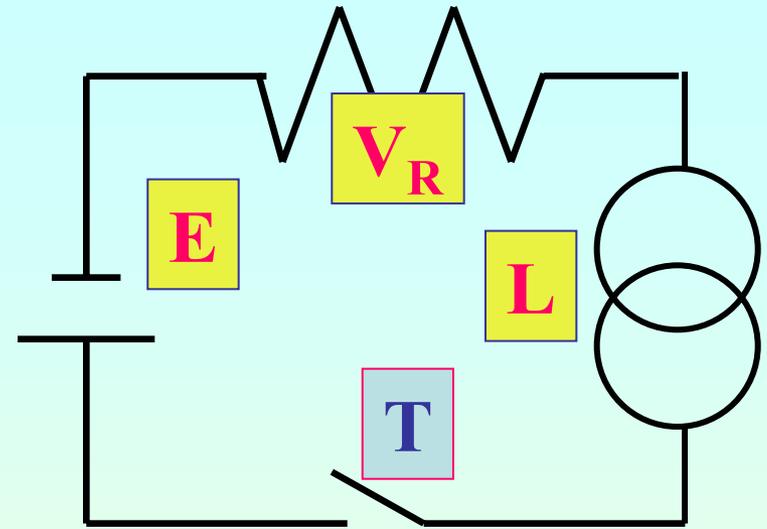


Circuito RL

(continuità in corrente)

si ha:

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$



Per la legge di Kirchoff sulle maglie alla chiusura del tasto si deve avere $E - Ri - Ldi/dt = 0$. Da questa, dividendo per R e posto $L/R = \tau$ (*costante di tempo*), si ottiene:

$$\left(i - \frac{E}{R} \right) dt = -\frac{L}{R} di, \text{ ossia } \frac{di}{\left(i - \frac{E}{R} \right)} = -\frac{1}{\tau} dt$$

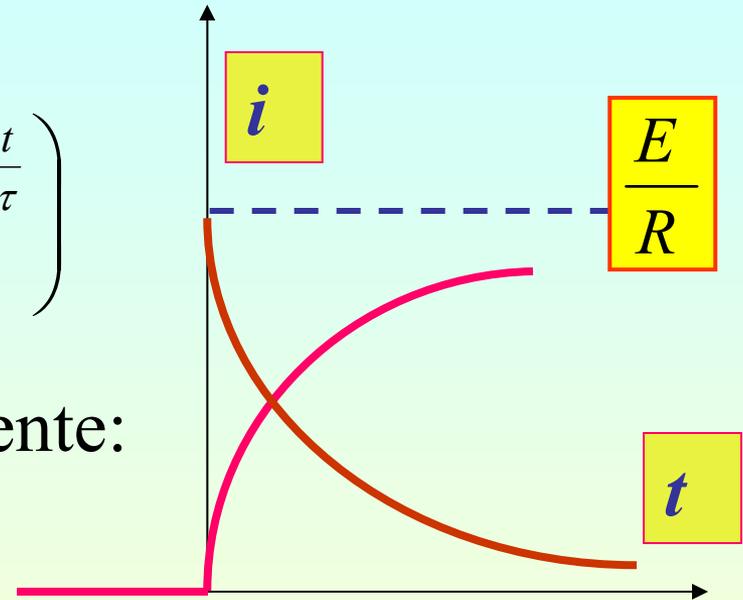
da cui, integrando e ricordando che $i = 0$ per $t = 0$, si ottiene:

$$\frac{i - \frac{E}{R}}{-\frac{E}{R}} = e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ ossia } i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Quindi si ha continuita' in corrente:

$$V_R = Ri = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad V_L = E - V_R = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\ln\left(i - \frac{E}{R}\right) = -\frac{t}{\tau} + A, \text{ con } \tau = \frac{R}{L} \text{ e } A = \ln\left(-\frac{E}{R}\right)$$

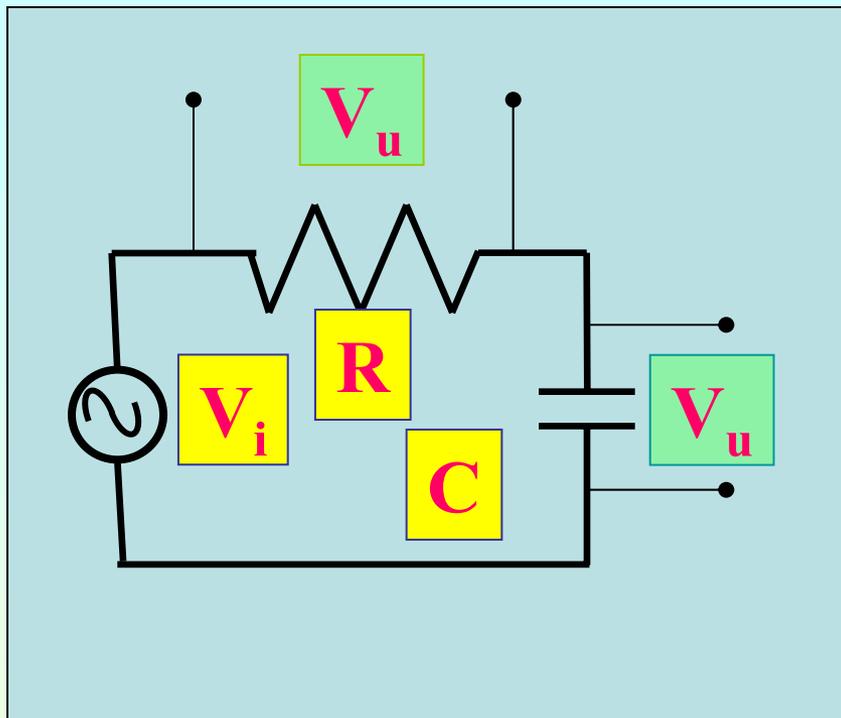


Anche V_R e' continua, mentre V_L e' discontinua. In condizioni stazionarie ($di/dt = 0$) e' come se l'induttanza non esistesse; all'inizio, invece, L si oppone alle variazioni di corrente.

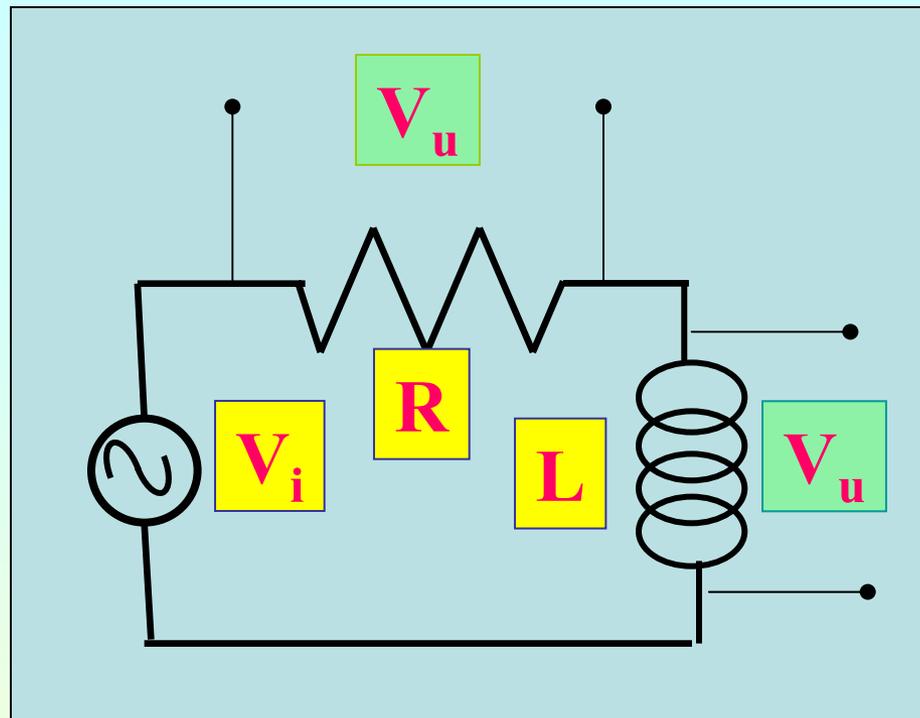
FILTRI

Consideriamo ora circuiti RC o RL alimentati a corrente alternata.

- Il **filtro passa basso** si ha prendendo l'uscita ai capi del condensatore nel circuito RC, o ai capi della resistenza nel circuito RL.
- Il **filtro passa alto** si ha prendendo l'uscita ai capi della resistenza nel circuito RC, o ai capi dell'induttanza nel circuito RL.
- I **filtri passa banda** e **sopprimi banda** sono una combinazione dei due filtri precedenti.



$$i = \frac{V_i}{Z} = \frac{V_i}{R - j/\omega C}$$



$$i = \frac{V_i}{Z} = \frac{V_i}{R + j\omega L}$$

Passa basso

Il guadagno di un filtro è definito come rapporto tra la tensione di uscita e quella di ingresso. Nel caso del filtro passa basso l'uscita è ai capi del condensatore per il circuito RC, e ai capi della resistenza per il circuito RL. Si ha dunque:

$$G = \frac{V_u}{V_i} = \frac{i \left(-\frac{j}{\omega C} \right)}{i \left(R - \frac{j}{\omega C} \right)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$G = \frac{V_u}{V_i} = \frac{Ri}{i(R + j\omega L)} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega L}{R}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

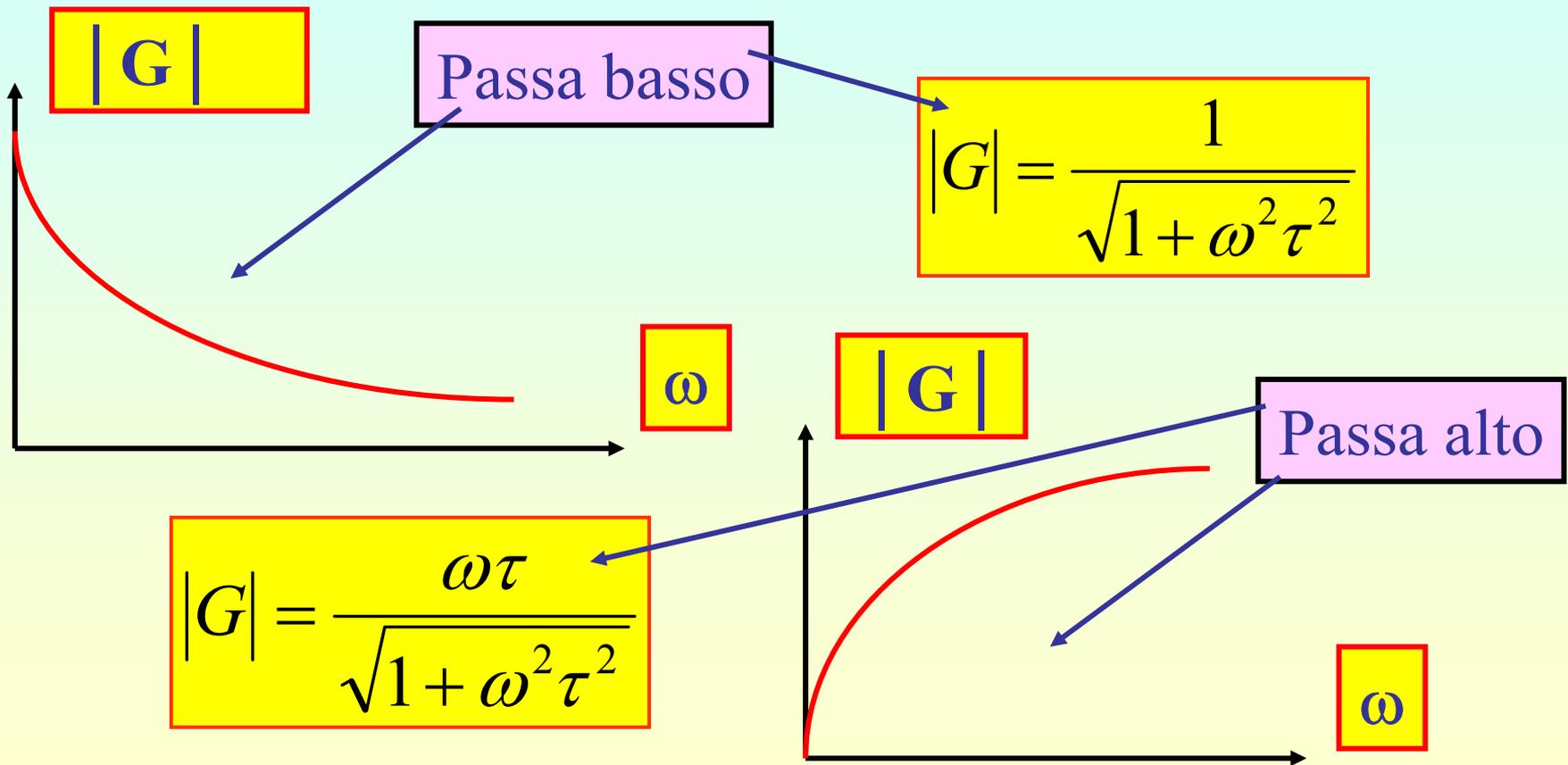
Passa alto

Analogamente, nel caso del filtro passa alto l'uscita è ai capi della resistenza per il circuito RC, e ai capi dell'induttanza per il circuito RL. Si ha dunque:

$$G = \frac{V_u}{V_i} = \frac{Ri}{i\left(R - \frac{j}{\omega C}\right)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

$$G = \frac{V_u}{V_i} = \frac{i(j\omega L)}{i(R + j\omega L)} = \frac{(j\omega \frac{L}{R})}{(1 + j\omega \frac{L}{R})} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

Il modulo del guadagno fornisce il rapporto tra le ampiezze delle tensioni di uscita V_u e di ingresso V_i .



SEGNALI PERIODICI

Si ripetono ogni periodo T (s) e non hanno informazioni se non il loro riconoscimento; tuttavia, molti segnali sono quasi-periodici. Il più semplice segnale periodico è del tipo:

$$f(t, \omega) = A \sin(\omega t + \phi)$$

da cui si vede che un segnale periodico può essere analizzato in tempo o in frequenza.

Cominciando dal primo caso, la descrizione del segnale nel tempo può essere approssimata con:

- un polinomio di grado n ,
- sviluppo in serie di Taylor,
- sviluppo in serie di Fourier.

1) Polinomio $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots + a_nt^n$

Approssima la funzione in $(n+1)$ punti arbitrari, ma diverge all'esterno di essi e non è periodico.

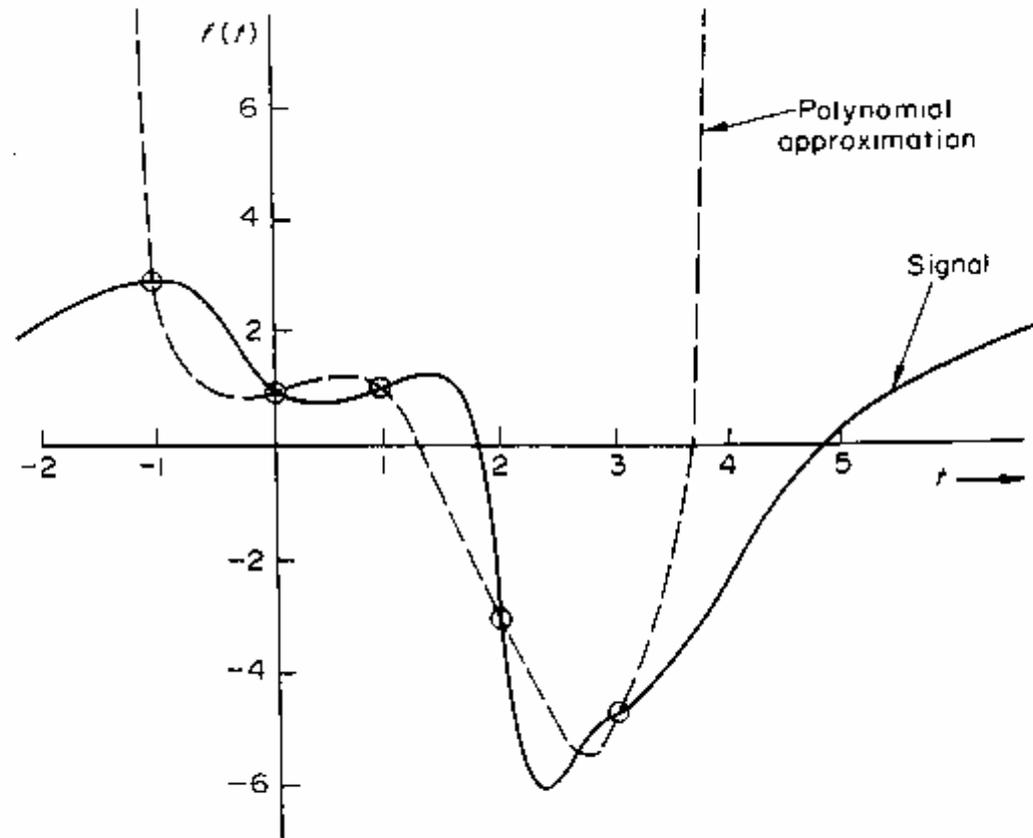


Figure 2.2 Approximation of a signal waveform by a polynomial. Here the function $f(t) = (1 + t + 0.5 t^2 - 2t^3 + 0.5 t^4)$ has been fitted to a signal waveform at five points

2) **serie di Taylor** nel punto a:

$$f(t) \sim f(a) + (t-a) \frac{df(a)}{dt} + \dots + \frac{(t-a)^n}{n!} \frac{d^n f(a)}{dt^n} + \dots$$

Diverge per $t \neq a$ e non e' periodica.

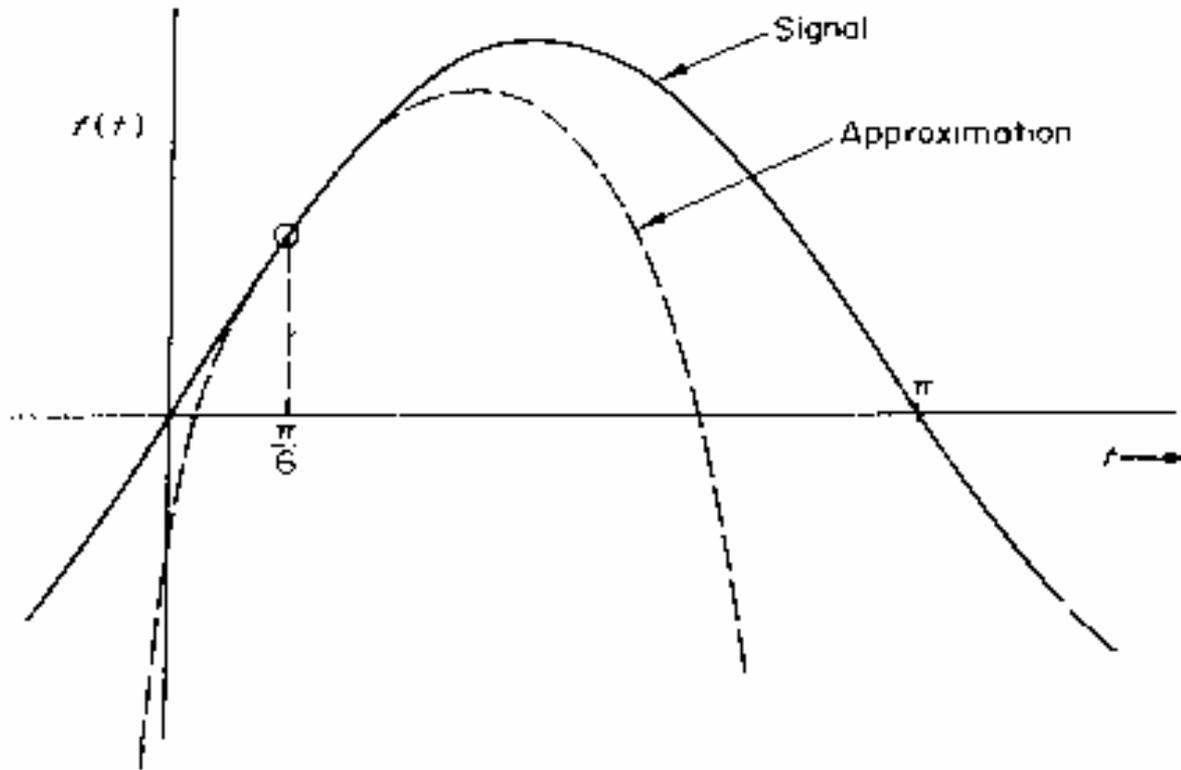


Figure 2.3 *Approximation of a signal waveform by a Taylor series. Here the first three terms of the series have been used to approximate the function $(\sin t)$ in the region $t = \pi/6$*

3) **serie di Fourier**. Ha precisione costante per ogni t in quanto le funzioni sinusoidali sono periodiche.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n \omega_1 t$$

Un gran numero di sistemi elettrici o meccanici (*sistemi lineari*) risponde in modo sinusoidale a uno stimolo sinusoidale.

Queste funzioni sono ortogonali, ossia i coefficienti dei diversi termini non dipendono dal numero o dal valore degli altri termini della serie.

L'analisi nel dominio delle frequenze consiste nel considerare ogni curva come *somma di funzioni sinusoidali* di opportuna ampiezza, periodo e fase che costituiscono un insieme di funzioni ortogonali. Poiché $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ il periodo T si misura in s e la frequenza f in s^{-1} o Hz . Lo sviluppo in serie di Fourier introduce la frequenza fondamentale ω_1 e i suoi multipli interi $n\omega_1$ (detti armoniche) e definiscono lo *spettro in frequenza*. Le ampiezze delle armoniche diminuiscono con l'aumentare di n .

Per esempio, la funzione

$$f(t) = \sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t - \dots$$

rappresenta lo sviluppo della funzione dente di sega.

PERIODIC SIGNALS

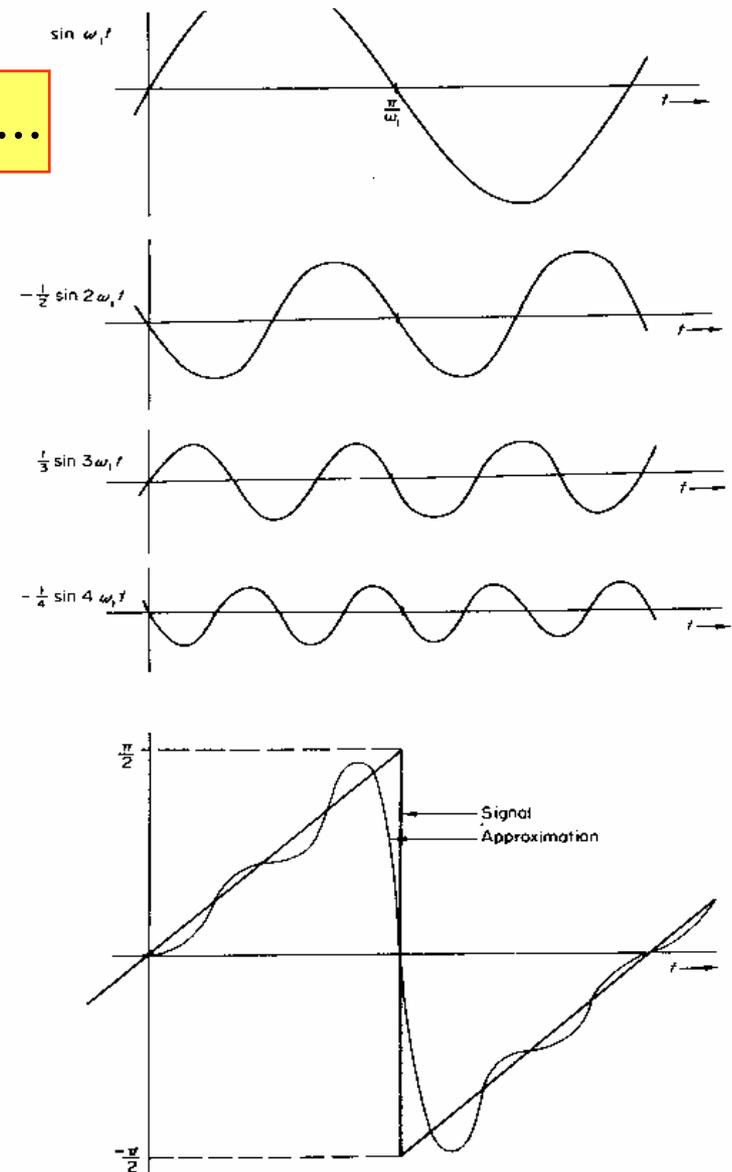


Figure 2.4 Synthesis of a periodic waveform of 'sawtooth' form by the addition of a number of sinusoidal functions

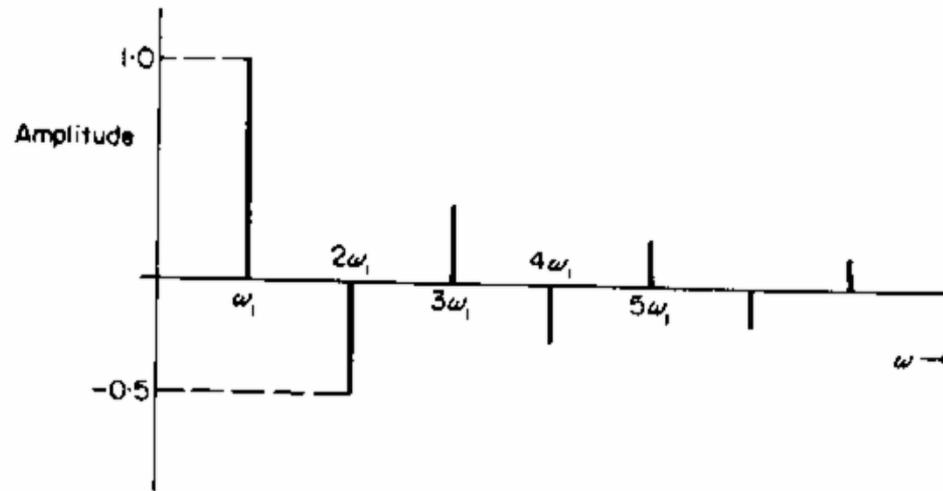
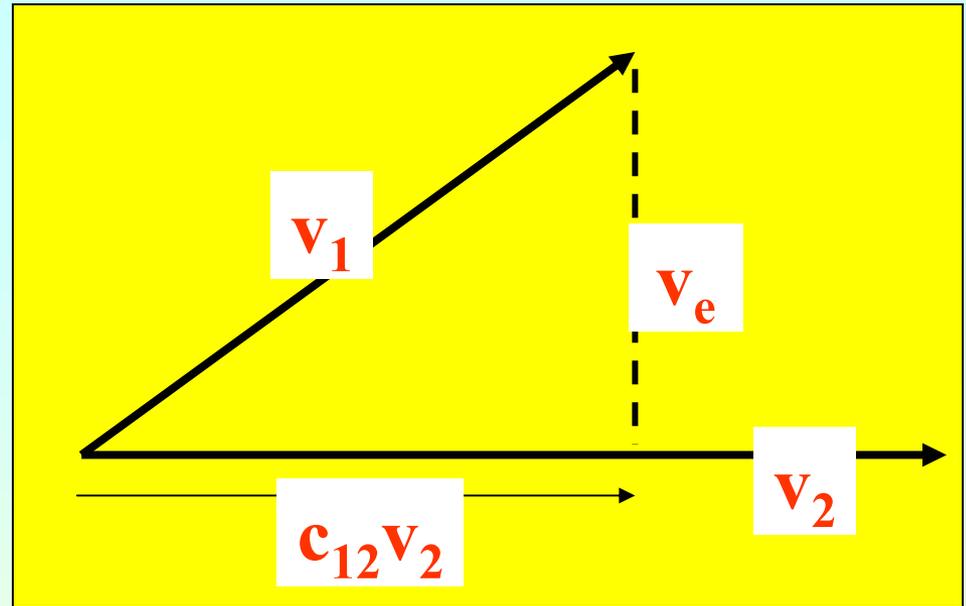


Figure 2.5 The frequency spectrum of the sawtooth wave illustrated in figure 2.4

ORTOGONALITA`



Un'analogia con i vettori aiuta a comprendere il concetto di ortogonalita`.

Sia $c_{12}v_2$ la componente di v_1 lungo v_2 , ossia i due vettori siano legati dalla relazione $v_1 = c_{12}v_2 + v_e$.

I vettori v_1 e v_2 sono **ortogonali** se $c_{12} = 0$; invece sono identici se $v_e = 0$ e $c_{12} = 1$.

Nel caso dei segnali sia $f_1(t) = c_{12}f_2(t) + f_e(t)$ e calcoliamo le condizioni di minimo errore $f_e(t)$. Con il metodo dei minimi quadrati si deve rendere minima la quantità:

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12}f_2(t)]^2 dt$$

ossia:

$$\frac{d\varepsilon}{dc_{12}} = 0 = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \frac{d}{dc_{12}} \left[\int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) dt + 2c_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t) dt + c_{12}^2 \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \right]$$

Da cui si ottiene la condizione di ortogonalita`,
quando si ha:

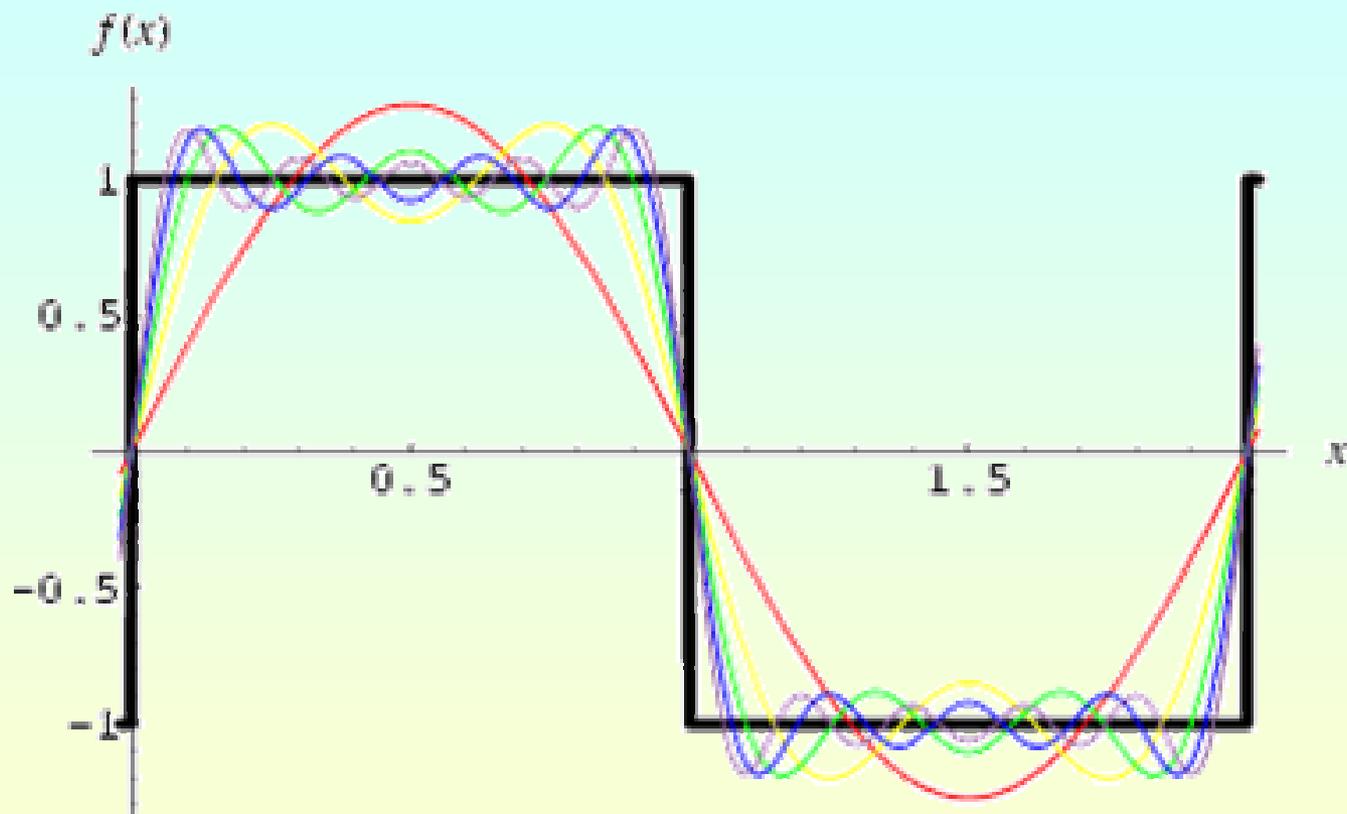
$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} = 0$$

ossia per:

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0$$

Se $c_{12} = 0$, la funzione $f_1(t)$ non contiene componenti di $f_2(t)$ e le due funzioni si dicono ortogonali. Se invece $f_1(t) \equiv f_2(t)$ allora $c_{12} = 1$.

Per esempio, se si vuole approssimare un'onda quadra con una funzione sinusoidale si ha:



$$f_1(t) = +1 \quad \text{per } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}; \quad f_1(t) = -1 \quad \text{per } \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f_2(t) = \sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \quad [\varphi = 0 \text{ perche' } f_2(t) = 0 \text{ a } t = 0]$$

$$c_{12} = \frac{\int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t dt - \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} \sin \omega t dt}{\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt} = \frac{(1+1+1+1)}{\pi/\omega} = \frac{4}{\pi} > 1$$

La funzione **$f_1(t) = (4/\pi) \sin \omega t$** e' quindi l'approssimazione sinusoidale di un'onda quadra che fornisce il minimo errore quadratico medio.

Le funzioni trigonometriche seno e coseno sono ortogonali in 1 periodo. Per esempio, usando le formule di Eulero, si ha:

$$\sin mx = \frac{1}{2j}(e^{jmx} - e^{-jmx});$$

$$\cos mx = \frac{1}{2}(e^{jmx} + e^{-jmx})$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nxdx = \frac{1}{(2j)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} (e^{jmx} - e^{-jmx})(e^{jnx} - e^{-jnx})dx =$$

$$= \frac{-1}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} (e^{j(m+n)x} - e^{-j(m+n)x} - e^{j(m-n)x} - e^{-j(m-n)x})dx =$$

$$= \frac{-1}{4} \left\{ 2 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos[(m+n)x]dx - 2 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos[(m-n)x]dx \right\}$$

da cui, per $m = n$, si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nxdx = -\frac{1}{4} \left[\frac{-2}{2m} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2mxdx - 2(\pi + \pi) \right] = \pi$$

mentre, per $m \neq n$, si ha: $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nxdx =$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{-2}{m+n} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(m+n)xdx + \frac{2}{m-n} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(m-n)xdx \right] = 0$$

Risultati analoghi si hanno per le altre combinazioni tra funzioni trigonometriche.

usando per concisione i **simboli di Kronecker**:

$$\delta_{mn} = 1 \text{ per } m = n, \text{ e } \delta_{mn} = 0 \text{ per } m \neq n$$

si puo` concludere che
deve essere:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \sin m\omega t \cdot \cos n\omega t \cdot dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t \cdot dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t \cdot dt = \pi\delta_{mn}$$

Il principale vantaggio delle funzioni ortogonali è che i coefficienti non dipendono dal numero di termini usati; per esempio, si può ritenere di migliorare l'approssimazione di un'onda quadra aggiungendo un ulteriore termine, ossia ponendo:

$$f_1(t) = c_{12}f_2(t) + c_{13}f_3(t) + f_e(t)$$

e minimizzando l'errore:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12}f_2(t) - c_{13}f_3(t)]^2 dt$$

da cui deve essere:

$$\frac{d\varepsilon}{dc_{12}} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[2c_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt + 2c_{13} \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_3(t) dt \right] = 0$$

Ma, essendo il terzo integrale nullo per ortogonalita', si ottiene che la miglior approssimazione del coefficiente c_{12} coincide con quella del caso precedente.

Il calcolo dei coefficienti della serie di Fourier è semplificato dalle condizioni di ortogonalità.

Infatti, posto $\omega_1 t = x$, si ha:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$

ossia una somma di funzioni ortogonali del tipo:

- I termine $f(x) = A_0$ ($c_{12} = A_0, f_2(x) = 1$)
- II termine $f(x) = A_n \cos nx$ ($c_{12} = A_n, f_2(x) = \cos nx$)
- III termine $f(x) = B_n \sin nx$ ($c_{12} = B_n, f_2(x) = \sin nx$)

da cui si ricavano i valori dei coefficienti A_0, A_n e B_n :

$$A_0 = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot 1 \cdot dx}{\int_{-\pi}^{+\pi} 1^2 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx$$

$$A_n = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx}{\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$B_n = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx dx}{\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx dx$$

Poiche' il coseno e' una funzione pari [$\cos x = \cos(-x)$] e il seno dispari [$\sin x = -\sin(-x)$], se $f(x)$ e' dispari tutti gli A_n sono nulli, se $f(x)$ e' pari tutti i B_n sono nulli. Per esempio, la funzione $f(t) = \frac{1}{2}\omega_1 t = x/2$ (funzione dente di sega) ha tutti gli $A_n = 0$.

$$\text{Anche } A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{2} dx = 0$$

$$\text{mentre } B_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nx}{n} dx - \frac{x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{+\pi} \right]$$

avendo integrato per parti, con x fattor finito. Quindi il valor medio e' nullo e si ha:

$B_1 = -\cos\pi = 1$, $B_2 = -\frac{1}{2} \cos 2\pi = -\frac{1}{2}$, $B_3 = \frac{1}{3} \cos 2\pi$, ecc., come gia' illustrato nella fig.2.5.

Simmetria a mezz'onda

$$f(t) = -f(t+T/2)$$

Vale per le funzioni armoniche dispari ($n = 1, 3, 5, \dots$) per esempio:

$$\sin n\omega t = -\sin n\left(\omega t + \frac{\omega T}{2}\right) = -\sin(n\omega t + n\pi) =$$

$$= -\sin n\omega t \cos n\pi + \cos n\omega t \sin n\pi$$

$$\cos n\omega t = -\cos n\left(\omega t + \frac{\omega T}{2}\right) = -\cos(n\omega t + n\pi) =$$

$$= -\cos n\omega t \cos n\pi + \sin n\omega t \sin n\pi$$

queste uguaglianze sono valide solo se $n = 1, 3, 5, \dots$
nel qual caso si ha $\cos n\pi = -1$ e $\sin n\pi = 0$.

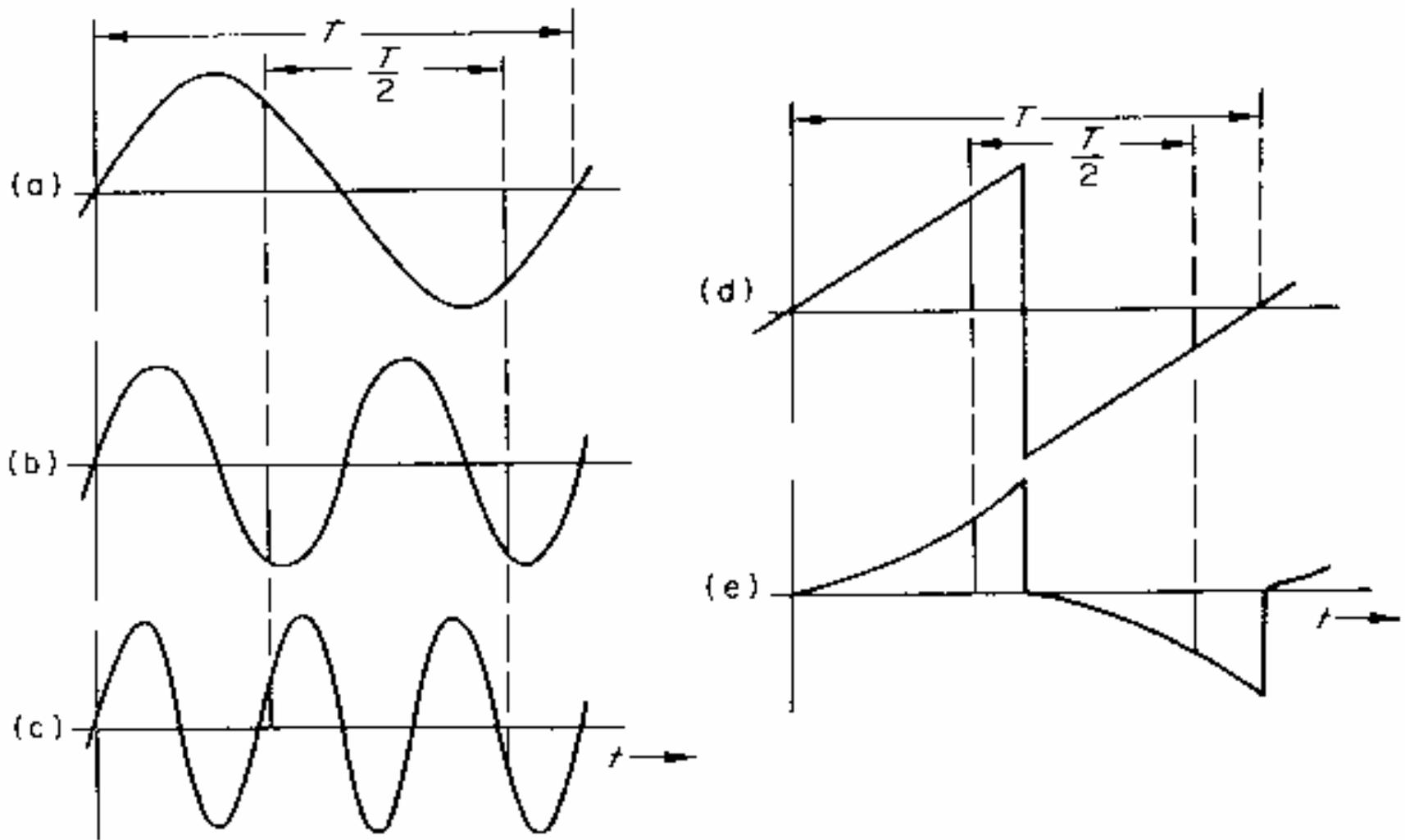
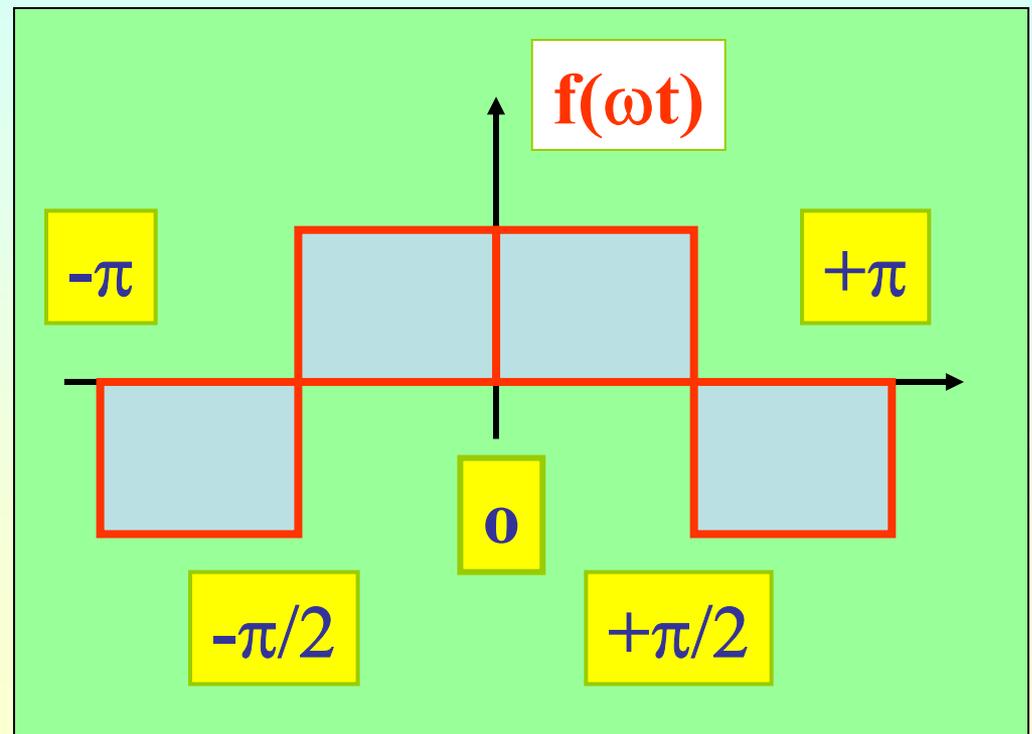


Figure 2.9 *Half-wave symmetry. Waveforms (a), (c) and (e) exhibit such symmetry; waveforms (b) and (d) do not*

Un segnale pari ($B_n = 0$) o dispari ($A_n = 0$) con simmetria a mezz'onda, si puo` integrare su un quarto di periodo e poi moltiplicare l'integrale per 4.

Per es. un'onda quadra simmetrica rispetto all'origine e` una funzione pari di media zero ($A_0 = 0$).
I coefficienti A_n dei coseni valgono:



$$A_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{-\pi/2} -\cos nx \, dx + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos nx \, dx + \int_{+\pi/2}^{\pi} -\cos nx \, dx + \right\} =$$

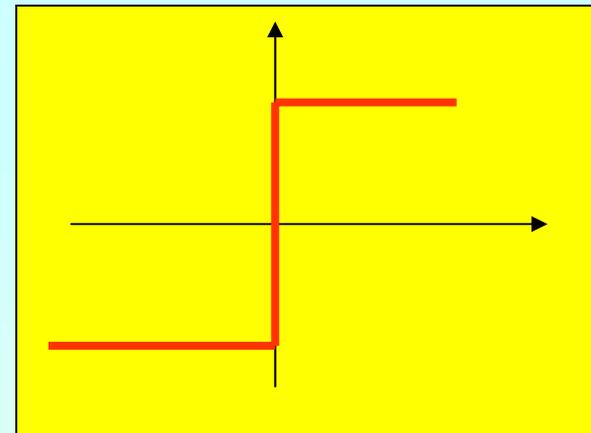
$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} - \frac{\sin nx}{n} \Big|_{+\pi/2}^{\pi} \right\} = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

per n pari $A_n = 0$, per n dispari $A_n = +1$ o -1 . La serie di Fourier (ricordando che $x = \omega t$) e' quindi data da:

$$f(\omega t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n \cos n\omega t =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t + \dots \right)$$

Se invece l'origine è scelta in modo che il segnale sia dispari i termini B_n valgono ± 1 , e si ha:



$$f(\omega t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t - \dots \right)$$

Se l'origine è scelta in modo arbitrario compaiono entrambi i termini A_n e B_n . Si definisce potenza media (per esempio per la prima armonica) la quantità:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (A_1 \cos x)^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (B_1 \sin x)^2 dx = \frac{A_1^2}{2} + \frac{B_1^2}{2} = \frac{8}{\pi^2}$$

Analogamente tutte le altre armoniche avranno potenze P_2, P_3, P_4, \dots . Si vede che, con lo spostamento dell'origine, non cambia la potenza di ogni armonica.

La quantità $A^2 + B^2 = \text{costante}$ è simile alla proprietà $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ delle funzioni trigonometriche. Da questo fatto si può ottenere la condizione:

$A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t = K (\cos \alpha \cos \omega_1 t + \sin \alpha \sin \omega_1 t)$
con K costante. Per la normalizzazione alla potenza deve essere:

$$K = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{da cui } \frac{B}{A} = \text{tg } \alpha$$

e infine:

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} [\cos(\omega t - \alpha)] =$$
$$= \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(\omega t - \operatorname{tg}^{-1} \frac{B}{A}\right)$$

Se invece $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \beta$, $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \beta$

si ha l'espressione analoga:

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\omega t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{A}{B}\right)$$

In conclusione, le due componenti della serie di Fourier di ogni armonica possono essere espresse con una singola funzione contenente una fase iniziale.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_1 t - \vartheta_n)$$

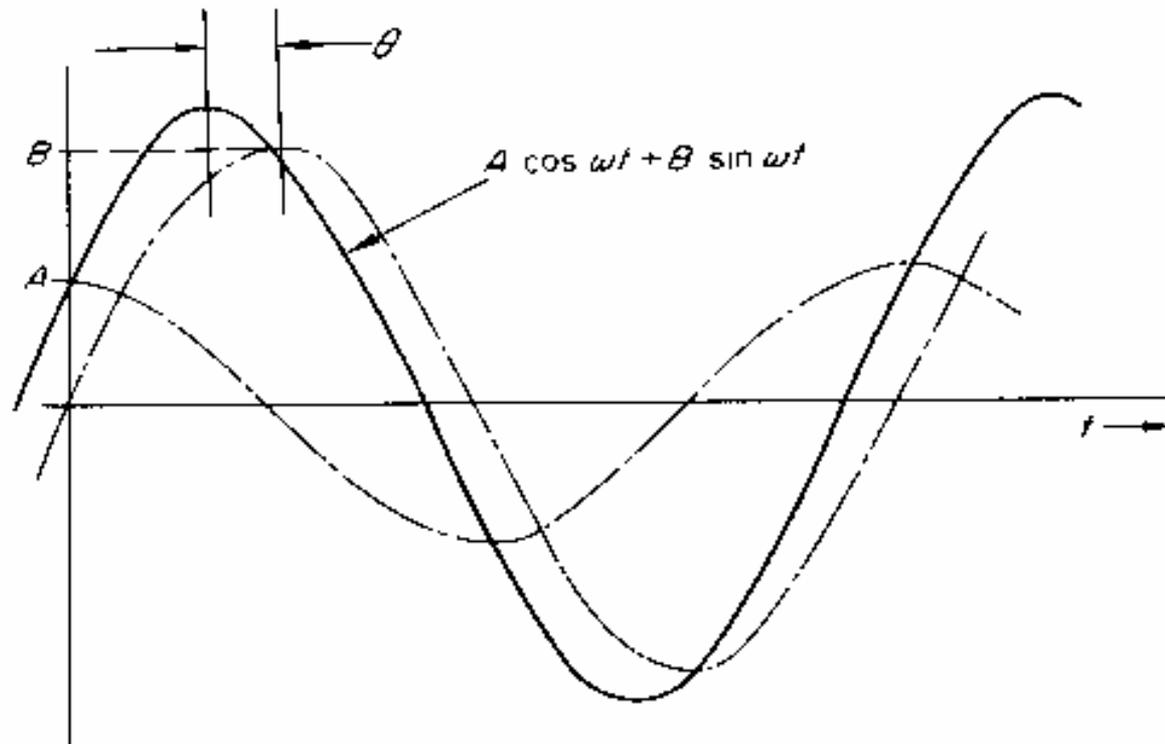


Figure 2.13 The addition of a sine and a cosine function to give a wave of the same frequency with a phase angle θ

$$\text{Con } C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2},$$

$$\varphi_n = \text{arctg } B_n / A_n,$$

$$\vartheta_n = \text{arctg } A_n / B_n$$

$$P_n = \frac{C_n^2}{2},$$

$$P_{\text{tot}} = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

SEGNALI APERIODICI

Usiamo la forma esponenziale (formule di Eulero) della serie di Fourier. Per i termini $n = 0, 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = A_0 + \frac{A_1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) - \frac{jB_1}{2} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2} (A_1 + jB_1) e^{-j\omega t} + A_0 + \frac{1}{2} (A_1 - jB_1) e^{j\omega t} = a_{-1} e^{-j\omega t} + a_0 + a_1 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Che puo' essere scritta (m intero) nella forma

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jm\omega t}$$

I coefficienti a_m sono ora complessi coniugati: la parte reale rappresenta i coseni e quella immaginaria i seni.

Sono pero' introdotte "frequenze negative".

$$A \cos \omega t = \frac{A_1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$B \sin \omega t = -j \frac{B}{2} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Il primo membro ha una riga di ampiezza A alla frequenza ω , il secondo membro ha due righe nel **piano reale** di ampiezza A/2 alle frequenze ω e $-\omega$.

Il primo membro ha una riga di ampiezza B alla frequenza ω , il secondo membro ha due righe nel **piano immaginario** di ampiezza B/2 alle frequenze ω e $-\omega$.

Dalle definizioni di A_m e B_m e ricordando che $x = \omega t$, si ha:

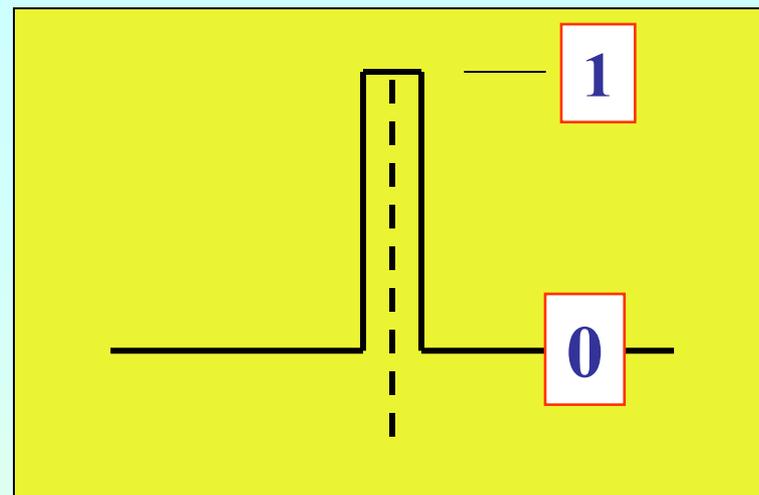
$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos mx - j \sin mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jmx} dx$$
$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos mx + j \sin mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jmx} dx$$

ossia il medesimo valore

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jmx} dx$$

Il termine a_0 coincide con il valor medio di $f(x)$.

Come applicazione di segnale aperiodico, esaminiamo un impulso stretto (importante per le trasmissioni, i radar, i calcolatori) definito da $f(x) = 1$ nell'intervallo $2\pi/k$ con $k \gg 1$ e $f(x) = 0$ al di fuori dell'intervallo.



Si ha:

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} 1 \cdot e^{-jmx} dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{k} \right) = \frac{1}{k}$$

$$a_m = \frac{1}{2\pi - jm} \left. e^{-jmx} \right|_{-\pi/k}^{\pi/k} = \frac{1}{-2\pi jm} \left[e^{-jm\pi/k} - e^{jm\pi/k} \right] = \frac{-2j \sin(\pi m/k)}{-2j\pi m} =$$

$$= \frac{1}{k} \frac{\sin(\pi m/k)}{\pi m/k} = \frac{1}{k} \frac{\sin x}{x}$$

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\sin m\pi/k}{m\pi/k} e^{jmx}$$

per $k \rightarrow \infty$ (impulso stretto) gli a_m sono vicini tra loro e sotto l'involuppo di $\sin x/x$. Al limite lo spettro diventa continuo.

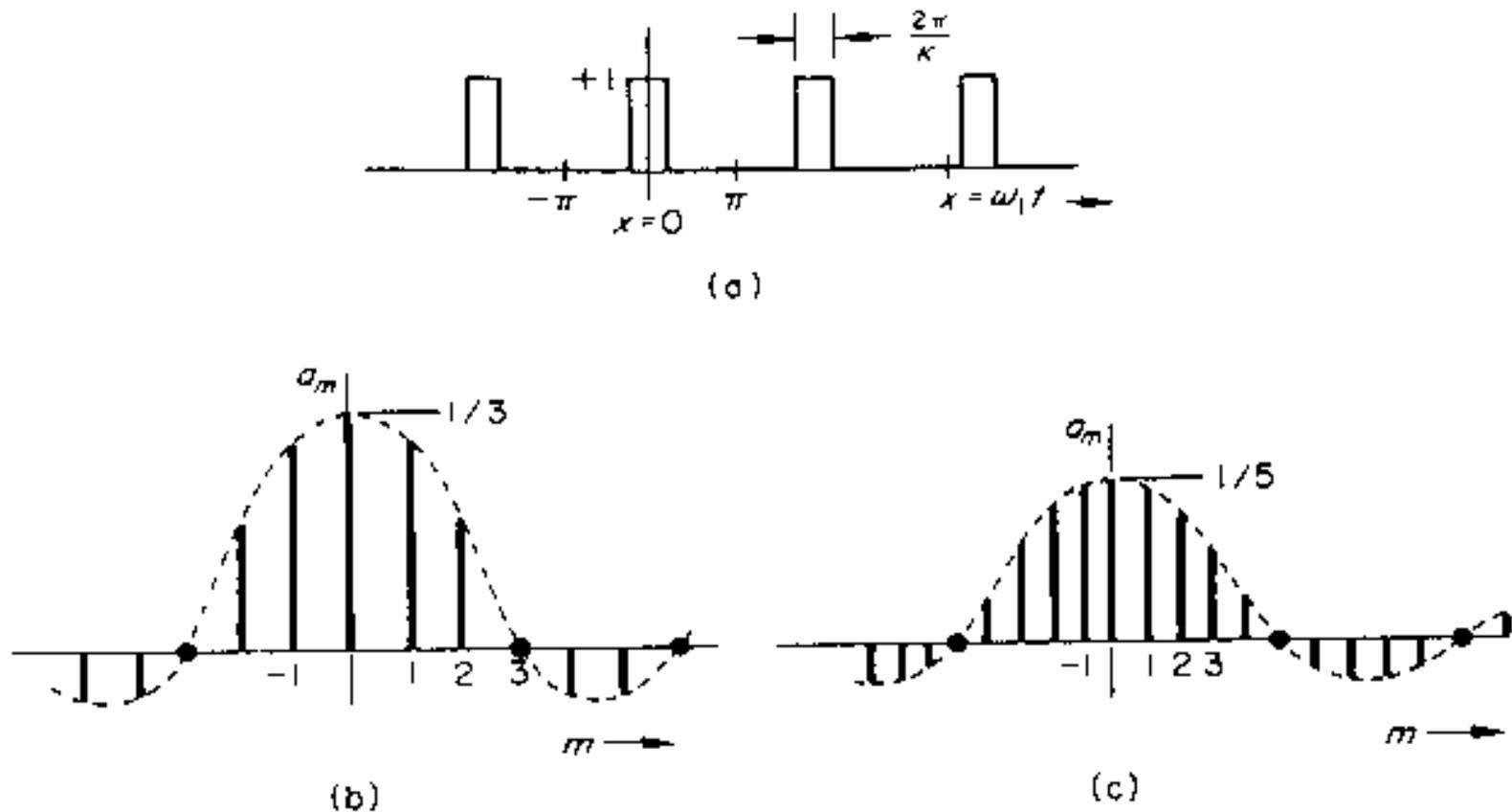


Figure 3.3 (a) A repetitive pulse waveform, and its real exponential Fourier coefficients for (b) $k = 3$, and (c) $k = 5$

La trasformata di Fourier è l'analogo della serie di Fourier per segnali non ripetitivi.

Nell'esempio precedente, se $T \rightarrow \infty$ ($\omega = 2\pi/T \rightarrow 0$) è:

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jmx} dx = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jm\omega_1 t} dt$$

$$a_m T = G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jm\omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{T} e^{jm\omega_1 t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)\omega_1}{2\pi} e^{jm\omega_1 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Come esempio riprendiamo l'impulso isolato $f(t)=1$ in $(-\tau,\tau)$

$$G(\omega) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} \left| e^{-j\omega t} \right|_{-\tau}^{\tau} = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\tau} - e^{j\omega\tau}) = \frac{-2j \sin \omega\tau}{-j\omega} = 2\tau \left(\frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} \right)$$

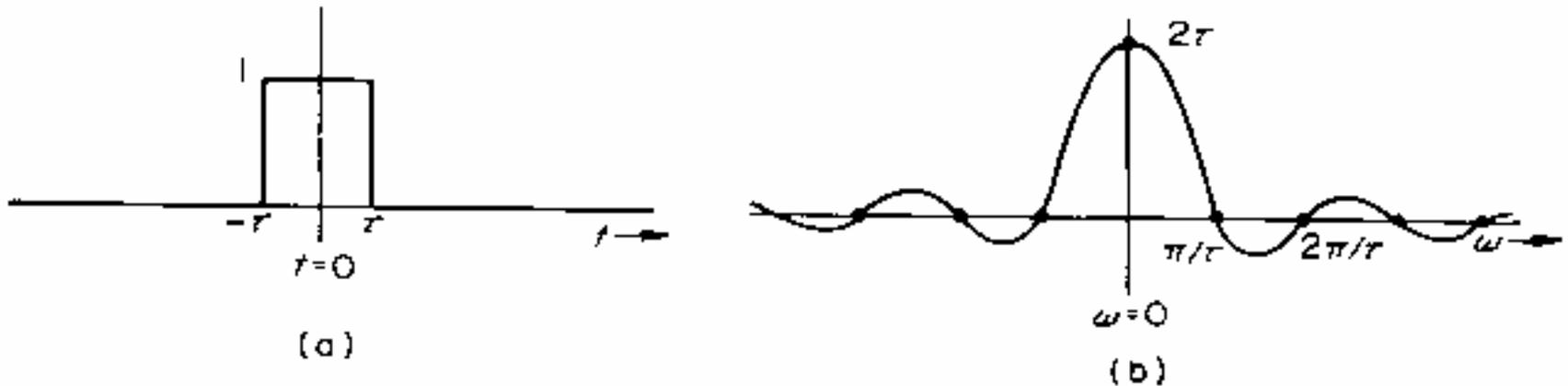


Figure 3.5 (a) A single isolated pulse and (b) its frequency spectrum

Per τ grande l'energia e' concentrata intorno a $\omega = 0$ (per $t \rightarrow \infty$ lo spettro e' una riga a $\omega = 0$). Per τ piccolo l'energia e' diffusa su molte frequenze (per $t \rightarrow 0$ lo spettro e' piatto).

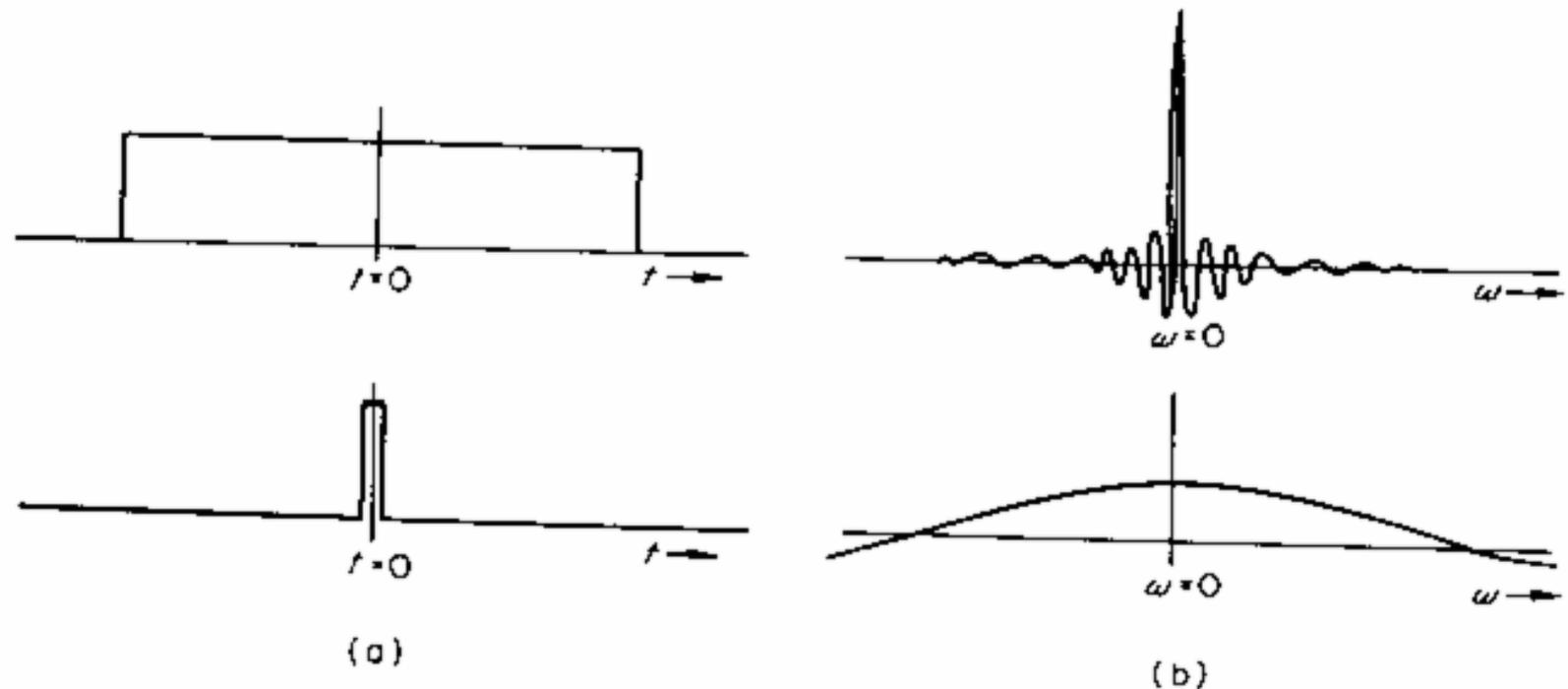


Figure 3.6 (a) Two isolated pulses, one of long and the other of short duration, and (b) their corresponding spectra. Only a small part of the $(\sin x/x)$ spectrum of the short pulse is shown

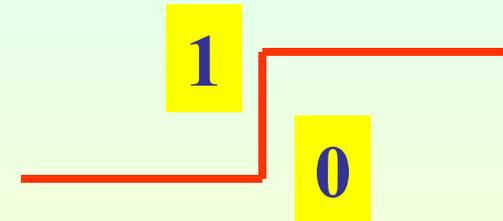
Limitazioni della trasformata di Fourier

La trasformata di Laplace

Poichè $|e^{-j\omega t}| = 1$ la $G(\omega)$ esiste se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ è finito.

Molte funzioni non soddisfano a questa condizione, per esempio seno e coseno da $-\infty$ a $+\infty$ o la funzione gradino per $T \rightarrow \infty$. In quest'ultimo caso, per esempio, si può considerare il limite di $f(t) = e^{-\sigma t}$ per $\sigma \rightarrow 0$ (fattore di convergenza).

Si ottiene:



$$G(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-(\sigma + j\omega)} \left| e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{(\sigma + j\omega)}$$

Per $\sigma = 0$ lo spettro ha una singolarità in $\omega = 0$; per $\sigma \rightarrow 0$ ma $\neq 0$, lo spettro vale $1/j\omega$.

In genere, se un segnale e' del tipo $f(t) = 0$ per $t \leq 0$, si puo' usare una versione modificata della trasformata di Fourier, che prende il nome di trasformata di Laplace. La frequenza complessa s e' data da seni e coseni smorzati.

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

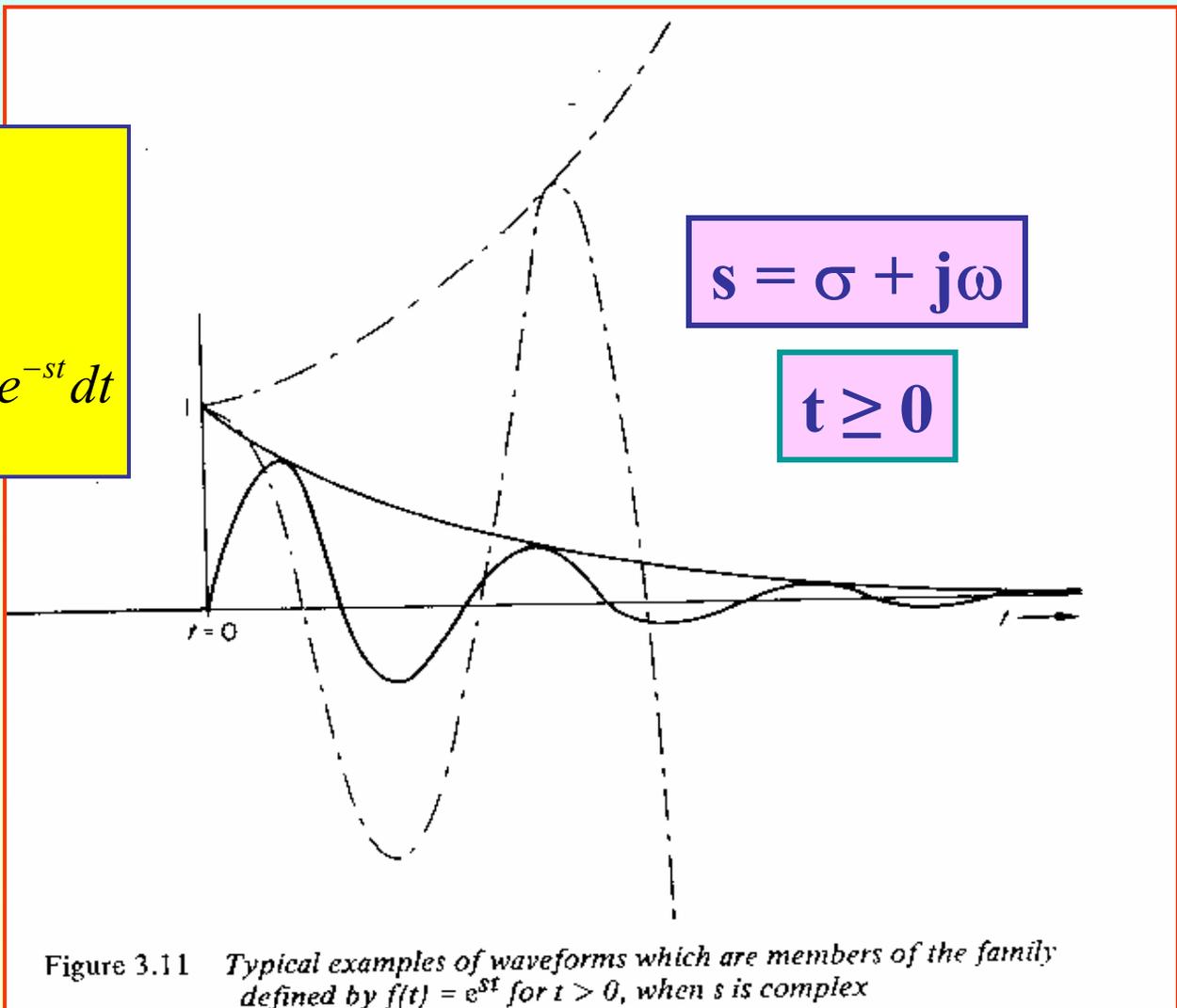
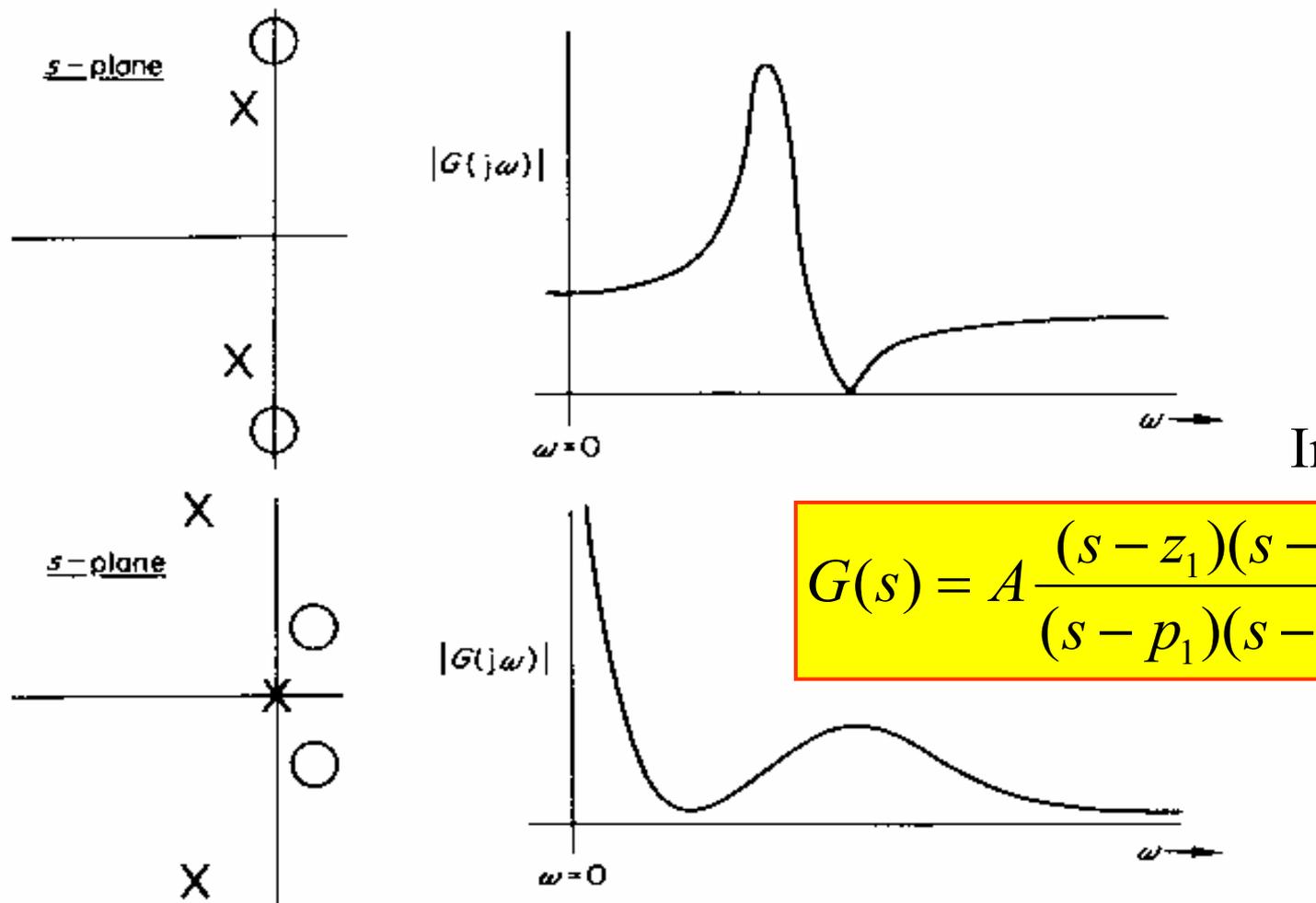


Figure 3.11 Typical examples of waveforms which are members of the family defined by $f(t) = e^{st}$ for $t > 0$, when s is complex

Rappresentazione in poli e zeri

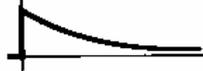
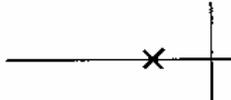
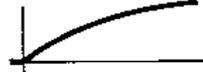
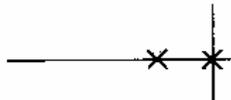
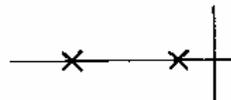
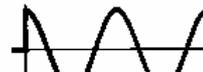
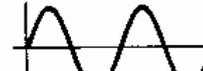
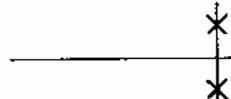
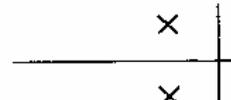
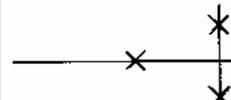


In genere si ha:

$$G(s) = A \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \dots}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \dots}$$

Figure 3.16 Two pole-zero configurations and their corresponding spectral magnitude characteristics

Laplace Transforms

Waveform	$f(t)$, for $t > 0$	$G(s)$	s -plane poles and zeros
 unit step	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	
 unit impulse	$\delta(t)$	1	
 unit ramp	$r(t)$	$\frac{1}{s^2}$	
 exponential	$\exp(-\alpha t) u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	
 exponential	$\{1 - \exp(-\alpha t)\} u(t)$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	
 exponential	$\frac{1}{\beta - \alpha} \{ \exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t) \} u(t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	
 cosine	$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)}$	
 sine	$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)}$	
 damped sine	$\exp(-\alpha t) \sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha + j\omega_0)(s + \alpha - j\omega_0)}$	
 damped sine	$\frac{\sin(\omega_0 t - \theta) + \exp(-\alpha t) \sin \theta}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^{\frac{1}{2}}}$ where $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_0}{\alpha}$	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)(s^2 + \omega_0^2)}$	

Segnali campionati

La funzione $\delta(t)$ è detta delta di Dirac e rappresenta un impulso di breve durata ($t, t+dt$) e area unitaria.

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega T}$$

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = 1$$

(valore di $e^{-j\omega t}$ per $t=0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t-a) dt = f(a)$$

Trasformata di Fourier discreta. Dal campionamento ogni istante $t=T$ si ottiene la rappresentazione in tempo e le trasformate di Laplace e Fourier (DFT).

$$f(t) = x_0 \cdot \delta(t) + x_1 \cdot \delta(t - T) + x_2 \cdot \delta(t - 2T) + x_3 \cdot \delta(t - 3T) + \dots$$

$$G(s) = x_0 + x_1 e^{-sT} + x_2 e^{-s2T} + x_3 e^{-s3T} + \dots$$

$$G(j\omega) = x_0 + x_1 e^{-j\omega T} + x_2 e^{-j\omega 2T} + x_3 e^{-j\omega 3T} + \dots$$

Posto $z = e^{sT}$ si ha la
trasformata z del segnale:

$$G(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} \dots$$

Il segnale campionato si ripete ogni $2\pi/T$ *rad/s*. z è una nuova variabile delle frequenze, in genere complessa, e si introduce uno spostamento di fase proporzionale alla frequenza. Se $s = \sigma + j\omega$, si ha:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} \cos \omega T + j e^{\sigma T} \sin \omega T$$

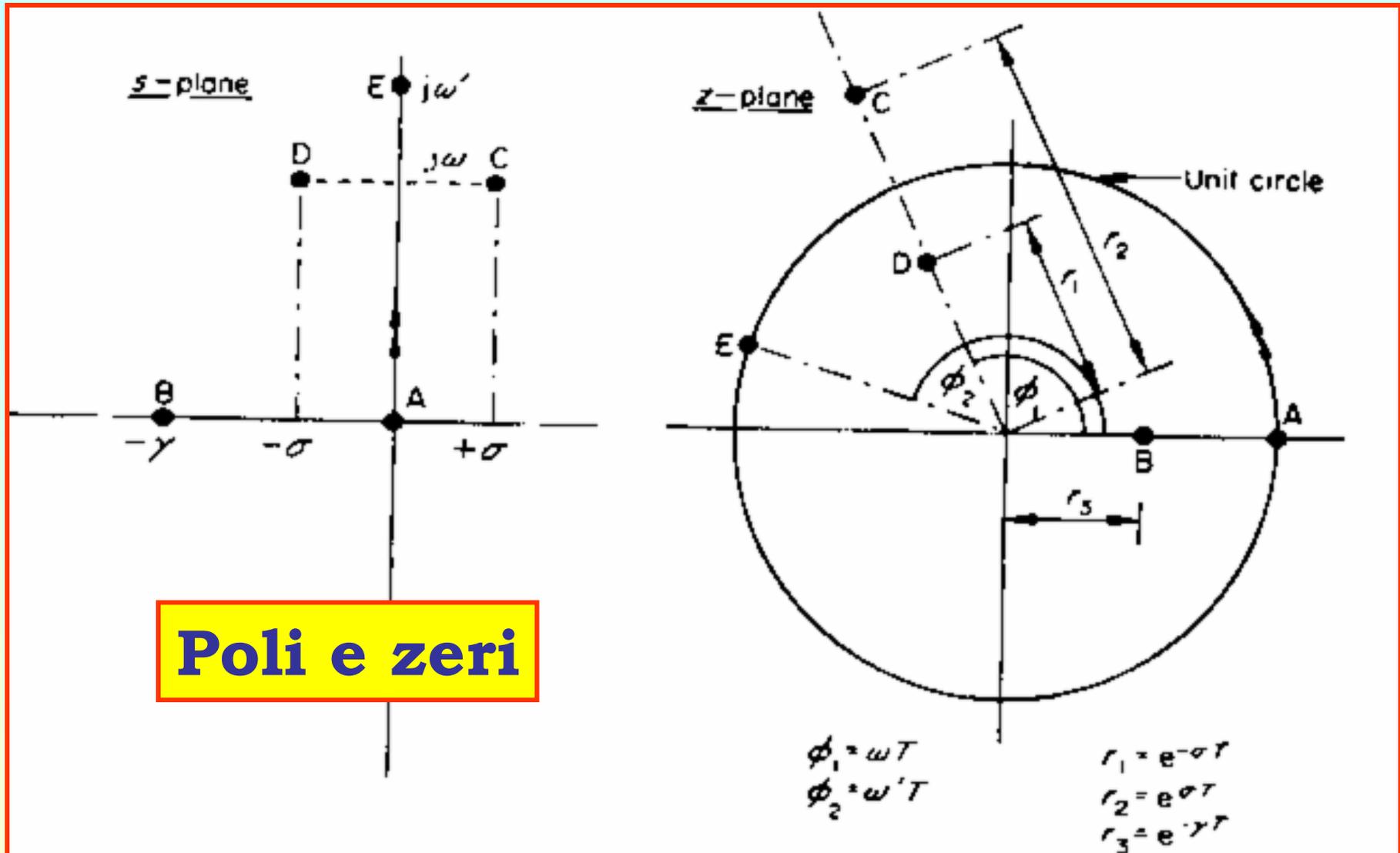


Figure 4.7 Equivalent locations in the s and z planes

$$G(z) = (1 - z^{-8}) = \frac{z^8 - 1}{z^8}$$

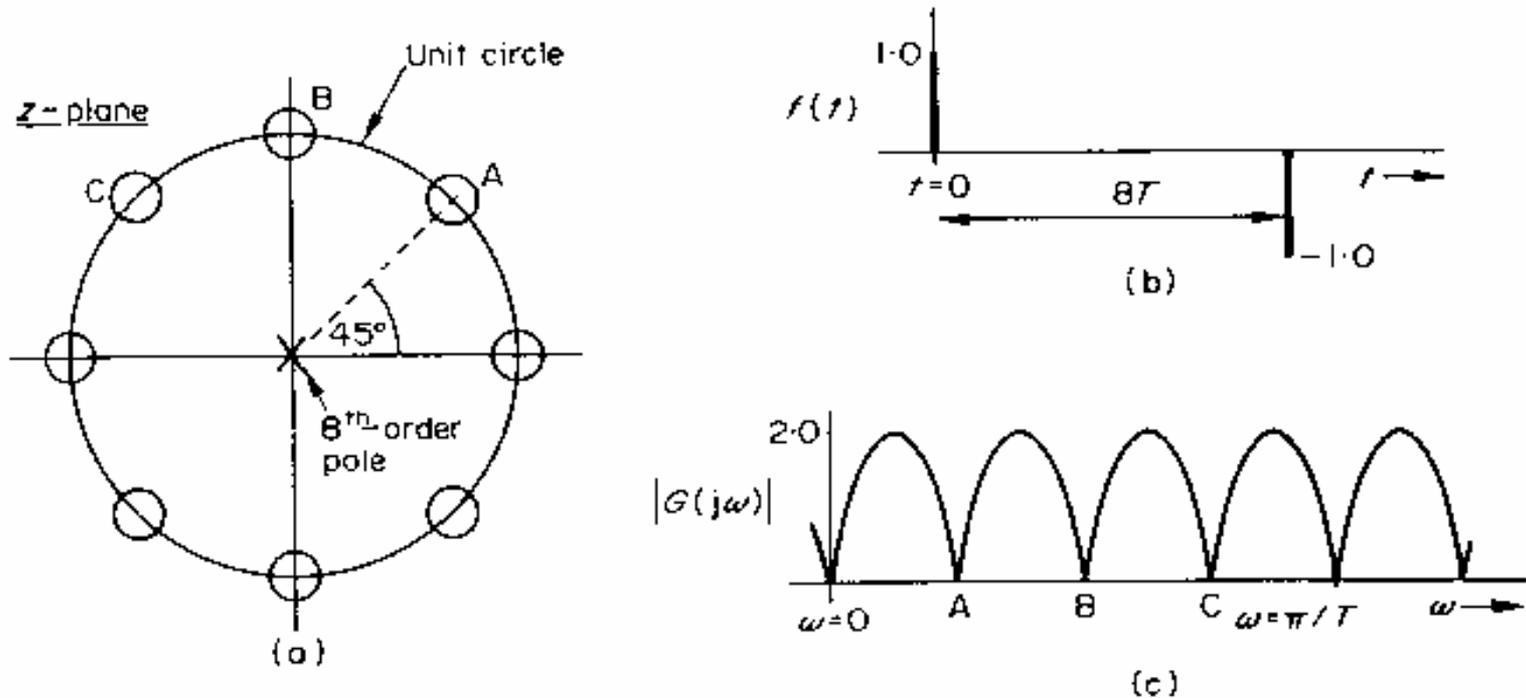


Figure 4.8 (a) A z-plane pole-zero configuration, (b) the corresponding time function, and (c) the magnitude of its spectrum

$$G(z) = \frac{z^8 - 1}{z^8(z - 1)}$$

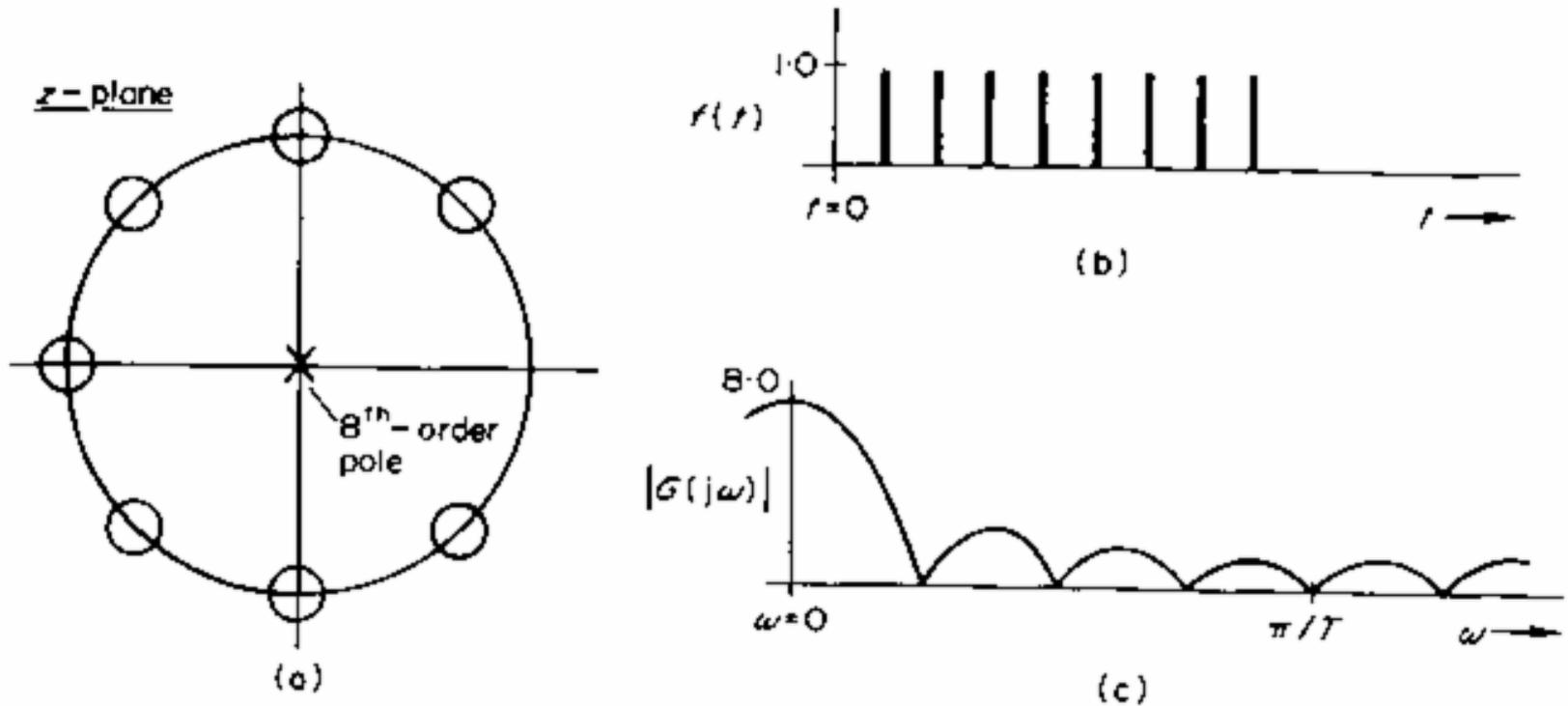


Figure 4.9 The effects of removing one of the z-plane zeros of figure 4.8

Funzione di correlazione

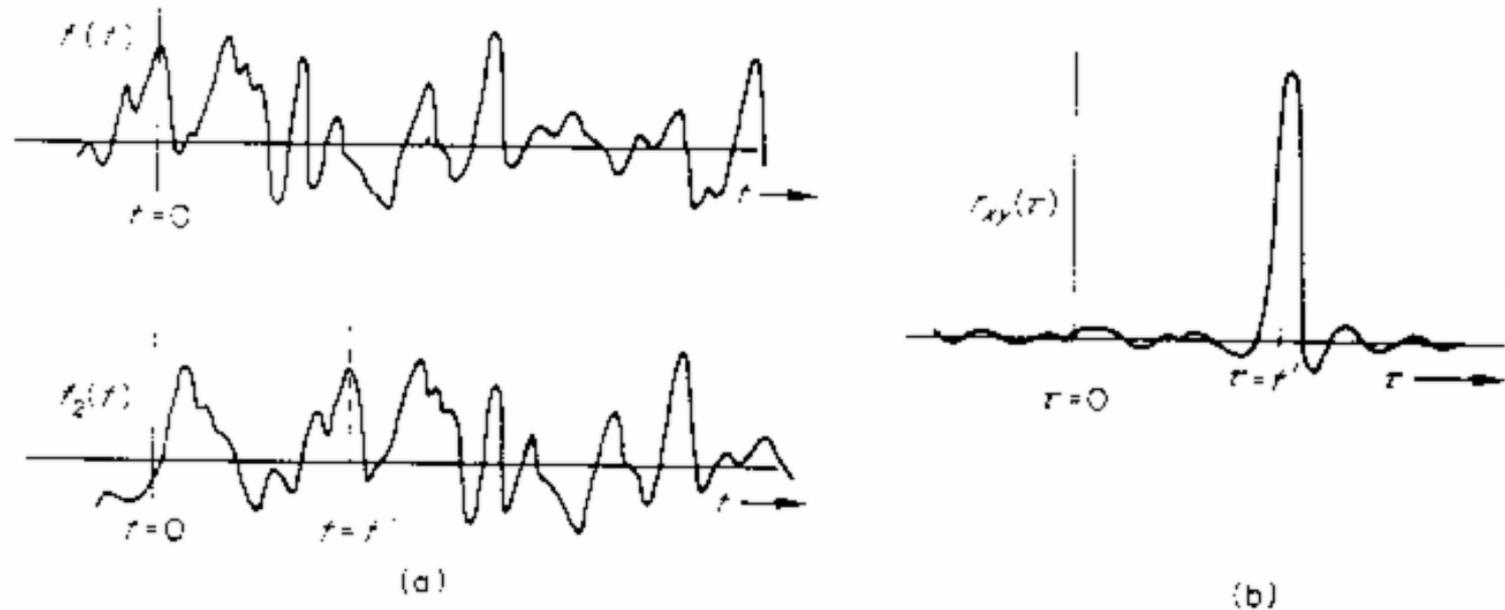
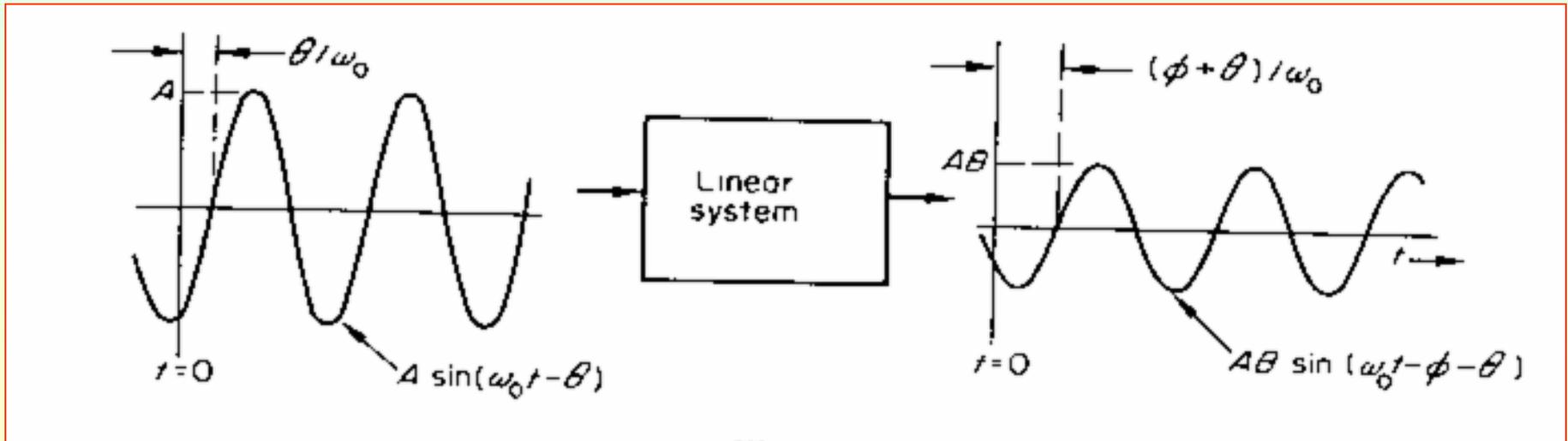


Figure 6.1 (a) Portions of two random signals which differ only in their time origin, and (b) an estimate of their cross-correlation function

Segnali e sistemi lineari

Vale il principio di sovrapposizione e non vengono generate nuove frequenze.

Solo l'ampiezza e la fase del segnale di ingresso possono venir modificate dal sistema lineare



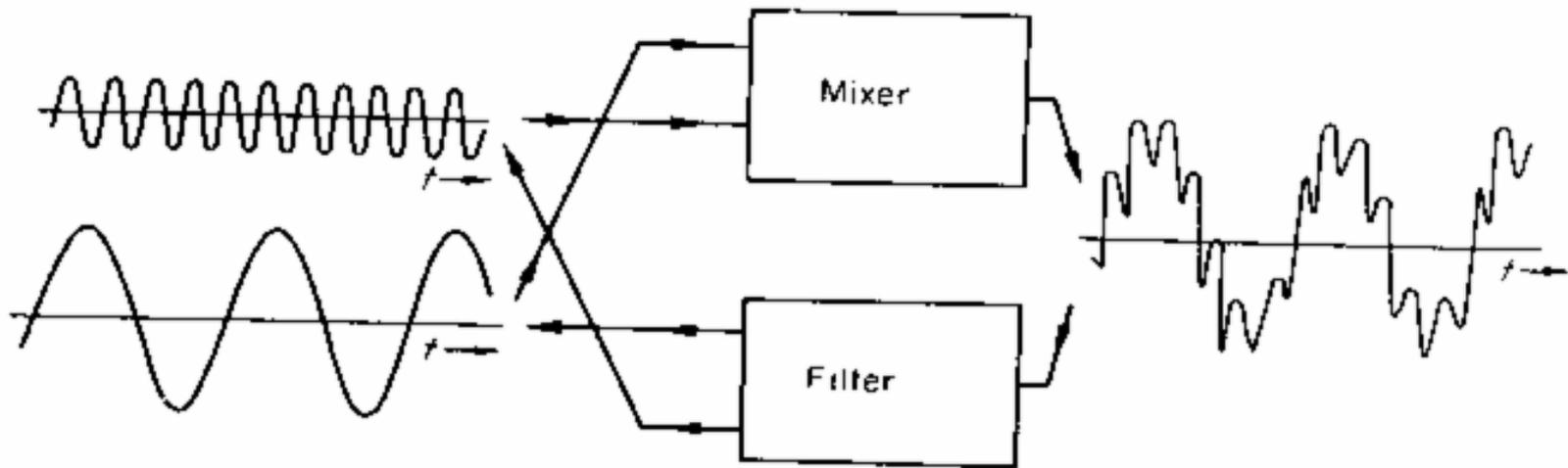


Figure 7.16 *Mixing and filtering*

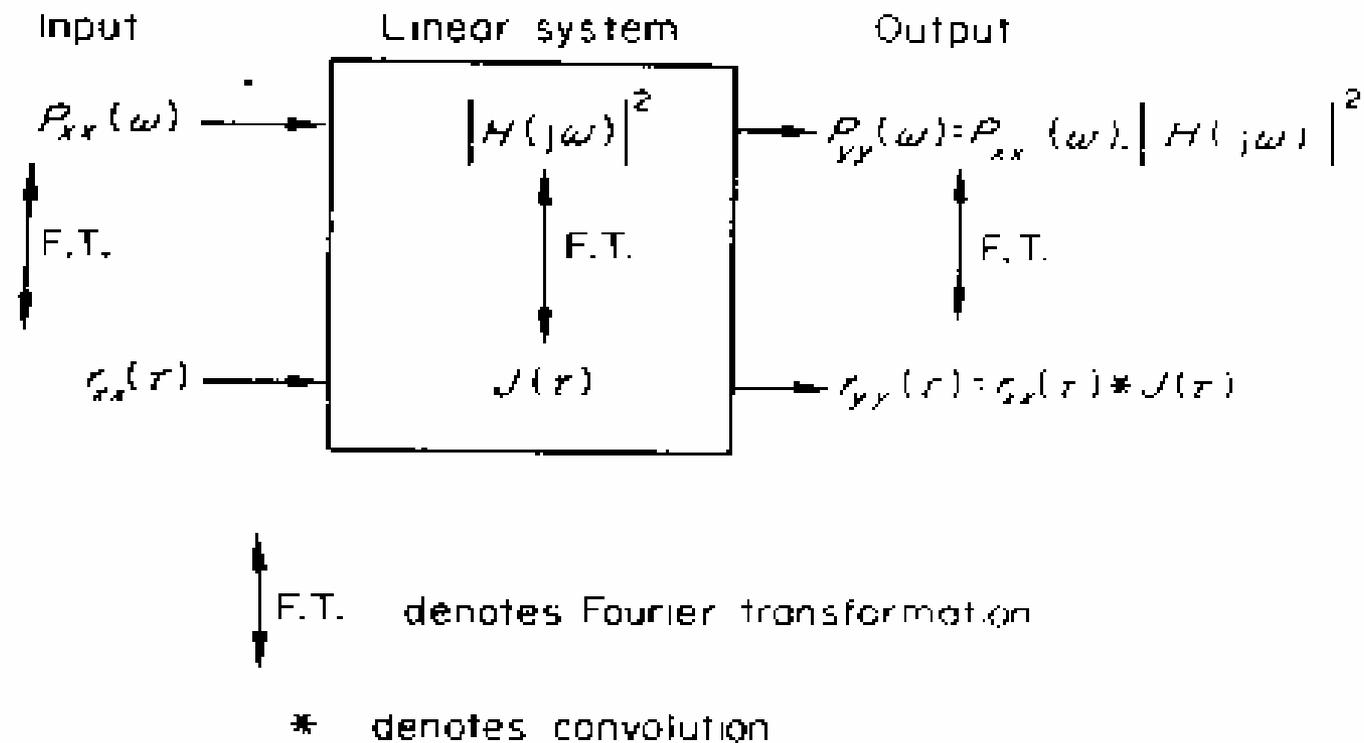


Figure 7.20 *Power spectrum and autocorrelation function relationships at input and output of a linear system*

Campionamento

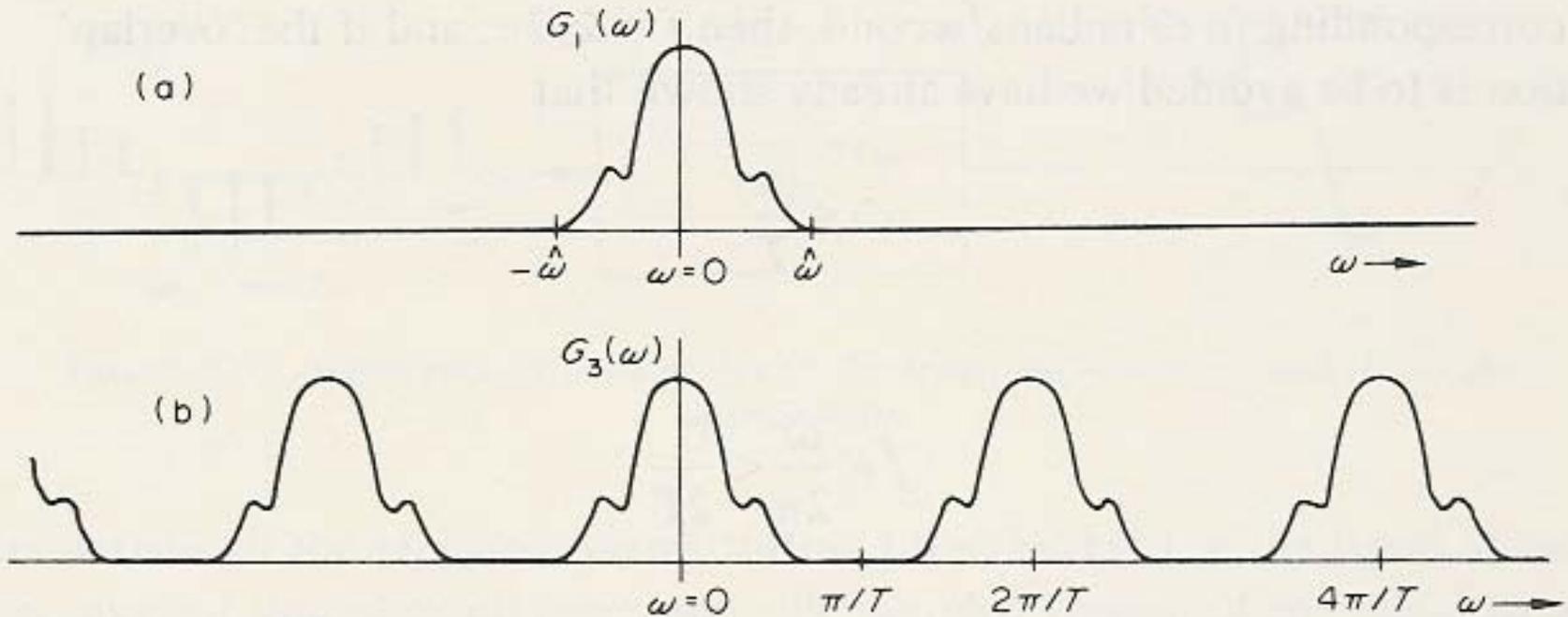


Figure 8.5 (a) The spectrum of a typical continuous signal and (b) that of its sampled version when the sampling interval is T seconds

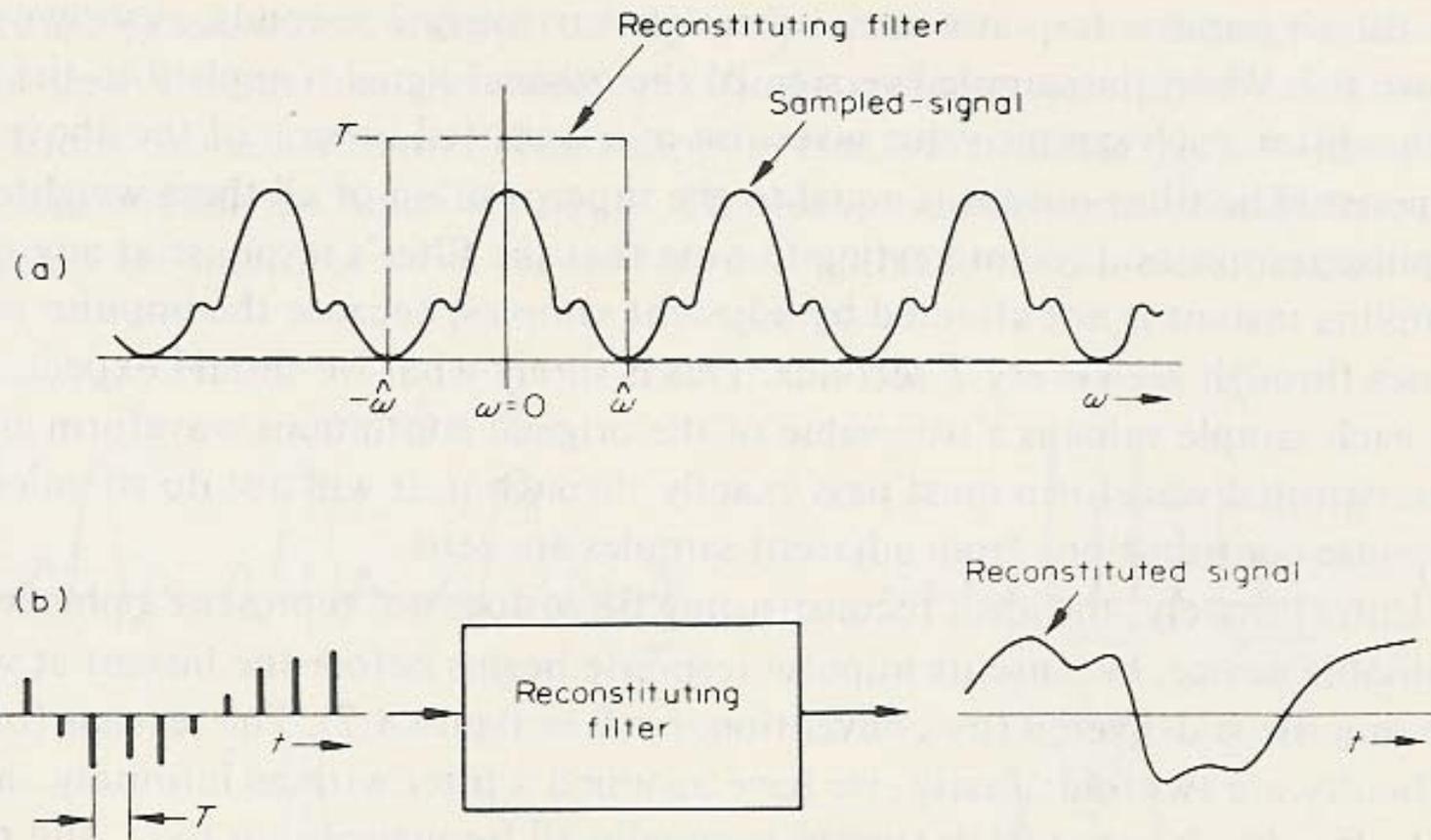


Figure 8.6 Signal reconstitution, (a) in the frequency-domain, and (b) in the time-domain

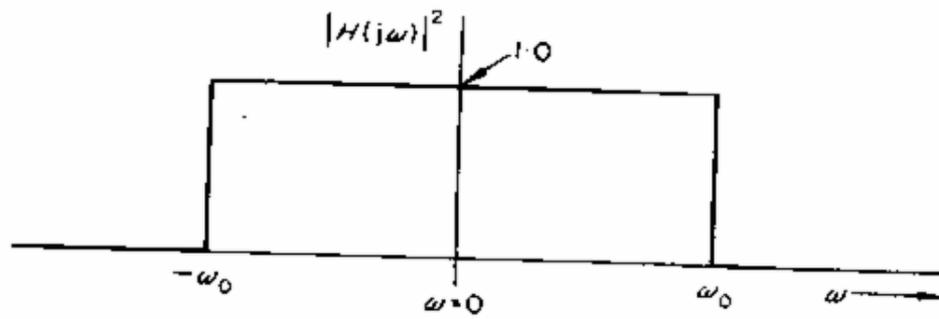
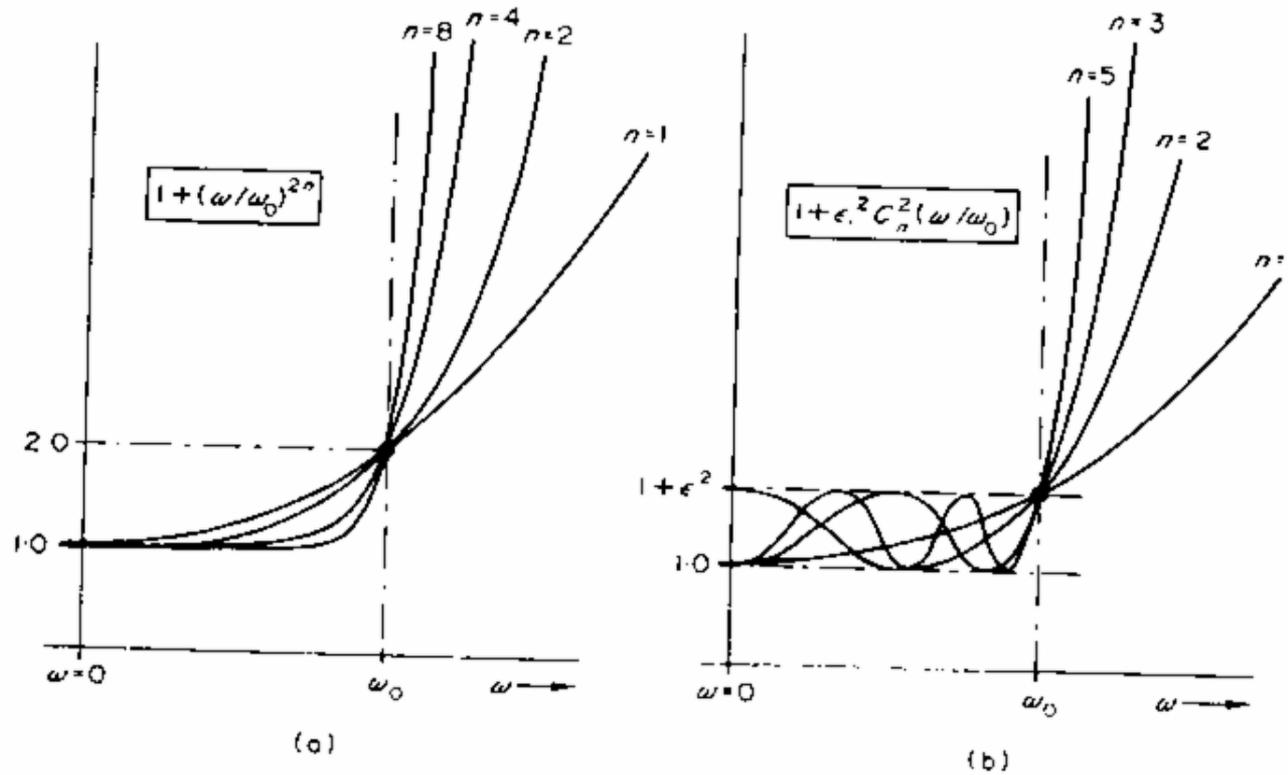


Figure 9.7



$$|H_1(j\omega)|^2 = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}\right]} \quad (\text{Butterworth})$$

and

$$|H_2(j\omega)|^2 = \frac{1}{\left[1 + \epsilon^2 C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]} \quad (\text{Chebyshev})$$

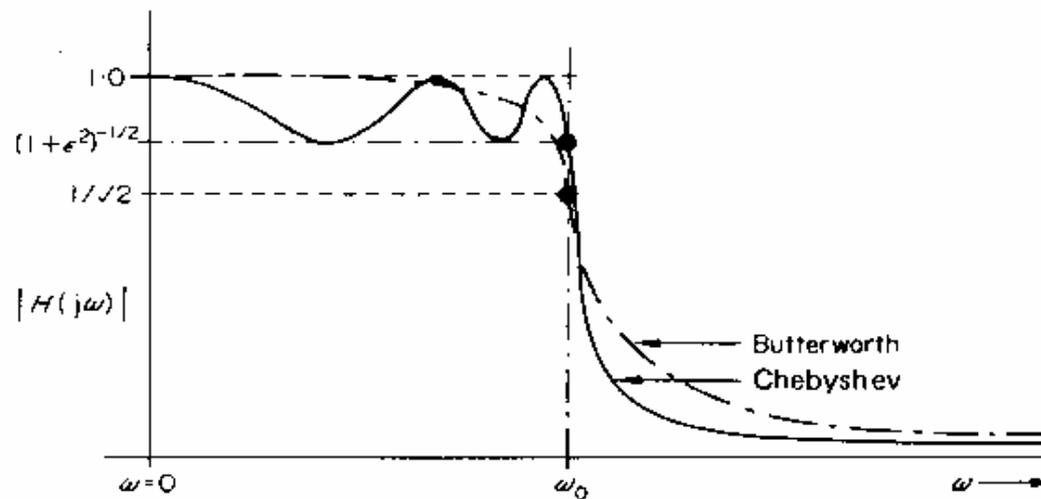


Figure 9.9 *Frequency response (magnitude) characteristics of low-pass Butterworth and Chebyshev filters of fifth order*

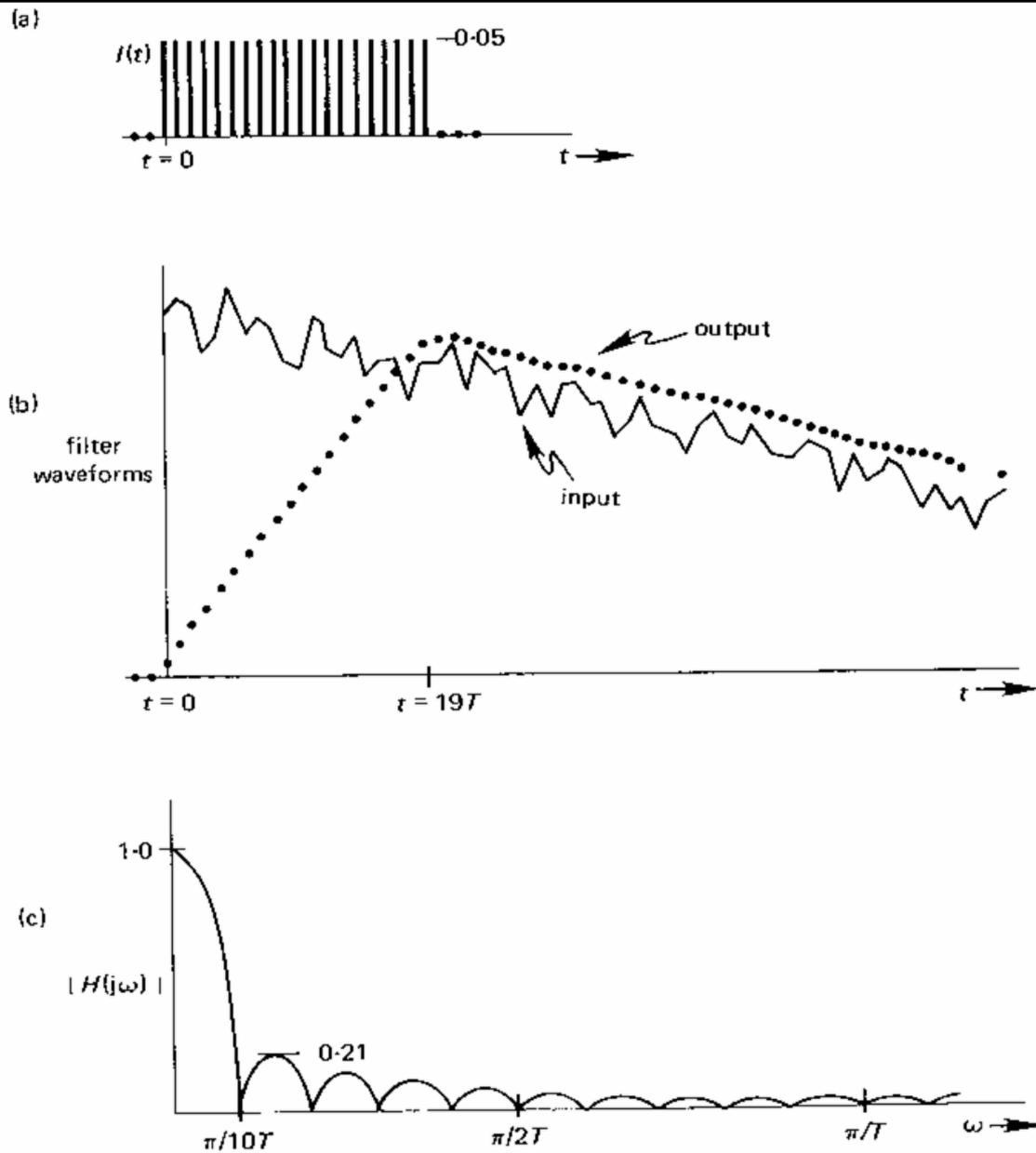


Figure 9.19 A moving-average filter: (a) impulse response, (b) typical input and output waveforms, and (c) frequency-response magnitude characteristic

Filtro adattato

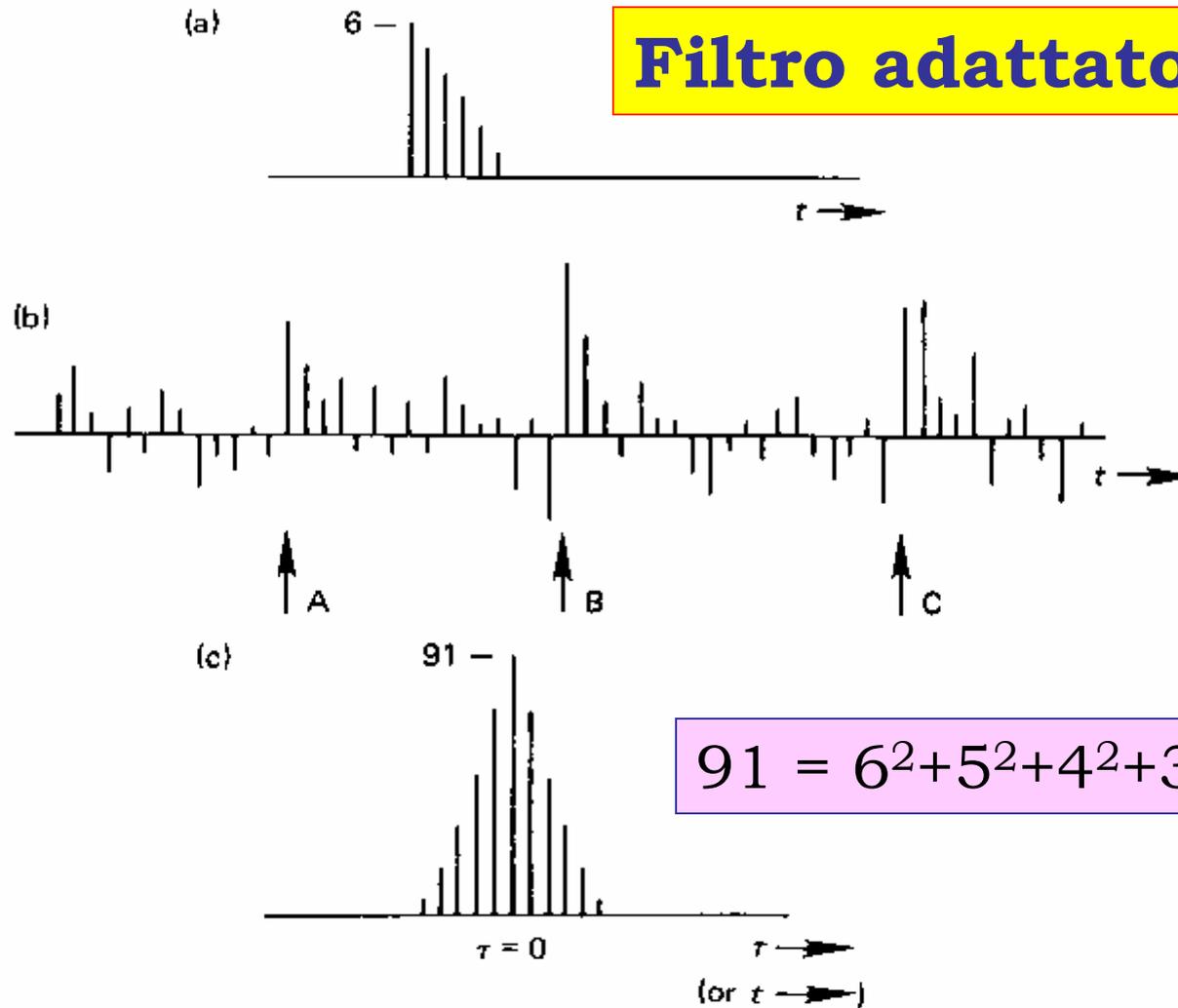


Figure 10.10 (a) A time-limited sampled-data signal, and (b) the same signal occurring several times in random noise. In (c) is shown the signal's autocorrelation function