MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

Esercizi, set # 4 - 12 novembre 2009 - consegna e correzione 19 novembre

1. Verificare che $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ corrisponde alle due equazioni di Maxwell inomogenee.

2. Calcolare $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, e $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ in termini dei campi elettrico e magnetico. Quanto valgono nel caso di onde elettromagnetiche piane?

3. *Precessione di Larmor.* Mostrare che classicamente un momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{J}$ posto in un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B}$ con potenziale $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ precede attorno alla direzione del campo magnetico con frequenza angolare $\omega = g|\vec{B}|$. Nel caso quantistico, data l'Hamiltoniana $H = -gBS_z = -\omega S_z$ e uno stato a $t = 0$ $|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$, calcolare $\langle\vec{S}(t)\rangle$ e mostrare che lo spin precede attorno all'asse z.

4. (a) Scrivere l'eq. di Klein-Gordon (KG) per una funzione d'onda ϕ e verificare che non è invariante per trasformazioni di gauge locali $\phi(x) \to e^{i\alpha(x)}\phi(x)$;

   (b) introdurre la derivata covariante e usarla per rendere invariante la KG, mostrando che il risultato corrisponde all'accoppiamento minimale col campo elettromagnetico;

   (c) che forma assume l'equazione nel caso di un campo elettrostatico centrale? quali sono le differenze con il caso di uno spinore di Dirac?

   (d) scrivere l'equazione agli autovalori per stati stazionari in coordinate sferiche ($\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{r^2}$) e procedendo in analogia con l'equazione di Schrödinger per l'atomo di H trovare i livelli energetici di una particella scalare in un campo elettrostatico attrattivo. ($n - l - 1$ deve essere un intero) Discutere le differenze con il caso di Dirac.

5. Mostrare che nella teoria di Dirac $\vec{S}^2$ è una costante del moto a differenza di $\vec{L}^2$ (considerare il caso di potenziale statico a simmetria sferica).

6. *Equazione di Majorana.* Scrivere l'equazione di Dirac per un fermione di Majorana. i) Verificare che in rappr. chirale si ottiene $i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi_L + m\sigma_2\phi_L^* = 0$ con $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma})$. ii) Usando l'identità $\sigma_2\vec{\sigma}^* = -\vec{\sigma}\sigma_2$ verificare che $\sigma_2\phi_L^*$ si trasforma per TL come uno spinore right-handed. iii) dimostrare che l'eq. in i) implica la eq. di Klein-Gordon per ϕ_L: uno spinore di Majorana ha massa pur avendo solo due componenti indipendenti.