

MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

Esercizi, set # 3 - 28 ottobre 2009 - consegna e correzione 5 novembre

1. Operare un boost sullo spinore libero di Dirac $\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi_L(x) \\ \phi_R(x) \end{pmatrix}$ che lo porti dal sistema di riferimento di riposo a quello di momento $p^\mu = (E, \vec{p})$ (si usino $\cosh \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$ e $\sinh \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$, con $\gamma = E/m$). Posto $\phi_L = \phi_R$ nel sistema di riposo dove $\vec{p} = 0$, si trovino quindi la relazione tra $\phi_L(\vec{p})$ e $\phi_R(\vec{p})$ e la sua inversa nel sistema boostato. Verificare che in rappresentazione chirale l'equazione di Dirac per autostati del quadrimpulso $\psi(x) = e^{-ip \cdot x} \psi(\vec{p})$ fornisce esattamente le stesse relazioni tra $\phi_L(\vec{p})$ e $\phi_R(\vec{p})$.

2. Calcolare la divergenza di $j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ per spinori ψ che soddisfano l'equazione libera di Dirac.

3. **Gordon decomposition** Dimostrare che, se $u(p)$ è uno spinore soluzione dell'equazione di Dirac con energia positiva e $p' = p + q$, la corrente vettoriale può essere decomposta come

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

4. Verificare che gli spinori liberi di Dirac $u^{(r)}(\vec{p})$ e $v^{(r)}(\vec{p})$ soddisfano $u^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(s)}(-\vec{p}) = 0$ e $v^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(-\vec{p}) = 0$.

5. Verificare che se $\psi_{p,\pm}^{(s)}(x)$ sono onde piane con energia positiva o negativa soluzioni dell'equazione di Dirac si ha $\int d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p,-}^{(s)}(x) = 0$.

6. Calcolare il valore medio dell'elicità di un elettrone destrorso con energia negativa.

7. Calcolare la corrente di probabilità associata alle onde incidente, riflessa, e trasmessa nel caso di una barriera di potenziale (paradosso di Klein). Verificare che $j_{inc} = j_{rif} + j_{tr}$, cioè la probabilità è conservata, ma che ci sono valori di E e V_0 tali che $j_{rif} > j_{inc}$. Provate a spiegare il paradosso nella teoria del mare di Dirac.