MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

Esercizi, set # 1 - 1 ottobre 2009 - consegna e correzione 8 ottobre

1. Trovare la trasformazione di Lorentz Λ tale che $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu} = (m, \vec{0})$, con v^{ν} tipo tempo.

2. Calcolare $\partial_{\mu} x^{\mu}$, $\partial_{\mu}\, x \cdot x$, $g^{\mu\mu}$ (ha senso?), g^{μ}_{μ}, ϵ^{2130}, ϵ_{1302}, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} \Lambda^{\gamma}{}_{\rho} \Lambda^{\delta}_{\sigma}$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} x_{\mu} x_{\nu}$.

3. Mostrare che il tensore $T^{\mu\nu\rho}$ completamente antisimmetrico è equivalente a un vettore assiale A^{σ}.

4. Decomporre un generico tensore di rango 2 in una combinazione di $S^{\mu\nu}$, simmetrico a traccia nulla, di $A^{\mu\nu}$ antisimmetrico, e di una costante C.

5. **Rotazioni su stati spinoriali**. Si consideri uno stato di spin $\frac{1}{2}$ polarizzato lungo l'asse z in su. Si agisca su questo spinore di Pauli con una rotazione $R(\theta\, \vec{i})$ attorno all'asse x e si mostri che il risultato è un autostato di $\vec{S} \cdot \vec{n}$, dove $\vec{S}$ è l'operatore di spin e $\vec{n} = \sin\theta\, \vec{j} + \cos\theta\, \vec{k}$.

6. **Proprietà vettoriali delle matrici di Pauli.** Usare la rappresentazione spinoriale bidimensionale del gruppo delle rotazioni per dimostrare che, per una rotazione di un angolo θ attorno all'asse $\vec{n}$, la matrice $\vec{\sigma}$ si trasforma secondo

$$\vec{\sigma} \to R(\vec{\theta})\, \vec{\sigma}\, R^{-1}(\vec{\theta}) = \cos\theta\ \vec{\sigma} - \sin\theta\ \vec{\sigma} \times \vec{n} + (1 - \cos\theta)\ \vec{\sigma} \cdot \vec{n}\ \vec{n}. \qquad (1)$$

   Verificare quindi nel caso di una rotazione attorno all'asse z che questa legge di trasformazione (formula di rotazione di Rodrigues) coincide con quella di un vettore tridimensionale per una trasformazione opposta (cioè $-\vec{\theta}$)). Questo significa che $\sigma^{i}_{a\,b}$ è un tensore invariante del gruppo delle rotazioni. (Con un po' più di fatica, e usando i generatori della rappresentazione tridimensionale di SO(3), si può anche dimostrare che la formula di Rodrigues deriva dalla matrice di rotazione in forma esponenziale).

7. Verificare che la trasformazione infinitesima indotta da $A = \exp i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$ in $X = \vec{\sigma} \cdot \vec{x}$ corrisponde a una rotazione infinitesima di $\vec{x}$. Limitarsi al caso di rotazioni attorno all'asse z.