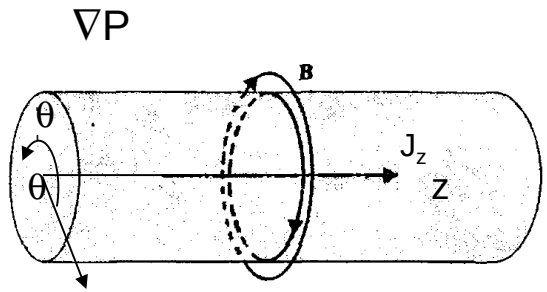
Lezione 14
Configurazione MHD in Z-pinch e stellarators

G. Bosia
Universita' di Torino

Sistemi di confinamento lineari : Z – pinch

Un'altra configurazione lineare di equilibrio MHD, lo "Z-pinch" consiste in una colonna di fluido cilindrica,anche in questo caso di lunghezza infinita, che conduce correnti nella direzione dell'asse z (J_z). Queste creano così un campo magnetico azimutale (B_θ) e pertanto linee di forza di **J** e di **B** sono scambiate rispetto alla configurazione del θ – pinch. La forza **J** ∧ **B** è di nuovo radiale, diretta verso l'asse.

Uno 'z-pinch' si ottiene provocando una scarica in un gas a bassa pressione all'interno di un tubo di vetro, fra due elettrodi terminali, simile a quelli usati per l' illuminazione. Questi sono evidentemente a contatto col plasma e la corrente totale che percorre il plasma uguaglia quella del circuito esterno che alimenta la scarica.



In coordinate cilindriche r,z e θ, dato che le coordinate z e θ sono ignorabili per la simmetria del problema, l' equazione per il bilancio di pressione

(XIV-38)
$$\nabla\left(p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)=\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

si riduce a :

(XIV-39)
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\frac{B^2}{2\mu_0 r}=0$$

Bilancio di pressione in un Z-pinch

Infatti: dato che e'

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_z \hat{\mathbf{e}}_z \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$(\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})_r - (\nabla p)_r = -j_z B_\theta - \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$(\nabla \wedge \mathbf{B})_z - (\mu_o \mathbf{j})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_\theta) - \mu_o j_z = 0$$

Eliminando j_z dalle due equazioni:

(XIV-39)

$$\underbrace{\frac{B_\theta^2}{\mu_o r}} + \frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_o} + p\right)} = 0$$

Forza di tensione magnetica dovuto alla curvatura delle linee di forza

Bilancio di pressione cinetica e magnetica

L' equilibrio di forze nello Z-pinch e' meno semplice del caso del θ-pinch per la presenza del termine di tensione. Non e' possibile scegliere p(r) e j(r) indipendentemente perché devono essere auto-consistenti. Integrando sul raggio la (XIV-39)

$$\int_a^b \frac{B_\theta^2}{\mu_o}\frac{dr}{r} + \left[\frac{B_\theta^2}{2\mu_o} + p(r)\right]_a^b = 0$$

Bilancio di pressione in Z-pinch

Assumiamo che b sia il bordo del plasma e p(b) = 0

$$p(r) = \frac{B_\theta^2(b)}{2\mu_o} - \frac{B_\theta^2(r)}{2\mu_o} + \int_r^b \frac{B_\theta^2}{\mu_o}\frac{dr'}{r'}$$

Se per esempio assumiamo j_z= cost

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) = \mu_o j_z \Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_o j_z}{2}\, r$$

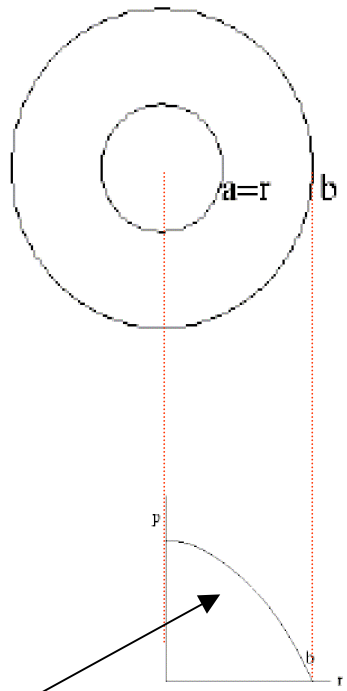
e:

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{1}{2\mu_o}\left(\frac{\mu_o j_z}{2}\right)^2 \{b^2 - r^2 + \int_r^b 2r'dr'\} \\ &= \frac{\mu_o j_z^2}{4}\{b^2 - r^2\} \end{aligned}$$

E dato che $B_\theta(b) = \frac{\mu_o j_z b}{2}$

$$p = \frac{B_{\theta b}^2}{2\mu_o}\frac{2}{b^2}\{b^2 - r^2\}$$

(XIV-40)



Per una densità di corrente costante, il profilo di pressione e' parabolico

Proprieta' dello $Z-$pinch

In questa configurazione la colonna di plasma non e' confinata alle estremità ma in contatto termico con gli elettrodi del circuito eccitatore, pertanto lo Z – pinch ha modeste capacità di confinamento. Studiamo tuttavia in qualche dettaglio qualche sua proprietà perché da questo concetto e' derivata la configurazione "tokamak" in geometria toroidale.

Si può dimostrare che esiste una relazione fra la corrente del pinch I e la quantità di fluido confinato ad una certa temperatura T.

La condizione di equilibrio (XIII-39) può essere riscritta come:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{B^2}{\mu_0 r} + \frac{d}{dr}(rB)$$

Moltiplicando per r ed integrando per parti fra 0 ed a, otteniamo:

$$[rP^2]_0^a - 2\int_0^a P \cdot r dr = -\frac{1}{2\mu_0}[r^2 B^2]_0^a$$

Se assumiamo che la pressione di plasma vada a zero alla superficie di contorno r = a, questa relazione diventa :

(XIV-41)
$$2\pi \int_0^a p r dr = \frac{B^2(a)}{2\mu_0} \cdot \pi a^2$$

Se assumiamo anche gli ioni e gli elettroni abbiamo temperature costanti nella sezione del pinch (T_i e T_e):

(XIV-42)
$$P(r) = n(r) \cdot K(T_e + T_i)$$

Relazione di Bennet

Introduciamo il numero totale di elettroni per unità di lunghezza della colonna di plasma ('densità lineare'):

(XIV-43)
$$N = 2\pi \int_0^a r n(r) dr$$

ed otteniamo :

$$N \cdot K(T_e + T_i) = \frac{\pi a^2}{2\mu_0} B^2(a)$$

B(a) è legato alla corrente I dal teorema della circuitazione dalla relazione

(XIV-44)
$$B(a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Der cui otteniamo la relazione (di Bennett):

(XIV-45)
$$\boxed{N \cdot k(T_e + T_i) = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi}}$$

Questa relazione mostra che in un pinch la temperatura del plasma è proporzionale al quadrato della corrente della scarica ed è inversamente proporzionale alla 'densità lineare'. Introducendo la 'pressione media' e il parametro parametro 'beta-theta' :

(XIV-46)
$$\bar{p} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi p r dr$$

(XIV-47)
$$\beta_\theta = \frac{\bar{p}}{\left(B_0^2 / 2\mu_0\right)}$$

Tenendo conto che il campo magnetico ha una unica componente azimutale ($B = B_\theta$), la (XIV-41) si semplifica in :

(XIV-48)
$$\beta_\theta = 1$$

Z-pinch stabilizzato

Si può dimostrare che l'equilibrio MHD Z-pinch non è stabile e richiede l'aggiunta di una componente assiale di campo magnetico per essere 'stabilizzato'. L' aggiunta di una componente assiale alla componente azimuthale del campo magnetico genera linee di forza che si avvolgono elicoidalmente sulle sulle superfici magnetiche. Strutture di questo tipo sono state costruite per il confinamento di plasmi a bassa temperatura e sono noti col nome di screw (vite) pinch

Le equazioni di equilibrio sono ora:

(XIV-49) $(\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})_r - (\nabla p)_r = 0 \quad \Rightarrow \quad j_\theta B_z - j_z B_\theta - \frac{\partial}{\partial r} = 0$

(XIV-50) $(\nabla \wedge \mathbf{B})_z - (\mu_o \mathbf{j})_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} B_z = \mu_o j_\theta$

(XIV-51) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_\theta) = \mu_o j_z$

Eliminando j dalle tre equazioni si ottiene:

(XIV-52)
$$-\frac{B_z}{\mu_o}\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{B_\theta}{\mu_o r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_\theta) - \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

ossia :

(XIV-53)
$$\underbrace{\frac{B_\theta^2}{\mu_o r}} + \frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{B^2}{2\mu_o} + p\right)} = 0$$

Forza di tensione magnetica dovuto alla curvatura delle linee di forza

Bilancio di pressione cinetica e magnetica

Relazione di Bennet generalizzata

Nel caso di un pinch cilindrico che, per esigenze di stabilità, ha una **componente di campo magnetico lungo z** (B_z):

(XIV-54)
$$\frac{d}{dr}\left(P+\frac{B_\theta^2+B_z^2}{2\mu_0}\right)+\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}+=0$$

Con un procedimento analogo a prima si ottiene:

(XIV-55)
$$\overline{P}=2\pi\int_0^a P\cdot r dr=\frac{B^2(a)}{2\mu_0}\cdot\pi a^2\cdot\beta_\theta$$

dove adesso

(XIV-55)
$$\beta_\theta=1+\frac{B_z^2(a)}{B_\theta^2(a)}-\frac{2\pi}{\pi a^2 B_\theta^2(a)}\int_0^a B_z^2(r)\cdot r dr$$

sarà in generale diverso da 1. Ricorrendo di nuovo alle equazioni (XIII- 42, 43 e 44) si può ancora scrivere:

(XIV-56)
$$N\cdot K(T_e+T_i)=\frac{\mu_0}{8\pi}\beta_\vartheta I^2$$

che generalizza l' equazione di Bennet al caso in cui sia presente, nella colonna di plasma un campo magnetico avente non solo una componente azimuthale ma anche assiale (B_z) e che sottolinea l' importanza del β_θ nel riscaldamento di un pinch: a parità di corrente totale la temperatura e' proporzionale a β_θ .

Relazione di Bennet generalizzata

Il valore di β_θ dipende dal profilo di B_z lungo il raggio. Se introduciamo il valore di B_z^2 mediato sul raggio:

la (XIII-58) dà :

(XIII-60)

$$\bar{B}_z^2 = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi r B_z^2(r)dr$$

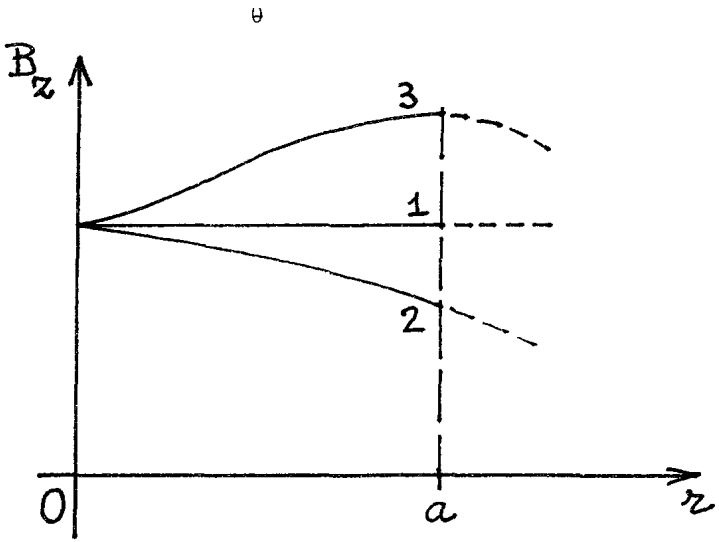
$$\beta_\theta = 1 + \frac{B_z^2(a) - \bar{B}_z^2}{B_\vartheta^2(a)} I^2$$

A seconda del profilo di B_z^2 in funzione del raggio si possono avere tre casi

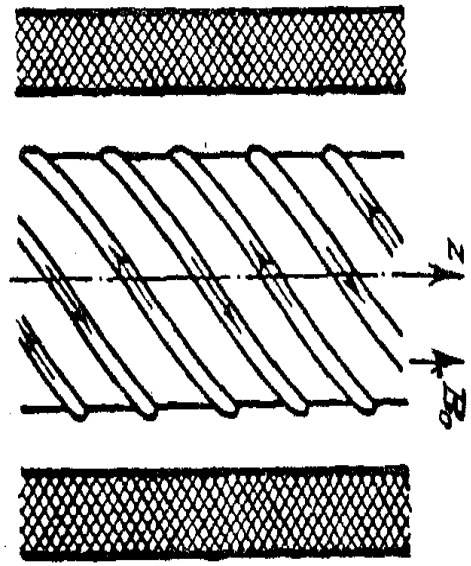
1) - **costante**: $B_z = B_z(a)$, da cui $\beta_\theta = 1$;

2) - **massimo al centro** o 'paramagnetico': $B_z(0) > B_z(a)$ da cui $B_z^2 > B_z^2(a)$ e $\beta_\theta > 1$ (caso del pinch) ;

3) - **minimo al centro** o 'diamagnetico': $B_z(0) < B_z(a)$, da cui $B_z^2 > B_z^2(a)$ e $\beta_\theta < 1$ (caso del Tokamak) .



Elicità delle linee di forza



La presenza delle due componenti $B_\theta(r)$ e $B_z(r)$ fa si che le linee di campo magnetico abbiano la forma di eliche.

Se consideriamo un punto Q mobile lungo una linea di forza che giace su una superficie cilindrica di raggio r. Ad uno spostamento dz parallelo all'asse del pinch, corrisponde una rotazione $d\theta$ del punto attorno all'asse magnetico. Il passo dell'elica (la distanza lungo l'asse z percorsa dal punto Q, quando compie un giro completo di rotazione attorno all'asse del pinch) è dato da:

(XIV-62) $$L(r) = \frac{2\pi dz}{d\vartheta}$$

Usando l'equazione della linea di forza

(XIV-63) $$\frac{r d\vartheta}{B_\vartheta} = \frac{dz}{B_z}$$

la (XIII-62) dà

$$L(r) = 2\pi r \frac{B_z}{B_\vartheta}$$

La funzione

(XIV-64) $$\rho(r) = r \frac{B_z}{B_\vartheta}$$

viene chiamata 'pitch' della linea di forza elicoidale e differisce dal 'passo' della linea di un fattore 2π. Sia L(r) che P(r) sono costanti su una superficie magnetica r = cost. Qualora l'inclinazione delle linee di forza vari da superficie magnetica a superficie magnetica ($dP/dr \neq 0$) si dice che le linee di forza hanno uno "shear" finito.Questo e' spesso indice di sforzi di taglio tra superfici del fluido e di fenomeni di viscosita e turbolenza nella colonna di plasma .

Sistemi di confinamento toroidali

Il campo interno ad un solenoide a geometria toroidale ha linee di forza circolari.

Il campo magnetico interno al solenoide decresce come 1/R, dove R e' il raggio maggiore del toro ed e' nullo nello spazio esterno.

Infatti applicando il teorema ella circuitazione ad una circonferenza interna al toro di raggio R si ottiene

(XIV-65) $$\oint \mathbf{B}d\mathbf{s} = 2\pi R\mathbf{B}(R) = \mu_0 NI$$

Dove NI sono le correnti concatenate al circuito (e NI = 0 fuori dal toro)

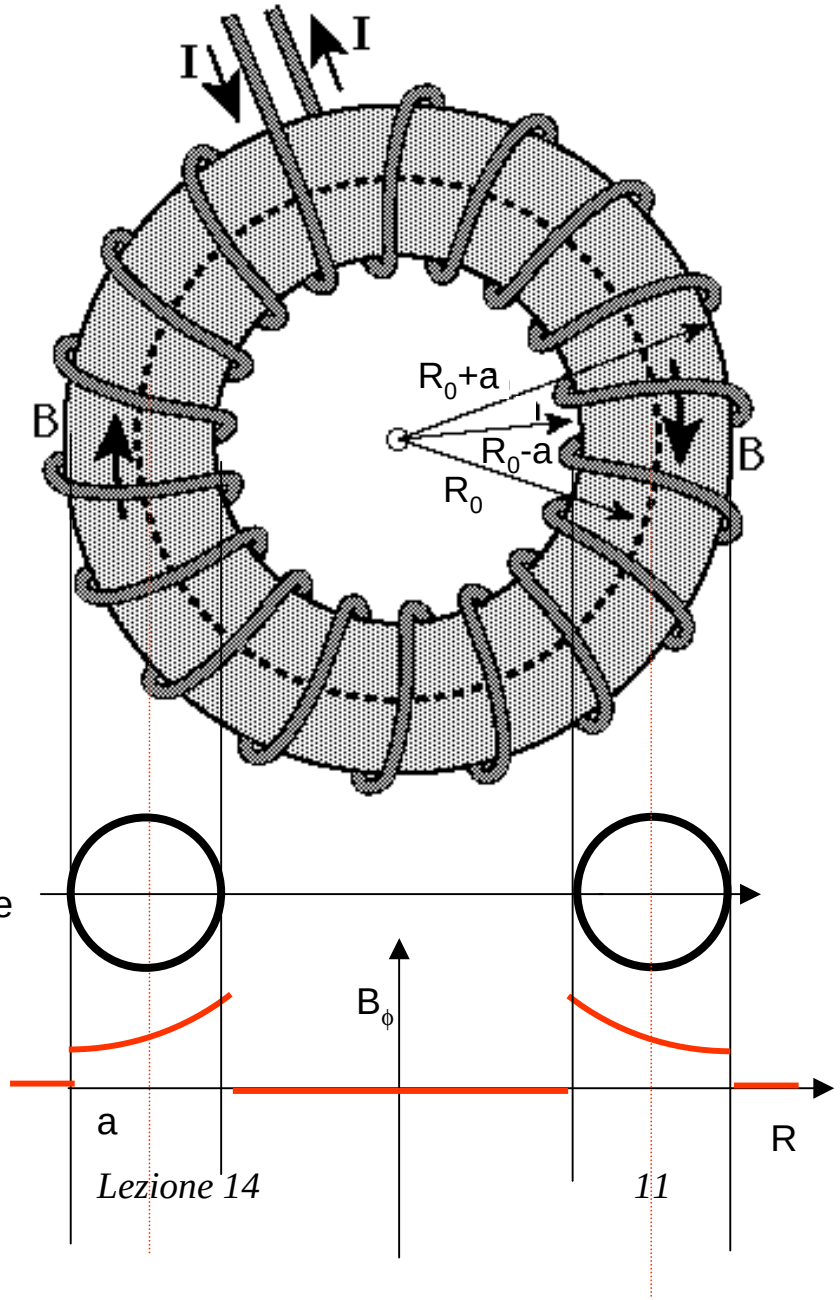
(XIV-66) $$\mathbf{B}(R) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R}$$

Applicando la (XIV-66) a R=R_0

(XIV-67) $$\mathbf{B}(R_0) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R_0}$$

E dividendo membro a membro le (XIV-66 e 67) si puo esprimere il valore del campo in funzione del valore sull' asse magnetico

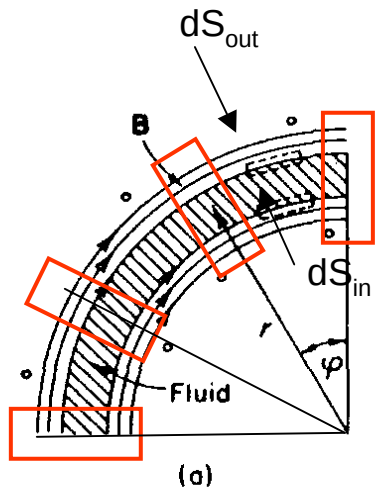
$$\mathbf{B}(R_0) = B_0 \frac{R_0}{R}$$



Confinamento magnetico toroidale

In figura e' mostrato un quarto di una colonna di plasma a forma di toro visto dall' alto ed inserito in un sistema di bobine che producono un campo magnetico toroidale Questo campo (come si e' mostrato) decresce come 1/ R , (dove R e' il "raggio maggiore" del toro) in assenza di fluido. A causa di questa variazione non e' possibile mantenere il plasma in equilibrio magneto-idrodinamico

Infatti, consideriamo il caso in cui l' interfaccia plasma-vuoto e' delimitato da contorni netti, con una la pressione cinetica costante. Dunque $\nabla p = 0$ e in tutto il fluido e pertanto il fluido è privo di campo.



Per l'equilibrio, l'integrale di superficie della pressione totale (materiale+ magnetica) deve dare come risultato zero su qualunque superficie chiusa.

Consideriamo una superficie chiusa dS_{out} che taglia la superficie di contorno del fluido con dimensioni lineari piccole in direzione perpendicolare ad essa. Sulla faccia interna al fluido abbiamo dS_{out} che preme verso l'esterno mentre sulla faccia esterna abbiamo una forza $(B^2/2\mu_0)\, dS_{out}$ diretta verso l'interno. Se ora consideriamo un'altra superficie chiusa che taglia il contorno del toro e che si trovi ad un raggio R diverso troviamo una pressione p invariata ed una pressione magnetica diversa, dato che B varia come 1/R. Di conseguenza non può esserci equilibrio.

Se ammettiamo per esempio che l'equilibrio delle pressioni si verifica sulla faccia interna del toro, il campo magnetico non sarebbe sufficiente ad equilibrare la pressione del plasma sulla faccia esterna, e quindi il toro espanderebbe nella direzione del raggio maggiore.

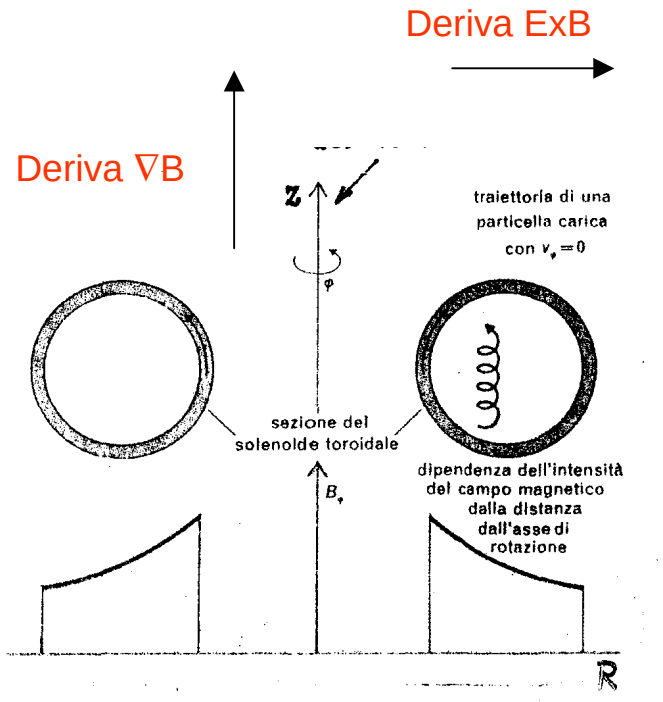
Si può concludere quindi che una con dizione di equilibrio statico per un fluido a contorno netto è la costanza di B su tutta la superficie di contorno.

Confinamento magnetico toroidale

Il fatto che il campo prodotto da un semplice solenoide toroidale non sia sufficiente a confinare un plasma, era prevedibile in vista del moto a particella singola. Se l'intensità del campo magnetico decresce con la distanza dall'asse principale del toro, ci sarà un gradiente di campo grad(*B*) parallelo al raggio maggiore del toro e diretto verso l'interno,

La disuniformita' del campo produce, come abbiamo visto, una deriva verticale che provoca una separazione di carica.

Questa, a sua volta, provoca, una deriva in direzione radiale, indipendente dalla carica, equivalente al moto di espansione solidale di tutte le componenti



Confinamento magnetico toroidale

Allo stesso risultato si arriva anche pensando di chiudere su se stessa una configurazione di puro z-pinch: una corrente toroidale da sola non può confinare il plasma. Il campo poloidale B_0 che si genera, è più intenso nella parte interna (a causa della curvatura toroidale) e l'anello di plasma tende ad espandersi verso l'esterno.

Per superare questa difficoltà, conviene considerare la combinazione di correnti e campi magnetici con componenti sia longitudinali (campo toroidale B_T) che azimutali (campo poloidale B_P) .

Le linee di forza assumono una forma elicoidale, con passi variabili a seconda della loro distanza dall' asse magnetico

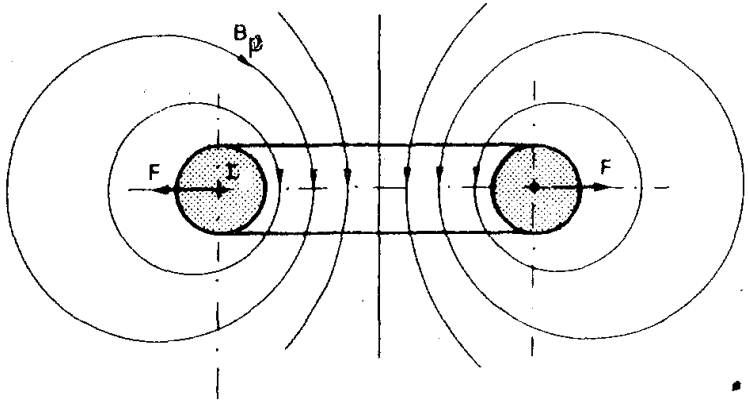
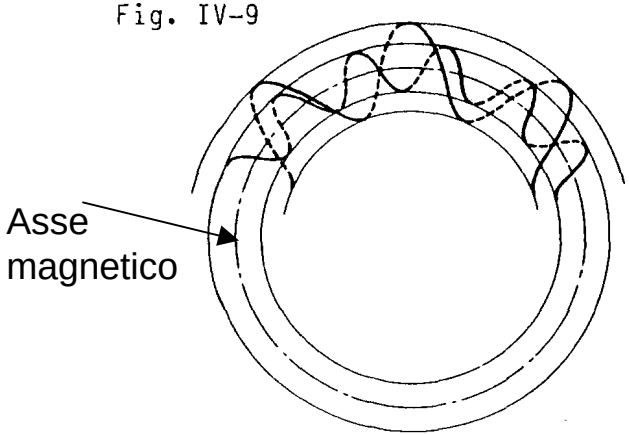


Fig. IV-9

Si ottiene pertanto una una famiglia di toroidi intrecciati formati dalle linee di campo magnetico. Il toro più interno, degenerato in una curva singola chiusa, si chiama 'asse magnetico

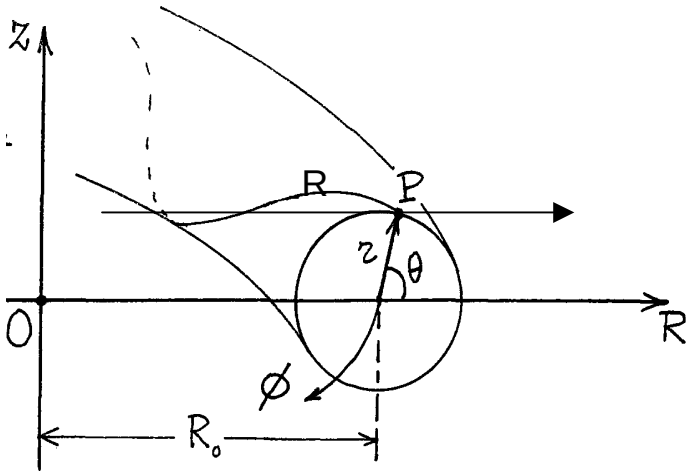


Trasformata rotazionale

Quando si ha una configurazione di campo magnetico con linee di forza a forma di elica, del tipo descritto, si usa spesso dire che il campo magnetico ha una 'trasformata rotazionale'. Analogamente a quanto fatto in geometria cilindrica per lo Z-pinch, immaginiamo di seguire un punto P che si muove lungo una linea di forza di campo magnetico, che giace su una superficie toroidale di raggio maggiore R e raggio minore r (vedi figura) Ad una rotazione $d\phi$ attorno all'asse principale del piano meridiano passante per il punto P, corrisponde una rotazione $d\theta$ del punto attorno all'asse magnetico. Si definisce 'trasformata rotazionale' la quantità

(XIV-68) $\iota = d\theta/d\phi$

essa e' pari all' l'angolo $\theta/2\pi$ attorno all'asse magnetico percorso da una linea di forza, quando essa compie un giro completo attorno all'asse verticale (toroidale) di un angolo $\Delta\phi = 2\pi$. Il suo inverso $q = 1/\iota$ è il detto <u>'fattore di sicurezza'</u> ed è un parametro importante nella teoria della stabilità e della diffusione.

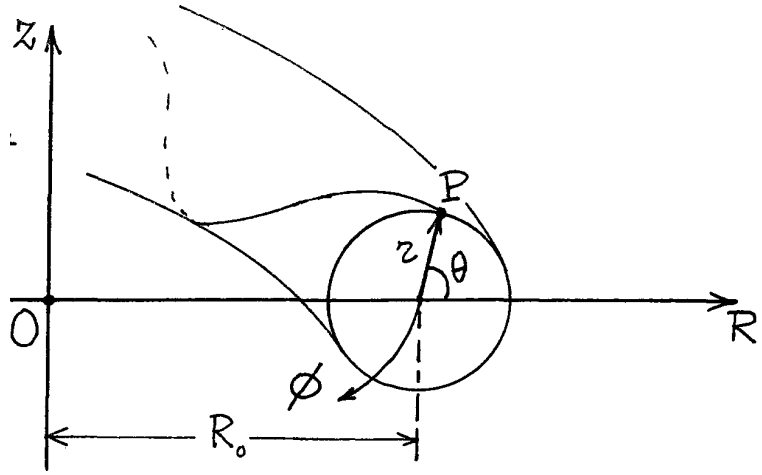


Trasformata rotazionale

L'equazione di linee di forza elicoidali in geometria toroidale si ricavano direttamente come estensione della

(XIV-65)
$$\frac{rd\theta}{B_\vartheta} = \frac{dz}{B_z}$$

ponendo dz = Rdϕ, dove R= R_0 + r cos(θ) e' la distanza del punto P dall'asse del toro, B_P. e B_T. sono le componenti poloidale e toroidale del campo magnetico.



Si ottiene::

(XIV-69)
$$\frac{rd\theta}{B_P} = \frac{Rd\phi}{B_T}$$

Utilizzando l'equazione della linea di forza

:(XIV-70)
$$\iota = \frac{R}{r}\frac{B_P}{B_T} = \frac{1}{q}$$

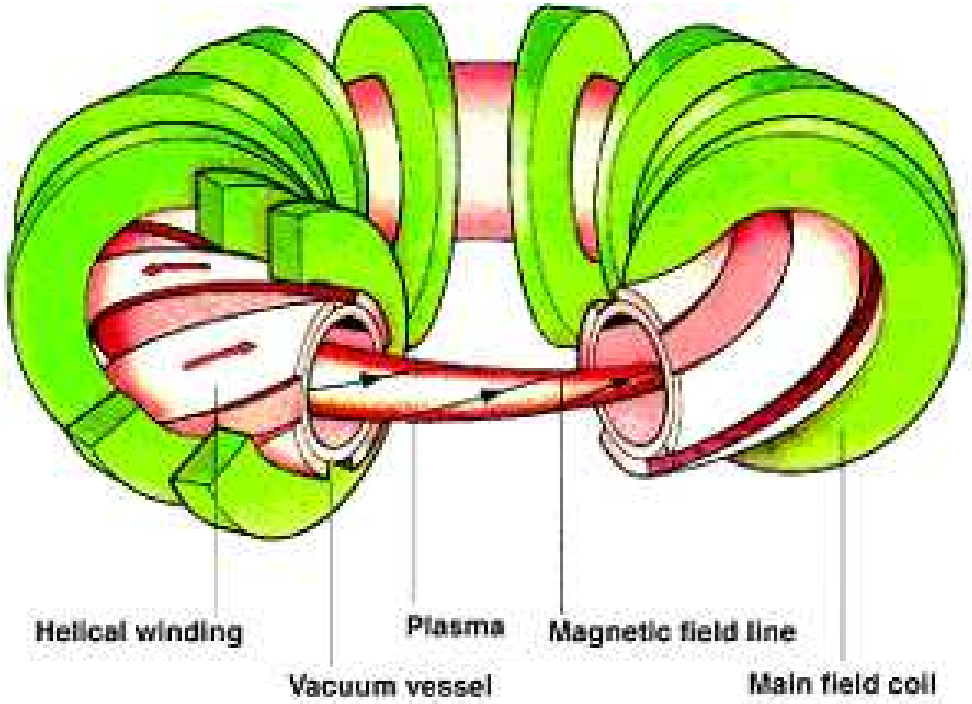
Si può dimostrare che, a meno di termini di ordine superiore, in r/R_0, ι e' costante su una superficie magnetica r = cost. In generale ι varia al variare di r (dι/dr = 0), anche in questo caso si dice che le linee di forza hanno uno 'shear' finito.

Sistemi di confinamento tipo Stellarator

Un modo per produrre un campo toroidale con trasformata rotazionale è quello dello 'Stellarator', nel quale, oltre alle normali bobine toroidali, vengono impiegati degli avvolgimenti elicoidali attorno alla camera da vuoto

Questi avvolgimenti addizionali generano un campo magnetico elicoidale nella camera toroidale, la cui direzione varia man mano che ci si sposta lungo il toro,

Questa configurazione e' stata inventata da Spitzer al PPPL e ha la proprietà di poter confinare, al suo interno,un plasma in cui non fluisce alcuna corrente assiale.



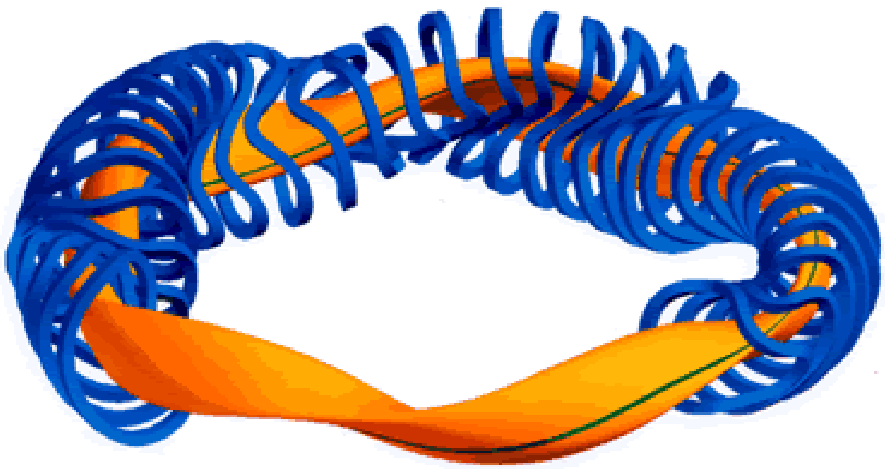
La struttura di confinamento e' pertanto fornita completamente da campi magnetici imposti dall' esterno

La configurazione magnetica dello Stellarator e' .relativamente complessa perché per la produzione dei campi sono necessarie bobine di forma piuttosto complessa e di grande precisione meccanica e non e' certo che possa essere utilizzato come base per un reattore.

In queste lezioni consideremo solo brevemente questa configurazione magnetica.

Stellarator

LHC (Japan)



Weldestein - X (Germania)

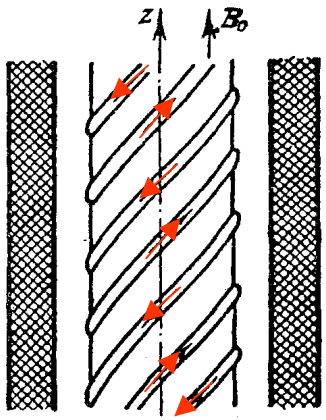
Sistemi toroidali tipo “stellarator”

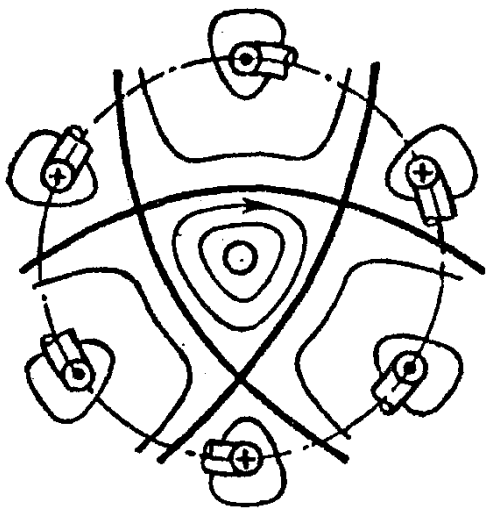
Per dare un'idea della geometria delle linea del campo risultante che si genera dalla sovrapposizione di campi toroidale e elicoidale, possiamo semplificare il problema sostituendo la camera toroidale con un cilindro rettilineo, infinito.

Assumiamo che il campo trasversale sia prodotto da un avvolgimento di 2ℓ conduttori avvolti ad elica disposti simmetricamente attorno alla superficie esterna del cilindro; le correnti in questi conduttori siano di uguale intensità, ma opposte in direzione in conduttori adiacenti.

Quando il campo creato da un avvolgimento ad elica di questo tipo è sovrapposto al campo uniforme assiale di un solenoide rettilineo semplice, le linee di forza si avvolgono attorno all'asse di simmetria del cilindro.

Se si sceglie una linea di forza passante per un punto interno al cilindro e non troppo periferico, e la si segue lungo il tubo per una distanza più lunga del passo dell'avvolgimento elicoidale esterno, si può vedere facilmente che la linea di forza gradualmente ruota attorno all'asse del cilindro. Essa giace naturalmente su una 'superficie magnetica[1].

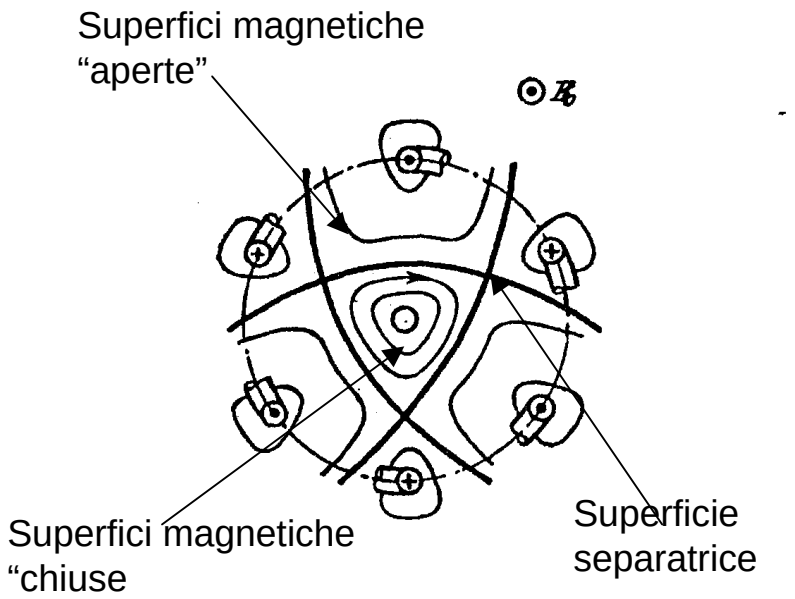




Sistemi toroidali tipo “stellarator”

In figura e’ mostrata una sezione delle superfici magnetiche nel caso $\ell = 3$. In questa struttura multipolare di campo magnetico si possono individuare superfici magnetiche “chiuse” su cui giacciono linee di forza di campo magnetico che si avvolgono attorno all’asse magnetico e non attraversano le pareti del “ contenitore” ed “aperte” ovvero superfici magnetiche le cui linee di forza si chiudono attorno ai conduttori elicoidali attraversando il contenitore ”. La zona di confinamento del plasma e’ ovviamente limitata all’ interno della prima categoria di superfici.

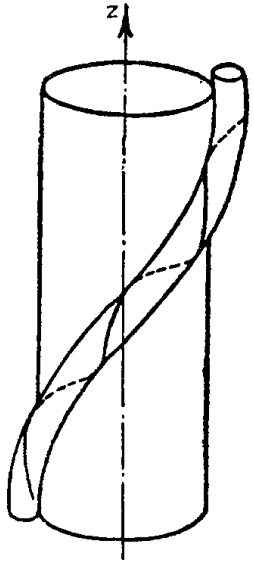
La superficie magnetica intermedia, che separa regioni dello spazio con superfici magnetiche a topologia diversa, si chiama "separatrice".



Caratteristici di questa superficie sono i vertici (punti X) La posizione della 'separatrice' ha grande importanza pratica, perché le particelle del plasma risultano confinate da linee di campo a forma elicoidale solo se esse si trovano nella regione di spazio delimitata dalla separatrice.

Se si aumenta la corrente negli avvolgimenti elicoidali lasciando inalterato il campo magnetico assiale, la separatrice si comprime verso l'asse del cilindro e vi è quindi una riduzione del volume della regione adatta a confinare il plasma.

Sistemi toroidali tipo “stellarator”



All' interno della 'separatrice', una linea di *forza* che giace su una superficie magnetica chiusa ha anche essa un andamento ad elica lungo la direziono dell'asse del cilindro, ma essa “spiralizza” più in fretta di quanto non faccia la sezione normale della superficie magnetica, e pertanto si avvolge diverse volte attorno alla superficie magnetica che essa crea, entro lo spazio dato dal passo della superficie magnetica

In figura e’ mostrata la forma di una linea di campo all'interno della separatrice: essa si avvolge ad elica attorno alla superficie magnetica, la quale,a sua volta, ha una forma elicoidale attorno all'asse del cilindro, ma con un passo più lungo. La linea forma un'elica con un 'passo' pari a L/ℓ (L è il 'passo' degli avvolgimenti elicoidali esterni) e questa elica ha una proiezione ellittica sul piano perpendicolare al suo asse.

L'asse, a sua volta, è una linea elicoidale con un 'passo' molto più lungo ed una proiezione circolare sul piano perpendicolare all'asse del cilindro.
Dai punto di vista realizzavo la precisione di posizionamento dei conduttori elicoidali dello Stellarator deve essere molto elevata. Risulta che le tolleranze ammissibili dei parametri dei magneti come il passo degli avvolgimenti, la distanza dei conduttori, il diametro degli avvolgimenti, etc., risulta essere dell'ordine di 0,1%. Questo fa si che la costruzione di un sistema Stellarator di grandi dimensioni pone spesso importanti problemi meccanici