

Lezioni di Fisica Teorica

A. Bottino e C. Giunti

Anno Accademico 2001-2002

Indice

I	Meccanica Quantistica Relativistica	I.1
1	Equazione di Dirac	I.3
1.1	Introduzione	I.3
1.2	L'equazione di Dirac	I.5
1.2.1	Proprietà delle matrici γ^μ	I.8
1.2.2	Prodotti di matrici γ : matrici Γ^a	I.9
1.2.3	Teorema fondamentale sulle rappresentazioni delle matrici γ . . .	I.10
1.2.4	Equazione di Dirac in versione hamiltoniana	I.11
1.2.5	Rappresentazione di Dirac delle matrici γ	I.11
1.3	Covarianza dell'equazione di Dirac	I.12
1.3.1	Rotazione attorno all'asse x^k	I.14
1.3.2	Trasformazione di velocità nella direzione x^k	I.15
1.3.3	Matrice coniugata hermitiana di $\mathcal{S}_\Lambda$	I.16
1.4	Trasformazioni discrete	I.16
1.4.1	Inversione spaziale (parità)	I.16
1.4.2	Inversione temporale	I.17
1.5	Forme bilineari con spinori di Dirac	I.18
1.5.1	Proprietà di trasformazione dello spinore aggiunto	I.19
1.5.2	Trasformazioni di forme bilineari per trasformazioni di Lorentz proprie e inversioni spaziali	I.19
2	Soluzioni libere dell'equazione di Dirac	I.21
2.1	Soluzioni libere nel sistema di riposo della particella	I.21
2.2	Soluzioni libere in un sistema di riferimento generico	I.23
2.3	Limite non-relativistico ($v \ll c$)	I.26
2.4	Normalizzazione delle soluzioni libere	I.27
2.5	Pacchetti d'onda	I.28
2.6	Proiettori su stati ad energia positiva e su stati ad energia negativa . . .	I.29
3	Operatori momenti angolari in teoria di Dirac	I.33
3.1	Operatore di spin	I.33
3.2	Conservazione del momento angolare totale	I.35
4	Interazione elettrone-campo elettromagnetico	I.37
4.1	Qualche richiamo sul campo elettromagnetico	I.37
4.2	Interazione elettrone-campo elettromagnetico	I.38

4.3	Invarianza di gauge	I.38
4.4	Hamiltoniana di interazione elettrone-campo elettromagnetico	I.39
4.5	Interazione elettromagnetica nel limite non-relativistico	I.41
4.6	Approssimazione non-relativistica in un campo elettrostatico	I.43
5	Elettrone in un campo a simmetria sferica	I.47
5.1	Costanti del moto	I.47
5.2	Riduzione a spinori a due componenti	I.48
5.3	Separazione delle variabili	I.50
5.4	Soluzione delle equazioni radiali per un atomo idrogenoide	I.52
6	Coniugazione di carica	I.59
6.1	Mare di Dirac	I.59
6.2	Coniugazione di carica	I.61
7	Funzioni di Green	I.65
7.1	Funzione di Green per l'equazione di Dirac	I.65
7.2	Funzione di Green per l'equazione di Klein-Gordon	I.68
A	Unità naturali	I.69
B	Quadri-vettori – metrica	I.71
C	Tracce di prodotti di matrici γ	I.73
D	Rappresentazioni delle matrici γ	I.75
D.1	Proprietà generali	I.75
D.1.1	Rappresentazione di Dirac	I.75
D.1.2	Rappresentazione di Majorana	I.76
D.1.3	Rappresentazione chirale	I.77
E	Trasformazioni di forme bilineari per inversione temporale	I.79
F	Dimostrazione della proprietà $\vec{L}^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi = \ell_x (\ell_x + 1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi$	I.81
II	Elementi di Elettrodinamica Quantistica	II.1
1	Quantizzazione del campo elettromagnetico	II.3
1.1	Introduzione	II.3
1.2	Scelte di gauge particolari	II.3
1.3	Sviluppo in serie di Fourier	II.5
1.4	Quantizzazione del campo di radiazione	II.7
1.5	Spazio di Fock e operatori connessi	II.8
1.6	Massa e spin dei fotoni	II.9

2	Cenni sul metodo (canonico) di quantizzazione dei campi	II.13
2.1	Formulazione lagrangiana-hamiltoniana per campi classici	II.13
2.2	Quantizzazione dei campi	II.17
3	Campi di Dirac	II.23
3.1	Operatori fermionici di creazione e di annichilazione	II.23
3.2	Lagrangiana di Dirac ed equazioni di campo	II.24
3.3	Campi di Dirac quantizzati	II.25
3.4	Anticommutatori dei campi $\psi, \bar{\psi}$	II.27
3.5	Dimensioni degli operatori di campo	II.29
4	Interazione campo di Dirac – campo elettromagnetico	II.31
4.1	Operatore lagrangiano ed operatore hamiltoniano	II.31
4.2	Anticommutatori degli operatori di campo $\psi^{(\pm)}$ e $\bar{\psi}^{(\pm)}$	II.34
5	Teoria perturbativa della matrice $\mathcal{S}$	II.35
5.1	Introduzione	II.35
5.2	Rappresentazione di interazione	II.36
5.3	Matrice $\mathcal{S}$ e suo sviluppo perturbativo	II.37
5.4	Prodotto normale	II.39
5.5	$\mathcal{H}_I$ espresso come prodotto normale	II.41
5.6	Prodotto cronologico di Wick	II.42
5.7	Contrazione di campi fermionici	II.43
5.8	Teorema di Wick	II.44
6	Campo elettromagnetico in formulazione covariante	II.47
6.1	Sviluppo di Fourier di A_μ	II.47
6.2	Commutatori di A_μ	II.48
6.3	Propagatore del fotone	II.48
7	Processi al second'ordine perturbativo	II.51
7.1	Termini del second'ordine	II.51
7.2	Scattering Compton	II.52
7.3	Altri processi del second'ordine	II.63
8	Processi ad ordini perturbativi superiori al secondo	II.73
8.1	Scattering Møller e^-e^-	II.73

III Elementi di Interazione Debole III.1

1	Generalità sull'interazione debole	III.3
1.1	Processi deboli	III.3
1.2	Violazione di leggi di conservazione	III.5

2	Spinori chirali	III.11
2.1	Autofunzioni dell'operatore chiralità	III.11
2.2	Proprietà di elicità per $m = 0$	III.13
2.3	Equazioni di Weyl	III.14
2.4	Neutrini e antineutrini	III.14
2.5	Operazioni C, P, T sulle equazioni di Weyl	III.15
2.6	Covarianti bilineari con spinori chirali	III.18
2.7	Spinori di Majorana	III.19
3	Processi deboli con correnti cariche	III.21
3.1	Ampiezze con scambio di W	III.21
3.2	Il bosone intermedio W	III.24
3.3	Lagrangiana di Fermi	III.27
3.4	Correnti deboli (cariche) adroniche	III.29
4	Processi deboli con correnti neutre	III.33
4.1	Limite di bassa energia	III.34
4.2	Struttura delle correnti deboli neutre	III.34
A	Classificazione delle particelle	III.37

Parte I

Meccanica Quantistica Relativistica

A. Bottino e C. Giunti

Capitolo 1

Equazione di Dirac

1.1 Introduzione

Nella meccanica quantistica non-relativistica l'equazione di Schrödinger per una particella libera

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi \quad (1.1)$$

può essere ottenuta dalla relazione classica non-relativistica tra energia E ed impulso $\vec{p}$

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (1.2)$$

mediante sostituzione delle grandezze classiche E e $\vec{p}$ con i corrispondenti operatori differenziali, ossia

$$E \longrightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.3a)$$

$$\vec{p} \longrightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (1.3b)$$

Associata all'equazione di Schrödinger vi è l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (1.4)$$

dove ρ (densità di probabilità) e $\vec{j}$ (densità di corrente di probabilità) sono date da

$$\rho(t, \vec{x}) = |\psi(t, \vec{x})|^2, \quad (1.5)$$

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \left(\vec{\nabla} \psi \right) - \left(\vec{\nabla} \psi^* \right) \psi \right]. \quad (1.6)$$

L'equazione di continuità (1.4) ha un ruolo cruciale nell'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica. Dato un volume V nello spazio, utilizzando il teorema di Gauss, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \, dV = - \int_S \vec{j} \cdot \vec{n}_S \, dS, \quad (1.7)$$

dove S è la superficie che racchiude il volume V e $\vec{n}_S$ è il versore normale alla superficie S . Quindi la variazione di probabilità nel volume V è uguale al flusso del vettore $\vec{j}$ attraverso la superficie S . Per un volume infinito $\int_S \vec{j} \cdot \vec{n}_S dS = 0$; ne segue la conservazione globale della probabilità, ossia

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = 0, \quad (1.8)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

In analogia a quanto fatto nel caso non-relativistico, un'equazione quantistica relativistica può essere ottenuta dalla relazione classica relativistica tra energia e impulso

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.9)$$

mediante la sostituzione (1.3).

In unità naturali ($\hbar = c = 1$) e con notazioni covarianti¹ si ha che l'espressione (1.9), ossia

$$p^\mu p_\mu = m^2, \quad (1.10)$$

mediante sostituzione

$$p^\mu \longrightarrow \hat{p}^\mu = i \partial^\mu \quad (1.11)$$

viene trasformata nella relazione operatoriale

$$-\partial^\mu \partial_\mu = m^2. \quad (1.12)$$

In queste espressioni p^μ indica il quadri-vettore energia-impulso $p^\mu = (E, \vec{p})$ e $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$. Data la proprietà di invarianza dell'operatore $\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \equiv \square + m^2$ per trasformazioni di Lorentz, ne segue che l'equazione

$$\boxed{(\square + m^2) \psi = 0} \quad \text{equazione di Klein-Gordon} \quad (1.13)$$

è appropriata per la descrizione di particelle scalari (ossia, di spin nullo).

Notiamo che l'equazione di Klein-Gordon ammette soluzioni nella forma di onde piane. Infatti, sostituendo nella (1.13) la soluzione

$$\psi_p(x) = e^{-ip \cdot x} \equiv e^{-ip_\mu x^\mu}, \quad (1.14)$$

si ritrova la relazione (1.10), ossia la (1.9). L'equazione agli autovalori per l'operatore energia è

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_p(x) = p_0 \psi_p(x) = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \psi_p(x). \quad (1.15)$$

Siamo quindi in presenza di stati ad energia positiva e di stati ad energia negativa. Questi ultimi stati non possono essere eliminati dalla teoria, ma ne costituiscono parte integrante. Nello schema della meccanica quantistica, interazioni con campi esterni possono indurre transizioni della particella (elettrone) tra tutti i livelli energetici.

Sottraendo dall'equazione di Klein-Gordon (1.13), moltiplicata per ψ^* , la sua complessa coniugata, moltiplicata per ψ , si ottiene l'equazione di continuità scritta in forma covariante

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.16)$$

¹Vedi Appendici A e B.

con la quadri-corrente

$$j^\mu = \frac{i}{2m} [\psi^* (\partial^\mu \psi) - (\partial^\mu \psi^*) \psi] . \quad (1.17)$$

Osserviamo che la componente temporale j^0 della quadri-corrente

$$j^0 = \frac{i}{2m} \left[\psi^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \psi \right] \quad (1.18)$$

non è una quantità definita positiva e non può quindi essere interpretata come densità di probabilità. Questo problema dell'equazione di Klein-Gordon si presenta solo nell'ambito della meccanica quantistica (teoria ad una particella). La struttura (1.17) della quadri-corrente è invece perfettamente interpretabile nell'ambito della teoria dei campi². Notiamo ancora che la struttura particolare della ρ nella teoria di Klein-Gordon è attribuibile al fatto che l'equazione in questione è del second'ordine nella derivata temporale (nell'equazione di Schrödinger la derivata temporale è invece del prim'ordine).

1.2 L'equazione di Dirac

Poniamoci ora il problema di determinare la struttura matematica di un'equazione quantistica relativistica adeguata alla descrizione di una particella di spin 1/2. Vogliamo che, associata all'equazione d'onda, vi sia un'equazione di continuità con densità di probabilità definita positiva. Come abbiamo visto precedentemente, questa richiesta implica che l'equazione d'onda sia del prim'ordine nella derivata temporale.

Vediamo di elencare tutte le proprietà a cui deve soddisfare l'equazione che cerchiamo (equazione di Dirac):

1. Per avere una corretta equazione di continuità, l'equazione dev'essere del prim'ordine nella derivata temporale;
2. per covarianza relativistica, l'equazione dev'essere del prim'ordine anche nelle derivate spaziali;
3. per il principio di sovrapposizione, l'equazione dev'essere lineare ed omogenea;
4. la funzione d'onda deve descrivere anche gradi di libertà di spin e deve quindi essere a più componenti: $\psi_\ell(x)$, con $\ell = 1, 2, \dots, N$ (nella teoria non relativistica di Pauli le componenti sono 2);
5. l'equazione d'onda dev'essere compatibile con l'equazione di Klein-Gordon;
6. dall'equazione si deve poter dedurre un'equazione di continuità con densità di probabilità data da $\rho = \sum_{\ell=1}^N \psi_\ell^* \psi_\ell$.

²Vedi, ad esempio, Bjorken & Drell e Itzykson & Zuber.

Per usare espressioni al più possibile compatte, conviene utilizzare per la funzione d'onda una notazione matriciale

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Questo spinore generalizza lo spinore a 2 componenti di Pauli. Conseguentemente, la densità di probabilità si scrive $\rho = \psi^\dagger \psi$.

Un'equazione che soddisfa ai primi quattro punti è la seguente

$$\boxed{i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0} \quad \text{equazione di Dirac.} \quad (1.20)$$

Data la natura matriciale della ψ , i coefficienti γ^μ che compaiono nella (1.20) vanno intesi come matrici di costanti. Quindi una scrittura esplicita dell'equazione (1.20) è

$$i \sum_{n=1}^N (\gamma^\mu)_{\ell n} (\partial_\mu \psi_n) - m \psi_\ell = 0 \quad (\ell = 1, \dots, N), \quad (1.21)$$

da cui si vede come l'equazione di Dirac è in realtà equivalente a un sistema di equazioni differenziali accoppiate nelle componenti ψ_ℓ .

Per scrivere l'equazione (1.20) abbiamo fatto uso delle condizioni 1-4. Determiniamo ora alcune proprietà generali delle matrici γ^μ , che discendono dalle condizioni 5-6.

Richiediamo innanzi tutto che dall'equazione di Dirac discenda quella di Klein-Gordon. Per far ciò, moltiplichiamo a sinistra l'equazione di Dirac (1.20) per l'operatore

$$i\gamma^\mu \partial_\mu + m \mathbb{1}. \quad (1.22)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) (i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \psi \\ &= - \left[\frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right] \psi. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Affinchè questa equazione coincida con l'equazione di Klein-Gordon (1.13) è necessario che le matrici γ soddisfino alle relazioni

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}}. \quad (1.24)$$

Queste condizioni implicano che le quattro matrici γ^μ anticommutano tra di loro ed inoltre che i loro quadrati sono dati da

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.25)$$

Dalla precedente derivazione discende anche che il coefficiente m nell'operatore di Dirac dev'essere identificato con la massa della particella. Notiamo che l'equazione di Dirac realizza una *linearizzazione* dell'equazione di Klein-Gordon.

Passiamo ora all'esame dell'equazione di continuità. Per ricavarla conviene considerare innanzi tutto l'equazione hermitiana coniugata dell'equazione di Dirac (1.20):

$$-i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = 0, \quad (1.26)$$

e quindi sottrarre dalla (1.20) moltiplicata a sinistra per $\psi^\dagger\gamma^0$ la (1.26) moltiplicata a destra per $\gamma^{0\dagger}\psi$. Otteniamo così

$$i\left[\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu\psi^\dagger)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}\psi\right] - m\left[\psi^\dagger\gamma^0\psi - \psi^\dagger\gamma^{0\dagger}\psi\right] = 0. \quad (1.27)$$

Per ottenere una struttura appropriata a un'equazione di continuità è necessario che l'ultimo termine nella (1.27) si annulli, ossia che la matrice γ^0 sia hermitiana:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0. \quad (1.28)$$

Il primo termine nella (1.27) può essere identificato con una divergenza solo se le matrici γ sono tali che il prodotto $\gamma^0\gamma^\mu$ sia una matrice hermitiana:

$$\gamma^0\gamma^\mu = \gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger} = (\gamma^0\gamma^\mu)^\dagger. \quad (1.29)$$

In questo caso si ottiene l'equazione di continuità (1.16) con la corrente j^μ data da

$$j^\mu = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi. \quad (1.30)$$

Osserviamo che la componente temporale della corrente è data da

$$j^0 = \psi^\dagger\psi, \quad (1.31)$$

in virtù della proprietà $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ precedentemente dimostrata. Dalle (1.28) e (1.29) si ottiene che le hermitiane delle matrici γ^μ sono date da

$$\boxed{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0}, \quad (1.32)$$

da cui discende in particolare che le γ^k sono anti-hermitiane:

$$\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k. \quad (1.33)$$

La quadri-corrente j^μ verrà nel seguito riscritta come

$$\boxed{j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi}, \quad (1.34)$$

dove è stato introdotto lo *spinore aggiunto* $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$. Questo spinore aggiunto $\bar{\psi}$ soddisfa all'equazione

$$i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0, \quad (1.35)$$

come si può dimostrare moltiplicando la (1.26) a destra per γ^0 ed utilizzando la (1.32) e la proprietà $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$.

1.2.1 Proprietà delle matrici γ^μ

Dalle proprietà precedentemente viste per le matrici γ^μ altre seguono.

1. Le matrici γ hanno traccia nulla

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0. \quad (1.36)$$

Infatti, per esempio, utilizzando la proprietà (1.24), per la traccia delle γ^k si ha (nella traccia dei prodotti di 3 matrici γ prima permutiamo circolarmente e poi commutiamo tra di loro γ^0 e γ^k)

$$\text{Tr}[\gamma^k] = \text{Tr}[\gamma^0 \gamma^0 \gamma^k] = \text{Tr}[\gamma^0 \gamma^k \gamma^0] = -\text{Tr}[\gamma^0 \gamma^0 \gamma^k] = -\text{Tr}[\gamma^k] \Rightarrow \text{Tr}[\gamma^k] = 0.$$

Per le tracce di prodotti di matrici γ si veda l'Appendice C.

2. La dimensione N delle matrici γ è pari. Infatti, consideriamo per esempio la relazione

$$\gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0 = (-\mathbb{1}) \gamma^k \gamma^0. \quad (1.37)$$

Prendendone il determinante si ottiene

$$\text{Det}\gamma^0 \text{Det}\gamma^k = (-1)^N \text{Det}\gamma^k \text{Det}\gamma^0. \quad (1.38)$$

Essendo $\text{Det}\gamma^0 \neq 0$ e $\text{Det}\gamma^k \neq 0$ (γ^0 e γ^k ammettono gli inversi), si trova

$$1 = (-1)^N \Rightarrow N \text{ pari}. \quad (1.39)$$

3. La dimensione minima delle matrici γ è $N = 4$. Infatti, nel caso $N = 2$ esistono solo tre matrici mutuamente anticommutanti, le matrici di Pauli.
4. Poichè la matrice γ^0 è hermitiana e le matrici γ^k sono anti-hermitiane, le matrici γ possono essere diagonalizzate (non tutte simultaneamente, ma una alla volta, perchè anticommutano). Dalle relazioni (1.25) si ricava che gli autovalori della matrice γ^0 sono ± 1 e gli autovalori delle matrici γ^k sono $\pm i$.

Definiamo una matrice γ^5 tale che ³

$$\gamma^5 \equiv -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (1.40)$$

(si utilizzerà anche la notazione γ_5 con l'intesa che $\gamma_5 = \gamma^5$). Dalle proprietà delle matrici γ si ottiene che

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (1.41a)$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad (1.41b)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (1.41c)$$

³Notare che la nostra definizione di γ^5 differisce di un segno rispetto a quella di alcuni autori (ad esempio Bjorken & Drell e Itzykson & Zuber).

1.2.2 Prodotti di matrici γ : matrici Γ^a

Definiamo le 16 matrici Γ^a ($a = 1, 2, \dots, 16$) ottenute da prodotti di matrici γ :

$$\Gamma^1 = \mathbb{1} \quad (1.42a)$$

$$\Gamma^2 - \Gamma^5 = \gamma^\mu \quad (1.42b)$$

$$\Gamma^6 - \Gamma^{11} = \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{prodotti di 2 matrici } \gamma) \quad (1.42c)$$

$$\Gamma^{12} - \Gamma^{15} = \gamma^\mu \gamma^5 \quad (\text{prodotti di 3 matrici } \gamma) \quad (1.42d)$$

$$\Gamma^{16} = \gamma^5 \quad (\text{prodotto di 4 matrici } \gamma) \quad (1.42e)$$

Le matrici Γ godono delle seguenti proprietà:

1. Qualsiasi prodotto di matrici γ è proporzionale ad una delle Γ^a , con un fattore di proporzionalità uguale a ± 1 o $\pm i$.
2. Per ogni coppia Γ^a, Γ^b con $a \neq b$ esiste una matrice $\Gamma^c \neq \mathbb{1}$ tale che

$$\Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c \quad \text{con} \quad \alpha = \pm 1, \pm i. \quad (1.43)$$

Infatti, poichè $\Gamma^a \neq \Gamma^b$, il prodotto $\Gamma^a \Gamma^b$ contiene almeno una matrice γ^μ in numero dispari. Poichè un numero dispari di γ^μ non può essere semplificato usando le proprietà (1.25), si ha $\Gamma^c \neq \mathbb{1}$.

3. Il quadrato di ciascuna matrice Γ^a è $\pm \mathbb{1}$:

$$(\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{1} \quad (1.44)$$

4. Per ogni $\Gamma^a \neq \mathbb{1}$ esiste almeno una Γ^b tale che

$$\Gamma^a \Gamma^b = -\Gamma^b \Gamma^a. \quad (1.45)$$

5. Le matrici Γ^a con $a > 1$ hanno traccia nulla:

$$\text{Tr}[\Gamma^a] = 0 \quad \text{per} \quad a > 1. \quad (1.46)$$

Infatti, utilizzando la matrice Γ^b che anticommuta con la matrice Γ^a , si ha (prima commutiamo e poi permutiamo circolarmente)

$$\text{Tr}[\Gamma^a] = \pm \text{Tr}[\Gamma^a (\Gamma^b)^2] = \mp \text{Tr}[\Gamma^b \Gamma^a \Gamma^b] = \mp \text{Tr}[(\Gamma^b)^2 \Gamma^a] = -\text{Tr}[\Gamma^a]. \quad (1.47)$$

6. Dalle proprietà (1.43) e (1.46) segue che

$$\text{Tr}[\Gamma^a \Gamma^b] = 0 \quad \text{per} \quad a \neq b. \quad (1.48)$$

7. Le matrici Γ sono linearmente indipendenti, ossia una relazione

$$\sum_a c_a \Gamma^a = 0 \quad (1.49)$$

implica $c_a = 0$ ($a = 1, \dots, 16$). Infatti, se prendiamo la traccia della (1.49) troviamo $c_1 = 0$. Analogamente, prendendo la traccia di

$$\Gamma^b \left(\sum_a c_a \Gamma^a \right) = 0, \quad \text{per} \quad b = 2, \dots, 16, \quad (1.50)$$

e utilizzando le (1.44) e (1.48) si trova $c_b = 0$ ($b = 2, \dots, 16$).

8. Per la proprietà precedente la dimensione minima delle matrici Γ è 4×4 (esistono solo 4 matrici 2×2 indipendenti: la matrice identità e le tre matrici di Pauli, mutuamente anticommutanti); la rappresentazione 4×4 è quindi irriducibile.

9. Dalle proprietà precedenti segue che qualsiasi matrice X di dimensione 4×4 può essere scritta come una combinazione lineare delle matrici Γ :

$$X = \sum_a x_a \Gamma^a, \quad \text{con} \quad x_a = \frac{1}{\text{Tr}[(\Gamma^a)^2]} \text{Tr}[X \Gamma^a]. \quad (1.51)$$

10. L'algebra generata dalle matrici γ prende il nome di algebra di Clifford.

1.2.3 Teorema fondamentale sulle rappresentazioni delle matrici γ

Data una rappresentazione 4×4 delle matrici γ , ogni altra rappresentazione γ' o è riducibile,

$$\Gamma'^a \longrightarrow \begin{pmatrix} \Gamma^a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma^a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Gamma^a \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

o è equivalente, ossia è legata alla precedente tramite la relazione di similitudine

$$\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}. \quad (1.53)$$

Il teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici di Dirac afferma appunto che, dati due insiemi γ, γ' di matrici 4×4 che soddisfano alle relazioni di anticommutazione (1.24), esiste una matrice non-singolare S tale che la relazione (1.53) è soddisfatta⁴. Ciò è consistente con il fatto che la trasformazione (1.53) preserva le relazioni di anticommutazione (1.24):

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = S \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} S^{-1} = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (1.54)$$

⁴Si veda, per esempio, W. Grenier, *Relativistic Quantum Mechanics*, pag.104.

Se si richiede che nelle due rappresentazioni valgano anche le relazioni

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \quad \text{e} \quad \gamma'^0 \gamma'^{\mu\dagger} \gamma'^0 = \gamma'^\mu, \quad (1.55)$$

allora la matrice S di trasformazione può essere scelta come matrice unitaria⁴. Questa proprietà garantisce l'invarianza delle forme bilineari $\bar{\psi} \Gamma^a \psi$ per le trasformazioni di equivalenza (1.53):

$$\bar{\psi}' \Gamma^a \psi' = \bar{\psi} \Gamma^a \psi, \quad (1.56)$$

con $\psi' = S \psi$ e $\Gamma^a = S \Gamma^a S^{-1}$.

1.2.4 Equazione di Dirac in versione hamiltoniana

L'equazione di Dirac può essere scritta nella forma hamiltoniana

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbb{H} \psi \quad (1.57)$$

dove⁵

$$\boxed{\mathbb{H} = -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m}. \quad (1.58)$$

Le matrici α^k sono date da

$$\alpha^k = \gamma^0 \gamma^k \quad (1.59)$$

e la matrice β è semplicemente una notazione alternativa per la matrice γ^0 ($\beta = \gamma^0$). Dalle proprietà delle matrici γ si vede che le matrici β e α^k sono hermitiane

$$\beta^\dagger = \beta, \quad (\alpha^k)^\dagger = \alpha^k, \quad (1.60)$$

per cui l'hamiltoniana di Dirac (1.58) è hermitiana. Le matrici β e α^k soddisfano alle seguenti proprietà:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2 \delta^{ij} \mathbb{1}, \quad (1.61a)$$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0, \quad (1.61b)$$

$$\beta^2 = \mathbb{1}. \quad (1.61c)$$

1.2.5 Rappresentazione di Dirac delle matrici γ

Si chiama rappresentazione di Dirac quella rappresentazione delle matrici γ in cui γ^0 è diagonale. La forma delle altre matrici γ segue dalle proprietà generali di anticommutazione. Si ha quindi

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.62a)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.62b)$$

⁵Ricordiamo che

$$\nabla^k \equiv \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Le matrici σ^k sono le matrici di Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Questa rappresentazione è utile per discutere il limite non-relativistico dell'equazione di Dirac. Per altre rappresentazioni si veda l'Appendice D.

1.3 Covarianza dell'equazione di Dirac

Consideriamo due sistemi di coordinate inerziali x e $x' = \Lambda x$, nei quali l'equazione di Dirac si scrive, rispettivamente,

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (1.64a)$$

$$(i \gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0. \quad (1.64b)$$

Le coordinate e i gradienti nei due sistemi di riferimento sono connessi da una trasformazione di Lorentz Λ (vedi l'Appendice B):

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu, \quad (1.65a)$$

$$\partial'_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu, \quad \partial_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu. \quad (1.65b)$$

Assumendo che le funzioni d'onda $\psi(x)$ e $\psi'(x')$ siano connesse da una trasformazione lineare⁶

$$\psi'(x') = \mathcal{S}_\Lambda \psi(x), \quad (1.66)$$

l'equazione (1.64b) può essere scritta come

$$(i \gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu - m) \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = 0. \quad (1.67)$$

Per ricondurre questa equazione alla (1.64a), la moltiplichiamo a sinistra per $\mathcal{S}_\Lambda^{-1}$:

$$(i \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S}_\Lambda \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu - m) \psi(x) = 0. \quad (1.68)$$

Si ha quindi invarianza se

$$\mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S}_\Lambda \Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu. \quad (1.69)$$

Moltiplicando per Λ^ρ_ν e tenendo conto che

$$\Lambda^\rho_\nu \Lambda^\nu_\mu = g^\rho_\mu, \quad (1.70)$$

si ottiene

$$\boxed{\mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S}_\Lambda = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu}. \quad (1.71)$$

Data una trasformazione di Lorentz Λ , esiste una matrice $\mathcal{S}_\Lambda$ che soddisfa la (1.71). Infatti, le matrici $\gamma'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$ soddisfano alle stesse relazioni di anticommutazione delle matrici γ^μ :

$$\begin{aligned} \gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu &= \Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho \Lambda^\nu_\sigma \gamma^\sigma + \Lambda^\nu_\sigma \gamma^\sigma \Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho \\ &= \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma (\gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\rho) \\ &= 2 g^{\rho\sigma} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \mathbb{1} = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

⁶Questa proprietà si applica a trasformazioni di Lorentz proprie e all'inversione spaziale; non si applica invece all'inversione temporale (vedi la Sezione 1.4.2).

Perciò esiste una relazione di equivalenza (1.71) che connette le matrici γ^μ e le matrici $\gamma'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$.

Per trovare l'espressione di $\mathcal{S}_\Lambda$ per trasformazioni di Lorentz proprie (trasformazioni connesse con la trasformazione identica: rotazioni spaziali e trasformazioni di velocità (*boosts*)), consideriamo una trasformazione infinitesima,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad \text{con} \quad |\omega^\mu{}_\nu| \ll 1. \quad (1.73)$$

Dalla proprietà (1.70) si ha

$$\omega^\mu{}_\nu = -\omega_\nu{}^\mu. \quad (1.74)$$

Poniamo

$$\mathcal{S}_\Lambda = \mathbb{1} + a \omega^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu}, \quad (1.75)$$

dove $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ deve avere la struttura di una matrice 4×4 . Per determinare la forma esplicita di $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ e il coefficiente a , sostituiamo la (1.75) e la sua inversa,

$$\mathcal{S}_\Lambda^{-1} = \mathbb{1} - a \omega^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu}, \quad (1.76)$$

nella (1.71), con la $\Lambda^\mu{}_\nu$ data dalla (1.73):

$$(\mathbb{1} - a \omega^{\alpha\beta} \mathcal{O}_{\alpha\beta}) \gamma^\mu (\mathbb{1} + a \omega^{\alpha\beta} \mathcal{O}_{\alpha\beta}) = (g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu) \gamma^\nu. \quad (1.77)$$

Al prim'ordine in $\omega^\mu{}_\nu$ si ottiene

$$\gamma^\mu + a \omega^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \mathcal{O}_{\alpha\beta}] = \gamma^\mu + \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (1.78)$$

Dobbiamo quindi avere

$$a \omega^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \mathcal{O}_{\alpha\beta}] = \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (1.79)$$

Questa relazione è soddisfatta da $\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ e $a = -i/4$. Per dimostrarlo, calcoliamo il commutatore $[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}]$ tenendo conto che

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta = g^{\alpha\beta} \mathbb{1} - i \sigma^{\alpha\beta} \Rightarrow \sigma^{\alpha\beta} = i (\gamma^\alpha \gamma^\beta - g^{\alpha\beta} \mathbb{1}), \quad (1.80)$$

e che $[A, BC] = \{A, B\} C - B \{A, C\}$; per cui

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] &= i [\gamma^\mu, \gamma_\alpha \gamma_\beta - g_{\alpha\beta} \mathbb{1}] = i [\gamma^\mu, \gamma_\alpha \gamma_\beta] = i \{ \gamma^\mu, \gamma_\alpha \} \gamma_\beta - i \gamma_\alpha \{ \gamma^\mu, \gamma_\beta \} \\ &= 2i (g_\alpha^\mu \gamma_\beta - g_\beta^\mu \gamma_\alpha), \end{aligned} \quad (1.81)$$

e si ha

$$-\frac{i}{4} \omega^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (1.82)$$

Abbiamo quindi trovato che per trasformazioni di Lorentz proprie infinitesime la matrice di trasformazione spinoriale è

$$\mathcal{S}_\Lambda = \mathbb{1} - \frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \quad (1.83)$$

Per trasformazioni di Lorentz proprie finite si ha

$$\boxed{\mathcal{S}_\Lambda = e^{-\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}}}. \quad (1.84)$$

Esaminiamo ora separatamente le rotazioni spaziali e le trasformazioni di velocità.

1.3.1 Rotazione attorno all'asse x^k

Consideriamo prima una rotazione infinitesima di un angolo θ attorno all'asse x^1 . La matrice di rotazione è

$$\begin{aligned} (R_1)^\mu{}_\nu(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix} + O(\theta^2) \\ &= g^\mu{}_\nu + \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + O(\theta^2) = g^\mu{}_\nu + \theta (r_1)^\mu{}_\nu + O(\theta^2), \end{aligned} \quad (1.85)$$

dove

$$(r_1)^\mu{}_\nu = \left. \frac{d(R_1)^\mu{}_\nu(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

è il generatore delle rotazioni infinitesime attorno all'asse x^1 . Poichè le uniche componenti non nulle di $(r_1)^\mu{}_\nu$ sono $(r_1)^2{}_3 = +1$ e $(r_1)^3{}_2 = -1$, ossia $(r_1)_{23} = -1$ e $(r_1)_{32} = +1$, si ha

$$(r_1)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{23} + \sigma^{32} = -2\sigma^{23}, \quad (1.87)$$

ossia $\omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -2\theta \sigma^{23}$. Perciò, per una rotazione finita di un angolo θ attorno all'asse x^1 si ha

$$\mathcal{S}_{R_1}(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta \sigma^{23}}. \quad (1.88)$$

Introduciamo le matrici Σ^k definite da (ϵ^{ijk} è un tensore completamente antisimmetrico con $\epsilon^{123} = +1$)⁷

$$\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \Sigma^k \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \sigma^{ij} \quad (1.89)$$

Ne segue che $\sigma^{23} = \Sigma^1$ e la (1.88) può essere scritta come

$$\mathcal{S}_{R_1}(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta \Sigma^1}. \quad (1.90)$$

Per una rotazione finita di un angolo θ attorno ad un generico asse x^k si ha

$$\boxed{\mathcal{S}_{R_k}(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta \Sigma^k} = \mathbb{1} \cos \frac{\theta}{2} + i \Sigma^k \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (1.91)$$

Lo sviluppo dell'esponenziale si ottiene nel seguente modo:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2}\theta \Sigma^k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{2}\theta \Sigma^k\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{2}\theta \Sigma^k\right)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{2}\theta \Sigma^k\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathbb{1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\theta\right)^{2n}}{(2n)!} + i \Sigma^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\theta\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathbb{1} \cos \frac{\theta}{2} + i \Sigma^k \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (1.92)$$

⁷Notare che le matrici Σ^k possono anche essere scritte come $\Sigma^k = -\gamma^0 \gamma^k \gamma^5$

poichè

$$(\Sigma^k)^{2n} = \mathbb{1}, \quad (\Sigma^k)^{2n+1} = \Sigma^k, \quad i^{2n} = (-1)^n, \quad (1.93)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (1.94)$$

Notare che

$$\mathcal{S}_{R_k}(\theta + 2\pi) = -\mathcal{S}_{R_k}(\theta), \quad (1.95)$$

e quindi $\mathcal{S}_{R_k}$ è una funzione a due valori delle rotazioni.

1.3.2 Trasformazione di velocità nella direzione x^k

Consideriamo prima un boost con velocità v nella direzione x^1 , per il quale si ha

$$\begin{cases} x'^0 = \cosh \varphi x^0 - \sinh \varphi x^1, \\ x'^1 = -\sinh \varphi x^0 + \cosh \varphi x^1, \\ x'^2 = x^2, \\ x'^3 = x^3, \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \cosh \varphi = \gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}, \\ \sinh \varphi = \gamma v. \end{cases} \quad (1.96)$$

Per un boost infinitesimo nella direzione x^1 si ha

$$\begin{aligned} (\Lambda_1)^\mu{}_\nu(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi & 0 & 0 \\ -\varphi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varphi^2) \\ &= g^\mu{}_\nu + \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varphi^2) = g^\mu{}_\nu + \varphi (\lambda_1)^\mu{}_\nu + \mathcal{O}(\varphi^2), \end{aligned} \quad (1.97)$$

dove

$$(\lambda_1)^\mu{}_\nu = \left. \frac{d(\Lambda_1)^\mu{}_\nu(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

è il generatore dei boosts infinitesimi lungo l'asse x^1 . Poichè le uniche componenti non nulle di $(\lambda_1)^\mu{}_\nu$ sono $(\lambda_1)^0{}_1 = -1$ e $(\lambda_1)^1{}_0 = -1$, ossia $(\lambda_1)_{01} = -1$ e $(\lambda_1)_{10} = +1$, si ha

$$(\lambda_1)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{01} + \sigma^{10} = -2\sigma^{01}, \quad (1.99)$$

ossia $\omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -2\varphi \sigma^{01}$. Perciò, per un boost finito lungo l'asse x^1 si ha

$$\mathcal{S}_{\Lambda_1}(\varphi) = e^{\frac{i}{2} \varphi \sigma^{01}}. \quad (1.100)$$

Tenendo conto che

$$\sigma^{0k} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^0, \gamma^k] = i \gamma^0 \gamma^k = i \alpha^k, \quad (1.101)$$

per un boost finito lungo un generico asse x^k si ha

$$\boxed{\mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi) = e^{-\frac{1}{2} \varphi \alpha^k} = \mathbb{1} \cosh\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \alpha^k \sinh\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (1.102)$$

1.3.3 Matrice coniugata hermitiana di $\mathcal{S}_\Lambda$

Consideriamo la matrice coniugata hermitiana di $\mathcal{S}_\Lambda$ per una trasformazione di Lorentz propria:

$$\mathcal{S}_\Lambda^\dagger = e^{\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^\dagger}. \quad (1.103)$$

Poichè $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$, si ha

$$\gamma^0 \sigma_{\mu\nu}^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 [\gamma_\nu^\dagger, \gamma_\mu^\dagger] \gamma^0 = -\frac{i}{2} [\gamma_\nu, \gamma_\mu] = \sigma_{\mu\nu}, \quad (1.104)$$

da cui discende che

$$\gamma^0 \mathcal{S}_\Lambda^\dagger \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}}, \quad (1.105)$$

ossia

$$\boxed{\gamma^0 \mathcal{S}_\Lambda^\dagger \gamma^0 = \mathcal{S}_\Lambda^{-1}}. \quad (1.106)$$

Esaminiamo separatamente le rotazioni spaziali e i boosts:

1. Per una rotazione spaziale di un angolo θ attorno all'asse x^k si ha

$$\mathcal{S}_{R_k}(\theta) = e^{\frac{i}{2} \theta \Sigma^k}. \quad (1.107)$$

Poichè Σ^k è hermitiano, si ottiene

$$\mathcal{S}_{R_k}^\dagger(\theta) = e^{-\frac{i}{2} \theta \Sigma^{k\dagger}} = e^{-\frac{i}{2} \theta \Sigma^k} = \mathcal{S}_{R_k}^{-1}(\theta) \quad (1.108)$$

Quindi $\mathcal{S}_{R_k}(\theta)$ è unitaria. Dalla (1.108) e dalla proprietà $\Sigma^k \gamma^0 = \gamma^0 \Sigma^k$ segue la (1.106).

2. Per un boost lungo l'asse x^k si ha

$$\mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi) = e^{-\frac{1}{2} \varphi \alpha^k}. \quad (1.109)$$

Poichè α^k è hermitiano, si ottiene

$$\mathcal{S}_{\Lambda_k}^\dagger(\varphi) = e^{-\frac{1}{2} \varphi \alpha^{k\dagger}} = e^{-\frac{1}{2} \varphi \alpha^k} = \mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi) \quad (1.110)$$

Quindi $\mathcal{S}_{\Lambda_k}(\varphi)$ è hermitiano. Dalla (1.110) e dalla proprietà $\alpha^k \gamma^0 = -\gamma^0 \alpha^k$ segue la (1.106).

1.4 Trasformazioni discrete

1.4.1 Inversione spaziale (parità)

Per inversione spaziale $x \xrightarrow{P} x' = (x^0, -\vec{x})$ si ha

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi'(x') = \mathcal{S}_P \psi(x) \quad (1.111)$$

e l'equazione di Dirac

$$\left(i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (1.112)$$

si trasforma in

$$\left(i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m \right) \mathcal{S}_P \psi(x) = 0. \quad (1.113)$$

Moltiplicando a sinistra per $\mathcal{S}_P^{-1}$, si ottiene

$$\left(i \mathcal{S}_P^{-1} \gamma^0 \mathcal{S}_P \frac{\partial}{\partial t} - i \mathcal{S}_P^{-1} \vec{\gamma} \mathcal{S}_P \cdot \vec{\nabla} - m \right) \psi(x) = 0. \quad (1.114)$$

Quindi, per riottenere l'equazione di Dirac (1.112) si deve avere

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_P^{-1} \gamma^0 \mathcal{S}_P &= \gamma^0 \\ \mathcal{S}_P^{-1} \vec{\gamma} \mathcal{S}_P &= -\vec{\gamma} \end{aligned} \right\} \implies \boxed{\mathcal{S}_P = \eta_P \gamma^0}, \quad (1.115)$$

dove η_P è una costante moltiplicativa. La condizione di invarianza della densità di probabilità

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) &= \psi'^\dagger(t, -\vec{x}) \psi'(t, -\vec{x}) = [\eta_P^* \psi^\dagger(t, \vec{x}) \gamma^0] [\eta_P \gamma^0 \psi(t, \vec{x})] \\ &= |\eta_P|^2 \psi^\dagger(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (1.116)$$

impone la condizione $|\eta_P|^2 = 1$, ossia $\eta_P = e^{i\phi}$ con ϕ reale. Il fattore di fase η_P dipende dalla natura della particella di spin 1/2 che si sta considerando ed è chiamato *parità intrinseca*. Il valore di η_P non è misurabile in assoluto, ma le parità relative dei fermioni possono essere misurate sperimentalmente. Convenzionalmente si sceglie $\eta_P = +1$ per l'elettrone. Notiamo esplicitamente che $\mathcal{S}_P$ è una matrice unitaria, come richiesto dalla condizione di invarianza della densità di probabilità.

Le condizioni (1.115) possono anche essere ottenute dalla formula (1.71), tenendo conto che per inversione spaziale

$$\Lambda = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.117)$$

1.4.2 Inversione temporale

Per inversione temporale $x \xrightarrow{T} x' = (-x^0, \vec{x})$ la legge di trasformazione della funzione d'onda deve contenere l'operazione di coniugazione complessa⁸. Per tenere conto anche dell'inversione dello spin, scriviamo la legge di trasformazione dello spinore nel modo seguente⁹:

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi'(x') = \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\psi}(x), \quad (1.118)$$

dove $\mathcal{B}$ è una matrice unitaria, affinché la densità di probabilità $\psi^\dagger \psi$ sia invariante per inversione temporale. Determiniamo $\mathcal{B}$ in modo che la teoria sia invariante per inversione temporale. Dall'equazione di Dirac

$$\left(i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (1.119)$$

⁸Vedi Landau & Lifshitz, *Meccanica Quantistica*.

⁹Notare che la matrice $\mathcal{B}$ non può essere determinata mediante la formula (1.71) perchè la (1.118) differisce dall'espressione (1.66).

per inversione temporale si ottiene

$$\left(-i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - m\right)\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\psi}(x) = 0. \quad (1.120)$$

Trasponendo la (1.120) si ha

$$-i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\mathcal{B}\tilde{\gamma}^0 + i\vec{\nabla}\bar{\psi}\cdot\mathcal{B}\tilde{\vec{\gamma}} - m\bar{\psi}\mathcal{B} = 0. \quad (1.121)$$

Moltiplicando a destra per $\mathcal{B}^{-1}$ si ottiene

$$-i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\left(\mathcal{B}\tilde{\gamma}^0\mathcal{B}^{-1}\right) + i\vec{\nabla}\bar{\psi}\cdot\left(\mathcal{B}\tilde{\vec{\gamma}}\mathcal{B}^{-1}\right) - m\bar{\psi} = 0. \quad (1.122)$$

Imponendo che questa equazione sia uguale all'equazione di Dirac per $\bar{\psi}$

$$i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\gamma^0 + i\vec{\nabla}\bar{\psi}\cdot\vec{\gamma} + m\bar{\psi} = 0, \quad (1.123)$$

si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} \mathcal{B}\tilde{\gamma}^0\mathcal{B}^{-1} = \gamma^0, \\ \mathcal{B}\tilde{\vec{\gamma}}\mathcal{B}^{-1} = -\vec{\gamma}. \end{cases} \quad (1.124)$$

Tenendo conto che

$$(\gamma^0\gamma^5)\gamma^0(\gamma^0\gamma^5)^{-1} = -\gamma^0, \quad (1.125)$$

$$(\gamma^0\gamma^5)\vec{\gamma}(\gamma^0\gamma^5)^{-1} = \vec{\gamma}, \quad (1.126)$$

se definiamo una matrice $\mathcal{C}$ tale che

$$\boxed{\mathcal{C}\widetilde{\gamma^\mu}\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu}, \quad (1.127)$$

si ottiene che le equazioni (1.124) sono soddisfatte dalla matrice

$$\boxed{\mathcal{B} = \eta_T\gamma^0\gamma^5\mathcal{C}}, \quad (1.128)$$

dove η_T è un fattore di fase arbitrario. Come si vedrà successivamente, la matrice $\mathcal{C}$ interviene nella legge di trasformazione degli spinori per coniugazione di carica.

1.5 Forme bilineari con spinori di Dirac

Vogliamo ora studiare le proprietà di trasformazione di forme bilineari del tipo

$$\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x), \quad \text{con} \quad \Gamma^a = \mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma^5, \gamma^5, \quad (1.129)$$

per trasformazioni di Lorentz.

Dobbiamo preliminarmente ricavare le proprietà di trasformazione dello spinore aggiunto $\bar{\psi}$ a partire dalle formule di trasformazione dello spinore ψ .

1.5.1 Proprietà di trasformazione dello spinore aggiunto

Trasformazioni di Lorentz proprie ed inversione spaziale

Dalla formula

$$\psi'(x') = \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) \quad (1.130)$$

si ha

$$\overline{\psi'}(x') \equiv \psi'^{\dagger}(x') \gamma^0 = \psi^{\dagger}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{\dagger} \gamma^0 = \overline{\psi}(x) \gamma^0 \mathcal{S}_\Lambda^{\dagger} \gamma^0. \quad (1.131)$$

Utilizzando la relazione

$$\gamma^0 \mathcal{S}_\Lambda^{\dagger} \gamma^0 = \mathcal{S}_\Lambda^{-1}, \quad (1.132)$$

si ottiene

$$\boxed{\overline{\psi'}(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1}}, \quad (1.133)$$

Inversione temporale

Il trasformato di $\overline{\psi}$ è

$$\overline{\psi'}(x') = \left(\widetilde{\mathcal{B}} \widetilde{\overline{\psi}}(x) \right)^{\dagger} \gamma^0 = \left(\widetilde{\mathcal{B}} \widetilde{\gamma^0} \widetilde{\psi^{\dagger}}(x) \right)^{\dagger} \gamma^0 = \widetilde{\psi}(x) \widetilde{\gamma^0} \widetilde{\mathcal{B}^{\dagger}} \gamma^0. \quad (1.134)$$

Dalle proprietà della matrice $\mathcal{B}$ si può dedurre che $\widetilde{\gamma^0} \widetilde{\mathcal{B}^{\dagger}} \gamma^0 = \widetilde{\mathcal{B}}^{-1}$, e quindi

$$\boxed{\overline{\psi'}(x') = \widetilde{\psi}(x) \widetilde{\mathcal{B}}^{-1}}. \quad (1.135)$$

1.5.2 Trasformazioni di forme bilineari per trasformazioni di Lorentz proprie e inversioni spaziali

Consideriamo le trasformazioni di Lorentz proprie e le inversioni spaziali. Tenendo conto delle (1.66), (1.71) e (1.133) si ha:

1. $\Gamma^a = \mathbb{1}$.

$$\overline{\psi'}(x') \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = \overline{\psi}(x) \psi(x). \quad (1.136)$$

Quindi questo bilineare è uno scalare.

2. $\Gamma^a = \gamma^\mu$.

$$\overline{\psi'}(x') \gamma^\mu \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x). \quad (1.137)$$

Quindi l'insieme di questi quattro bilineari costituisce un quadri-vettore polare.

3. $\Gamma^a = \sigma^{\mu\nu}$.

$$\overline{\psi'}(x') \sigma^{\mu\nu} \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \sigma^{\mu\nu} \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \overline{\psi}(x) \sigma^{\alpha\beta} \psi(x). \quad (1.138)$$

Segue che questi bilineari costituiscono un tensore di rango 2.

4. $\Gamma^a = \gamma^\mu \gamma^5$.

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \gamma^5 \mathcal{S}_\Lambda \psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}(x) \gamma^\nu (\mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^5 \mathcal{S}_\Lambda) \psi(x). \quad (1.139)$$

Per trasformazioni di Lorentz proprie

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_\Lambda &= e^{-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}} \\ [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^5 \mathcal{S}_\Lambda = \gamma^5. \quad (1.140)$$

Per inversioni spaziali

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_P &= \gamma^0 \\ \{\gamma^0, \gamma^5\} &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \mathcal{S}_P^{-1} \gamma^5 \mathcal{S}_P = -\gamma^5. \quad (1.141)$$

Perciò $\overline{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x)$ si trasforma come un vettore assiale. Infatti, per trasformazioni di Lorentz proprie

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}(x) \gamma^\nu \gamma^5 \psi(x), \quad (1.142)$$

mentre per inversioni spaziali

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = -\Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}(x) \gamma^\nu \gamma^5 \psi(x) = \begin{cases} -\overline{\psi}(x) \gamma^0 \gamma^5 \psi(x) & \text{per } \mu = 0, \\ +\overline{\psi}(x) \gamma^k \gamma^5 \psi(x) & \text{per } \mu = k. \end{cases} \quad (1.143)$$

5. $\Gamma^a = \gamma^5$.

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{S}_\Lambda^{-1} \gamma^5 \mathcal{S}_\Lambda \psi(x). \quad (1.144)$$

Per trasformazioni di Lorentz proprie si ha

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x), \quad (1.145)$$

mentre per inversioni spaziali

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = -\overline{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x). \quad (1.146)$$

Ossia $\overline{\psi} \gamma^5 \psi$ è uno pseudoscalare.

Per le proprietà di trasformazione delle forme bilineari per inversione temporale vedi Appendice E.

Capitolo 2

Soluzioni libere dell'equazione di Dirac

2.1 Soluzioni libere nel sistema di riposo della particella

Cerchiamo una soluzione dell'equazione di Dirac

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

che sia anche autofunzione del quadri-impulso p_μ , con valore positivo dell'energia ($p_0 > 0$). Questa soluzione, che indichiamo con $\psi_p(x)$, può essere scritta in forma fattorizzata, con un fattore $e^{-i p \cdot x} \equiv e^{-i p_\mu x^\mu}$, che contiene la dipendenza spazio-temporale tipica di un'onda piana, e un fattore $u(\vec{p})$ che descrive le proprietà spinoriali della particella

$$\psi_{p,+}(x) = e^{-i p \cdot x} u(\vec{p}) \quad \text{con } p_0 > 0. \quad (2.2)$$

Determiniamo la forma esplicita dello spinore $u(\vec{p})$ nella rappresentazione di Dirac. Dall'equazione

$$\partial_\mu \psi_{p,+}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_{p,+}(x) = -i p_\mu \psi_{p,+}(x), \quad (2.3)$$

si ottiene

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(\vec{p}) = 0, \quad (2.4)$$

oppure, come anche si scrive,¹

$$\boxed{(\not{p} - m) u(\vec{p}) = 0}. \quad (2.5)$$

Per lo spinore aggiunto si ha

$$\bar{u}(\vec{p}) (\not{p} - m) = 0. \quad (2.6)$$

Se $m \neq 0$, nel sistema di riposo della particella, dove $p_\mu = (m, \vec{0})$, l'equazione (2.5) diventa

$$(\gamma^0 - \mathbb{1}) u(0) = 0. \quad (2.7)$$

Scrivendo

$$u(0) = \begin{pmatrix} \chi_+(0) \\ \varphi_+(0) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

¹Usiamo la notazione slash per indicare la contrazione di un generico quadri-vettore v^μ con γ^μ , ossia $\not{v} \equiv \gamma^\mu v_\mu$.

e tenendo conto dell'espressione della γ^0 nella rappresentazione di Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(0) \\ \varphi_+(0) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Quest'equazione ha due soluzioni indipendenti:

$$\chi_+^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_+^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \varphi_+(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

ossia

$$u^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

È naturale interpretare le due soluzioni indipendenti $u^{(r)}(0)$ ($r = 1, 2$) nel sistema di riposo della particella come gli stati corrispondenti alle due proiezioni di spin $1/2$ della particella stessa. Ciò è in completa analogia con la descrizione alla Pauli. La conferma della correttezza di questa interpretazione deriverà dallo studio dell'operatore di spin in teoria di Dirac.

Passiamo ora allo studio delle soluzioni libere dell'equazione di Dirac con energia negativa, ossia tali che

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{p,-}(x) = -|p_0| \psi_{p,-}(x). \quad (2.13)$$

Scriviamole nel modo seguente:

$$\psi_{p,-}(x) = e^{ip \cdot x} v(\vec{p}) \quad \text{con} \quad p_0 > 0. \quad (2.14)$$

Per sostituzione nella (2.1) si ha

$$\boxed{(\not{p} + m) v(\vec{p}) = 0}. \quad (2.15)$$

L'analogia equazione per lo spinore aggiunto è

$$\bar{v}(\vec{p}) (\not{p} + m) = 0. \quad (2.16)$$

Se $m \neq 0$, nel sistema di riposo della particella, l'equazione (2.15) diventa

$$(\gamma^0 + \mathbb{1}) v(0) = 0. \quad (2.17)$$

Scrivendo

$$v(0) = \begin{pmatrix} \chi_-(0) \\ \varphi_-(0) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

nella rappresentazione di Dirac si ottiene l'equazione

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_-(0) \\ \varphi_-(0) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

Quest'equazione ha due soluzioni indipendenti:

$$\varphi_-^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_-^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \chi_-(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

ossia

$$v^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Anche in questo caso l'esistenza di due soluzioni indipendenti è da mettersi in relazione con le due configurazioni di spin della particella.

Si nota inoltre che gli stati u sono ortogonali agli stati v . Dalla derivazione precedente si può concludere che la dimensione 4 alla base della struttura spinoriale alla Dirac è dovuta al fatto che lo spinore di Dirac descrive proprietà intrinseche di spin 1/2 e stati energetici di duplice segno.

2.2 Soluzioni libere in un sistema di riferimento generico

Determiniamo la forma degli spinori $u(\vec{p})$ e $v(\vec{p})$ in un sistema di riferimento generico, deducendoli da quelli nel sistema di riposo precedentemente ricavati.

Osserviamo innanzi tutto che vale la seguente identità:

$$(\not{p} + m)(\not{p} - m) = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu - m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 = p^2 - m^2. \quad (2.22)$$

Per una particella fisica si ha $p^2 = m^2$ e quindi dalla (2.22) si ottiene

$$(\not{p} + m)(\not{p} - m) = 0 \quad (2.23)$$

Ciò consente di scrivere

$$(\not{p} - m) [(\not{p} + m) u^{(r)}(0)] = 0, \quad \text{con} \quad r = 1, 2. \quad (2.24)$$

Quindi le soluzioni dell'equazione (2.5) possono essere messe nella forma

$$u^{(r)}(\vec{p}) = C (\not{p} + m) u^{(r)}(0), \quad (2.25)$$

dove C è una opportuna costante di normalizzazione. Nella rappresentazione di Dirac

$$\begin{aligned} u^{(r)}(\vec{p}) &= C (\not{p} + m) u^{(r)}(0) \\ &= C \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} + \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} m \right] \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= C \begin{pmatrix} E + m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= C \begin{pmatrix} (E + m) \chi_+^{(r)}(0) \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_+^{(r)}(0) \end{pmatrix} \\ &= C (E + m) \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_+^{(r)}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Determiniamo la costante C in modo che

$$\boxed{\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = \delta_{rs}}. \quad (2.27)$$

Poichè

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) &= |C|^2 (E + m)^2 \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0)^\dagger & -\chi_+^{(r)}(0)^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_+^{(s)}(0) \\ \chi_+^{(s)}(0) \end{pmatrix} \\ &= |C|^2 (E + m)^2 \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{(E + m)^2} \right) \delta_{rs} \\ &= |C|^2 2m (E + m) \delta_{rs}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

la condizione di normalizzazione è soddisfatta se prendiamo

$$C = \frac{1}{\sqrt{2m(E + m)}}, \quad (2.29)$$

per cui

$$\boxed{u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E + m)}} u^{(r)}(0)}, \quad (2.30a)$$

$$\boxed{\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{u}^{(r)}(0) \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E + m)}}}. \quad (2.30b)$$

Il legame stabilito dalle equazioni (2.30a) e (2.30b) tra gli spinori $u^{(r)}(\vec{p})$ e $\bar{u}^{(r)}(\vec{p})$ e i loro corrispondenti nel sistema di riposo non dipendono dalla rappresentazione delle γ , come si può verificare utilizzando le proprietà discusse al paragrafo 1.2.3.

Nella rappresentazione di Dirac gli spinori $u^{(r)}(\vec{p})$ sono dati da

$$u^{(r)}(\vec{p}) \equiv \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(\vec{p}) \\ \varphi_+^{(r)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_+^{(r)}(0) \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Esplicitamente si ha

$$u^{(1)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$u^{(2)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Per le soluzioni a energia negativa si può seguire lo stesso procedimento. Si ha

$$v^{(r)}(\vec{p}) = C (-\not{p} + m) v^{(r)}(0). \quad (2.34)$$

Nella rappresentazione di Dirac si ha

$$\begin{aligned}
v^{(r)}(\vec{p}) &= C (-\not{p} + m) u^{(r)}(0) \\
&= C \left[- \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} + \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} m \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{-}^{(r)}(0) \end{pmatrix} \\
&= C (E + m) \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi_{-}^{(r)}(0) \\ \varphi_{-}^{(r)}(0) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\bar{v}^{(r)}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) &= |C|^2 (E + m)^2 \left(\varphi_{-}^{(r)}(0)^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} - \varphi_{-}^{(r)}(0)^\dagger \right) \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi_{-}^{(s)}(0) \\ \varphi_{-}^{(s)}(0) \end{pmatrix} \\
&= |C|^2 (E + m)^2 \left(\frac{\vec{p}^2}{(E + m)^2} - 1 \right) \delta_{rs} \\
&= -|C|^2 2m (E + m) \delta_{rs}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Se poniamo la condizione di normalizzazione

$$\boxed{\bar{v}^{(r)}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = -\delta_{rs}}, \tag{2.37}$$

la costante C è data dalla (2.29) e si ottiene quindi

$$\boxed{v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(E + m)}} v^{(r)}(0)}, \tag{2.38a}$$

$$\boxed{\bar{v}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{v}^{(r)}(0) \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(E + m)}}}. \tag{2.38b}$$

Nella rappresentazione di Dirac gli spinori $v^{(r)}(\vec{p})$ sono dati da

$$v^{(r)}(\vec{p}) \equiv \begin{pmatrix} \chi_{-}^{(r)}(\vec{p}) \\ \varphi_{-}^{(r)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi_{-}^{(r)}(0) \\ \varphi_{-}^{(r)}(0) \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Esplicitamente si ha

$$v^{(1)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

$$v^{(2)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni di ortogonalità:

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = 0, \quad (2.42a)$$

$$\bar{v}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = 0. \quad (2.42b)$$

Notiamo che le condizioni di normalizzazione per gli spinori sono state scritte in termini di invarianti, per esempio $\bar{u}u$, come ha da essere. Osserviamo che prodotti del tipo $u^\dagger u$ si trasformano invece come componenti temporali di quadri-vettori. Infatti, utilizzando l'equazione $\not{p}u = mu$ e la sua aggiunta, si ha

$$\begin{aligned} u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) &= \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \gamma^0 u^{(s)}(\vec{p}) = \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \frac{\not{p} \gamma^0 + \gamma^0 \not{p}}{2m} u^{(s)}(\vec{p}) \\ &= \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \frac{g^{\mu 0} p_\mu}{m} u^{(s)}(\vec{p}) = \frac{E}{m} \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = \frac{E}{m} \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Questa proprietà è in accordo con la richiesta che la probabilità $\psi_{p,+}^\dagger(x) \psi_{p,+}(x) d^3x$ mantenga, per trasformazione di Lorentz, il valore che la stessa ha nel sistema di riposo della particella. Dal momento che, nella trasformazione, l'elemento di volume subisce la contrazione $d^3x' = \sqrt{1-v^2/c^2} d^3x$, la densità di probabilità $\rho = \psi_{p,+}^\dagger(x) \psi_{p,+}(x) = u^\dagger(p) u(p)$ deve trasformarsi come $\rho' = \rho / \sqrt{1-v^2/c^2} = \rho E/m$, ossia come ottenuto nella (2.43).

2.3 Limite non-relativistico ($v \ll c$)

Per le soluzioni ad energia positiva, nella rappresentazione di Dirac, si ha

$$\begin{aligned} \varphi_+^\dagger(\vec{p}) \varphi_+(\vec{p}) &= \frac{E+m}{2m} \chi_+^\dagger(0) \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E+m)^2} \chi_+(0) = \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \chi_+^\dagger(\vec{p}) \chi_+(\vec{p}) \\ &= \frac{\vec{p}^2 c^2}{(E+m c^2)^2} \chi_+^\dagger(\vec{p}) \chi_+(\vec{p}) \quad \text{in unità ordinarie.} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Per il limite non-relativistico sono utili le relazioni

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \vec{v} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right), \quad (2.45)$$

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right), \quad (2.46)$$

$$\frac{\vec{p}^2 c^2}{(E+m c^2)^2} = \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right), \quad (2.47)$$

dalle quali si ottiene

$$\varphi_+^\dagger(\vec{p}) \varphi_+(\vec{p}) \simeq \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} \chi_+^\dagger(\vec{p}) \chi_+(\vec{p}). \quad (2.48)$$

Quindi, nel limite non-relativistico, negli spinori ad energia positiva $u(\vec{p})$ vi è dominanza degli spinori a due componenti $\chi_+(\vec{p})$ rispetto a quelli $\varphi_+(\vec{p})$; il fattore di soppressione degli spinori $\varphi_+(\vec{p})$ rispetto a quelli $\chi_+(\vec{p})$ è di ordine $(v/c)^2$. Di qui segue la usuale denominazione di grandi componenti per le $\chi_+(\vec{p})$ e di piccole componenti per le $\varphi_+(\vec{p})$.

Per le soluzioni ad energia negativa i ruoli delle χ e φ sono scambiati: le componenti χ_- vengono chiamate piccole componenti e quelle φ_- vengono chiamate grandi componenti.

2.4 Normalizzazione delle soluzioni libere

Occupiamoci ora della normalizzazione delle soluzioni libere ad energia positiva $\psi_{p,+}^{(r)}(x)$, che riscriviamo come

$$\psi_{p,+}^{(r)}(x) = N e^{-i p \cdot x} u^{(r)}(\vec{p}), \quad (2.49)$$

dove N è un fattore di normalizzazione. Adotteremo le seguenti condizioni di normalizzazione:

$$\int_V d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',+}^{(s)}(x) = \delta_{rs} \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \quad (2.50)$$

nel caso di normalizzazione in un volume V finito e

$$\int d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',+}^{(s)}(x) = \delta_{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.51)$$

nel caso di normalizzazione in un volume infinito.

Per il caso di un volume finito si ha

$$\int_V d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',+}^{(s)}(x) = |N|^2 u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(p') \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \int_V d^3x = |N|^2 \frac{E}{m} V \delta_{rs} \delta_{\vec{p},\vec{p}'}, \quad (2.52)$$

per cui

$$N = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}}. \quad (2.53)$$

Per la normalizzazione in un volume infinito si ha

$$\int d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',+}^{(s)}(x) = |N|^2 u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(p') \int d^3x e^{i(p-p') \cdot x} = |N|^2 \frac{E}{m} \delta_{rs} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{p}'), \quad (2.54)$$

per cui

$$N = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}}. \quad (2.55)$$

Analoghe normalizzazioni verranno adottate per le soluzioni libere ad energia negativa. Avremo quindi

$$\psi_{p,-}^{(r)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} e^{i p \cdot x} v^{(r)}(\vec{p}) \quad (2.56)$$

nel caso di normalizzazione in un volume finito e

$$\psi_{p,-}^{(r)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} e^{i p \cdot x} v^{(r)}(\vec{p}) \quad (2.57)$$

nel caso di normalizzazione in un volume infinito.

Le funzioni $\psi_{p,+}^{(r)}(x)$ e $\psi_{p,-}^{(r)}(x)$ sono ortogonali, ossia

$$\int d^3x \psi_{p,+}^{(r)\dagger}(x) \psi_{p',-}^{(s)}(x) = 0. \quad (2.58)$$

Infatti, dalle (2.30b) e (2.38b) si ricava che

$$u^{(r)\dagger}(\vec{p}) = u^{(r)\dagger}(0) \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}}, \quad (2.59a)$$

$$v^{(r)\dagger}(\vec{p}) = v^{(r)\dagger}(0) \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}}, \quad (2.59b)$$

dove $\tilde{p}^\mu = (p^0, \vec{p}) = (p^0, -\vec{p})$, e quindi dalla proprietà (2.23) discendono le relazioni

$$u^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = 0, \quad (2.60a)$$

$$v^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = 0. \quad (2.60b)$$

2.5 Pacchetti d'onda

Le soluzioni libere $\psi_{p,+}^{(r)}(x)$ e $\psi_{p,-}^{(r)}(x)$ costituiscono un insieme completo ortonormale e quindi la più generale soluzione può essere scritta come

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_r \int d^3p \left[b_{\vec{p}}^{(r)} \psi_{p,+}^{(r)}(x) + d_{\vec{p}}^{(r)*} \psi_{p,-}^{(r)}(x) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} \left[b_{\vec{p}}^{(r)} u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + d_{\vec{p}}^{(r)*} v^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

I coefficienti $b_{\vec{p}}^{(r)}$ e $d_{\vec{p}}^{(r)*}$ dello sviluppo sono in generale dei numeri complessi (le notazioni qui adottate seguono le convenzioni standard usualmente utilizzate).

La formula (2.61) fa riferimento a stati normalizzati in un volume infinito. La corrispondente espressione per una normalizzazione in un volume finito si ottiene sostituendo

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}}. \quad (2.62)$$

Per le proprietà di ortonormalizzazione viste nel paragrafo precedente, si ha che la condizione di normalizzazione della $\psi(x)$, ossia

$$\int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = 1, \quad (2.63)$$

implica che

$$\sum_r \int d^3p \left[|b_{\vec{p}}^{(r)}|^2 + |d_{\vec{p}}^{(r)}|^2 \right] = 1. \quad (2.64)$$

Uno studio dettagliato delle proprietà del pacchetto d'onda (2.61) ne mette in evidenza due proprietà importanti²:

1. la presenza simultanea degli stati ad energia positiva e di quelli ad energia negativa nello sviluppo (2.61) è indispensabile per realizzare, mediante la descrizione del pacchetto d'onda, una buona localizzazione della particella (dimensione lineare del volume di localizzazione $\ll$ lunghezza d'onda Compton della particella);

²Per la dimostrazione si veda, per esempio, J.J. Sakurai: Advanced Quantum Mechanics.

2. l'evoluzione temporale del pacchetto d'onda mostra che l'interferenza tra stati ad energia positiva e stati ad energia negativa genera delle oscillazioni rapide che si sovrappongono al moto rettilineo uniforme di una particella libera (*Zitterbewegung*).

2.6 Proiettori su stati ad energia positiva e su stati ad energia negativa

In numerose applicazioni che comportano un calcolo spinoriale è utile definire dei proiettori su stati ad energia positiva e su quelli ad energia negativa.

Definiamo come proiettore su stati ad energia positiva la matrice

$$\Lambda_+(\vec{p}) \equiv \sum_{r=1,2} u^{(r)}(\vec{p}) \overline{u^{(r)}(\vec{p})}, \quad (2.65)$$

ossia, più esplicitamente,

$$(\Lambda_+(\vec{p}))_{\alpha\beta} \equiv \sum_{r=1,2} u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \overline{u_{\beta}^{(r)}(\vec{p})}. \quad (2.66)$$

Il ruolo di $\Lambda_+(\vec{p})$ come proiettore risulta dalle relazioni

$$\sum_{\beta} (\Lambda_+(\vec{p}))_{\alpha\beta} u_{\beta}^{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1,2} u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \sum_{\beta} \overline{u_{\beta}^{(r)}(\vec{p})} u_{\beta}^{(s)}(\vec{p}) = u_{\alpha}^{(s)}(\vec{p}) \quad (2.67)$$

e

$$\Lambda_+(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = 0. \quad (2.68)$$

$\Lambda_+(\vec{p})$ soddisfa anche la proprietà di idempotenza

$$(\Lambda_+(\vec{p}))^2 = \Lambda_+(\vec{p}) \quad (2.69)$$

caratteristica degli operatori di proiezione. Infatti,

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \sum_{r=1,2} u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \overline{u_{\rho}^{(r)}(\vec{p})} \sum_{s=1,2} u_{\rho}^{(s)}(\vec{p}) \overline{u_{\beta}^{(s)}(\vec{p})} &= \sum_{r,s} u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \underbrace{\sum_{\rho} \overline{u_{\rho}^{(r)}(\vec{p})} u_{\rho}^{(s)}(\vec{p})}_{\delta_{rs}} \overline{u_{\beta}^{(s)}(\vec{p})} \\ &= \sum_{r=1,2} u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \overline{u_{\beta}^{(r)}(\vec{p})}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Analogamente, definiamo come proiettore sugli stati ad energia negativa la matrice

$$\Lambda_-(\vec{p}) \equiv - \sum_{r=1,2} v^{(r)}(\vec{p}) \overline{v^{(r)}(\vec{p})}, \quad (2.71)$$

con le proprietà

$$\sum_{\beta} (\Lambda_-(\vec{p}))_{\alpha\beta} v_{\beta}^{(s)}(\vec{p}) = v_{\alpha}^{(s)}(\vec{p}), \quad (2.72)$$

$$\Lambda_-(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = 0, \quad (2.73)$$

$$(\Lambda_-(\vec{p}))^2 = \Lambda_-(\vec{p}). \quad (2.74)$$

Un'espressione per $\Lambda_+(\vec{p})$ utile nelle applicazioni può essere ottenuta dalla formula

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{1}{2m(E+m)} (\not{p} + m) \underbrace{\sum_{r=1,2} u^{(r)}(0) \overline{u^{(r)}(0)}}_{\Lambda_+(0)} (\not{p} + m) , \quad (2.75)$$

ricavabile dalla definizione (2.65) e dalle formule (2.30). $\Lambda_+(0)$ può essere determinato tenendo presente che dalle equazioni (2.7) e (2.6) discende

$$(\gamma^0 - \mathbb{1}) \Lambda_+(0) = 0 , \quad (2.76a)$$

$$\Lambda_+(0) (\gamma^0 - \mathbb{1}) = 0 . \quad (2.76b)$$

Dalle (2.76) e dalla proprietà

$$(\Lambda_+(0))^2 = \Lambda_+(0) \quad (2.77)$$

si trova che

$$\Lambda_+(0) = \frac{1 + \gamma^0}{2} . \quad (2.78)$$

Per la dimostrazione basta porre $\Lambda_+(0) = \frac{1+\gamma^0}{2} + B$ e dimostrare che dalle equazioni (2.76) e (2.77) segue che $B = 0$. Quindi, dalle (2.75) e (2.78) si ha

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{1}{2m(E+m)} (\not{p} + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} (\not{p} + m) . \quad (2.79)$$

Tenendo conto delle relazioni

$$\begin{aligned} (\not{p} + m) \gamma^0 (\not{p} + m) &= (\not{p} + m) (\gamma^0 p_0 - \gamma^k p_k + m) \gamma^0 \\ &= (\not{p} + m) (-\not{p} + m + 2\gamma^0 p_0) \gamma^0 \\ &= 2E (\not{p} + m) , \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} (\not{p} + m) (\not{p} + m) &= (\not{p} + m) (\not{p} - m + 2m) \\ &= 2m (\not{p} + m) , \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$(\not{p} + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} (\not{p} + m) = (E + m) (\not{p} + m) , \quad (2.82)$$

si ottiene

$$\boxed{\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m}} . \quad (2.83)$$

Per la $\Lambda_+(\vec{p})$ vale inoltre la relazione

$$(\Lambda_+(\vec{p}))^\dagger = \frac{\not{p}^\dagger + m}{2m} = \gamma^0 \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^0 = \gamma^0 \Lambda_+(\vec{p}) \gamma^0 . \quad (2.84)$$

Analogamente, per il proiettore $\Lambda_-(\vec{p})$ si ottiene

$$\boxed{\Lambda_-(\vec{p}) = \frac{-\not{p} + m}{2m}} . \quad (2.85)$$

Il proiettore $\Lambda_-(\vec{p})$ soddisfa alla relazione

$$(\Lambda_-(\vec{p}))^\dagger = \gamma^0 \Lambda_-(\vec{p}) \gamma^0 . \quad (2.86)$$

Inoltre, si ha

$$\Lambda_+(\vec{p}) + \Lambda_-(\vec{p}) = \mathbb{1} , \quad (2.87)$$

$$\Lambda_+(\vec{p}) \Lambda_-(\vec{p}) = \Lambda_-(\vec{p}) \Lambda_+(\vec{p}) = 0 . \quad (2.88)$$

Capitolo 3

Operatori momenti angolari in teoria di Dirac

3.1 Operatore di spin

Riprendiamo in considerazione la trasformazione dello spinore $\psi(x)$ per una rotazione infinitesima di un angolo θ attorno all'asse x^3 :

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 \\ x'^1 = x^1 + \theta x^2 \\ x'^2 = -\theta x^1 + x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \implies \begin{cases} \delta x^0 = 0 \\ \delta x^1 = \theta x^2 \\ \delta x^2 = -\theta x^1 \\ \delta x^3 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Combinando la legge di trasformazione per una rotazione infinitesima di un angolo θ attorno all'asse x^3 (vedi la (1.91))

$$\psi'(x') = \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2} \theta \Sigma^3 \right) \psi(x) \quad (3.2)$$

con lo sviluppo della $\psi'(x')$ in serie di Taylor (al prim'ordine in θ)

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \psi'(x) + \delta x^1 \frac{\partial \psi'(x)}{\partial x^1} + \delta x^2 \frac{\partial \psi'(x)}{\partial x^2} \\ &= \psi'(x) + \theta \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \psi(x) \\ &= \psi'(x) - i \theta L^3 \psi(x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

si ottiene

$$\psi'(x) = \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2} \theta \Sigma^3 + i \theta L^3 \right) \psi(x), \quad (3.4)$$

dove L^3 è la terza componente del momento angolare orbitale $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla}$ (ricordiamo che stiamo utilizzando unità naturali). Identificando questa formula con l'espressione generale che fornisce la trasformazione della forma funzionale della $\psi(x)$ per rotazioni

$$\psi'(x) = (1 + i \theta J^3) \psi(x), \quad (3.5)$$

si ottiene

$$\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma}}. \quad (3.6)$$

L'operatore momento angolare orbitale $\vec{L}$ trasforma la parte spaziale della ψ , mentre l'operatore $\vec{\Sigma}/2$ agisce sulle variabili di spin.

L'operatore $\vec{\Sigma}/2$ deve quindi essere interpretato come *operatore di spin* per particelle di spin 1/2 ed è una generalizzazione dell'operatore di Pauli $\vec{\sigma}/2$. In unità ordinarie

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \vec{\Sigma}. \quad (3.7)$$

► Autovalori di Σ^3

Nella rappresentazione di Dirac la matrice $\vec{\Sigma}$ è data da

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

e quindi, nel sistema di riposo della particella, abbiamo

$$\Sigma^3 u^{(r)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+^{(r)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^3 \chi_+^{(r)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \chi_+^{(1)}(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\chi_+^{(2)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.9a)$$

$$\Sigma^3 v^{(r)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^3 \varphi_-^{(r)}(0) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_-^{(1)}(0) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -\varphi_-^{(2)}(0) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.9b)$$

Perciò

$$\Sigma^3 u^{(1)}(m, \vec{0}) = +u^{(1)}(m, \vec{0}) \quad (3.10a)$$

$$\Sigma^3 u^{(2)}(m, \vec{0}) = -u^{(2)}(m, \vec{0}) \quad (3.10b)$$

$$\Sigma^3 v^{(1)}(m, \vec{0}) = +v^{(1)}(m, \vec{0}) \quad (3.10c)$$

$$\Sigma^3 v^{(2)}(m, \vec{0}) = -v^{(2)}(m, \vec{0}) \quad (3.10d)$$

Quindi le quattro funzioni ortonormali $u^{(r)}(m, \vec{0})$ e $v^{(r)}(m, \vec{0})$, con $r = 1, 2$, sono autofunzioni dell'operatore energia $i\partial/\partial t$ e dell'operatore Σ^3 (con autovalori $\pm p_0$ per l'energia, $\pm 1/2$ per la proiezione di spin).

► Commutatori dell'operatore di spin

Dimostriamo che le componenti di $\vec{\Sigma}$ soddisfano le proprietà generali di commutazione dei momenti angolari

$$[\Sigma^j, \Sigma^k] = 2i \epsilon^{jkl} \Sigma^l, \quad (3.11)$$

Per verificare la (3.11) si può procedere nel modo seguente: per $j \neq k$ si ha

$$[\Sigma^j, \Sigma^k] = [\gamma^0 \gamma^j \gamma^5, \gamma^0 \gamma^k \gamma^5] = -[\gamma^j, \gamma^k] = -2\gamma^j \gamma^k.$$

Moltiplicando la definizione (1.89) delle matrici Σ^j

$$\Sigma^j = \frac{1}{2} \epsilon^{jmn} \sigma^{mn} = \frac{i}{2} \epsilon^{jmn} \gamma^m \gamma^n,$$

per ϵ^{jkl} e sommando su j si ottiene

$$\epsilon^{jkl} \Sigma^j = \frac{i}{2} \epsilon^{jkl} \epsilon^{jmn} \gamma^m \gamma^n = \frac{i}{2} (\delta^{km} \delta^{\ell n} - \delta^{kn} \delta^{\ell m}) \gamma^m \gamma^n = \frac{i}{2} (\gamma^k \gamma^\ell - \gamma^\ell \gamma^k) = i \gamma^k \gamma^\ell,$$

per cui

$$\gamma^j \gamma^k = -i \epsilon^{jkl} \Sigma^\ell$$

e si ottiene la regola di commutazione (3.11).

3.2 Conservazione del momento angolare totale

Vogliamo ora determinare quali siano le leggi di conservazione dei momenti angolari in teoria di Dirac.

Ricordiamo che in rappresentazione di Heisenberg un generico operatore $\Omega^{(H)}$ soddisfa all'equazione

$$\frac{d\Omega^{(H)}}{dt} = i [\mathbb{H}, \Omega^{(H)}] + \frac{\partial \Omega^{(H)}}{\partial t}. \quad (3.12)$$

$\Omega^{(H)}$ è deducibile dall'operatore indipendente dal tempo $\Omega^{(S)}$ in rappresentazione di Schrödinger mediante la relazione

$$\Omega^{(H)}(t) = e^{i\mathbb{H}t} \Omega^{(S)} e^{-i\mathbb{H}t}. \quad (3.13)$$

Come abbiamo visto nel Capitolo 1, in teoria di Dirac l'Hamiltoniana libera è

$$\mathbb{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (3.14)$$

► Momento angolare orbitale $\vec{L}$

L'evoluzione temporale di L^j è data da

$$\begin{aligned} \frac{dL^j}{dt} &= i [\mathbb{H}, L^j] = i [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, L^j] = i \alpha^k [p^k, L^j] \\ &= \epsilon^{jkl} \alpha^k p^\ell = (\vec{\alpha} \times \vec{p})^j, \end{aligned} \quad (3.15)$$

per cui

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{p}}. \quad (3.16)$$

Quindi, a differenza di quanto avviene nella teoria di Schrödinger, per una particella di Dirac libera $\vec{L}$ non è una costante del moto.

► **Momento angolare di spin $\vec{\Sigma}/2$**

L'evoluzione temporale di Σ^j è data da

$$\frac{d\Sigma^j}{dt} = i [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \Sigma^j] = i [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \Sigma^j], \quad (3.17)$$

dove si è tenuto conto che $[\beta, \vec{\Sigma}] = 0$. Per il calcolo del commutatore $[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \Sigma^j]$ è utile usare la proprietà $\vec{\Sigma} = -\vec{\alpha} \gamma^5$ e le proprietà di anticommutazione (3.11):

$$\begin{aligned} i [\alpha^k p^k, \Sigma^j] &= i p^k [-\Sigma^k \gamma^5, \Sigma^j] = -i p^k [\Sigma^k, \Sigma^j] \gamma^5 = 2 p^k \epsilon^{kj\ell} \Sigma^\ell \gamma^5 \\ &= -2 \epsilon^{kj\ell} p^k \alpha^\ell = -2 (\vec{\alpha} \times \vec{p})^j. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Quindi si ha

$$\boxed{\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} = -2 \vec{\alpha} \times \vec{p}} \quad (3.19)$$

e ne segue che neppure l'operatore $\vec{\Sigma}$ è una costante del moto.

Se però consideriamo l'operatore $\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$, tenendo conto che $[\mathbb{H}, \vec{p}] = 0$, troviamo

$$\frac{d}{dt} (\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) = i [\mathbb{H}, \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}] = i [\mathbb{H}, \vec{\Sigma}] \cdot \vec{p}. \quad (3.20)$$

Ma, per la dimostrazione precedente, $[\mathbb{H}, \vec{\Sigma}] = 2i \vec{\alpha} \times \vec{p}$ e quindi

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) = 0}. \quad (3.21)$$

Ossia l'operatore *elicità*

$$\hat{s} \equiv \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (3.22)$$

è una costante del moto.

► **Momento angolare totale $\vec{J}$**

Dalle equazioni (3.16) e (3.19) si ottiene infine

$$\boxed{\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \right) = 0}, \quad (3.23)$$

ossia il momento angolare totale $\vec{J}$ è una costante del moto.

Capitolo 4

Interazione elettrone–campo elettromagnetico

4.1 Qualche richiamo sul campo elettromagnetico

Il campo elettrico $\vec{E}$ e il campo magnetico $\vec{B}$ possono essere espressi mediante il quadri-potenziale A^μ nel modo seguente

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A^0, \quad (4.1a)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.1b)$$

Il tensore (antisimmetrico) del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ è definito come

$$\boxed{F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}, \quad (4.2)$$

e quindi

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Il quadri-potenziale A^μ non è unicamente definito a partire dai campi elettrico $\vec{E}$ e magnetico $\vec{B}$ (ossia da $F^{\mu\nu}$); esso è definito solo a meno del quadri-gradiente di una funzione arbitraria. Infatti, $F^{\mu\nu}$ resta invariante per la trasformazione

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x). \quad (4.4)$$

Questa trasformazione è chiamata *trasformazione di gauge* su $A_\mu(x)$.

Le equazioni di Maxwell si possono scrivere in forma quadri-vettoriale:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j}, \end{aligned} \right\} \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (4.5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \implies \partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0. \quad (4.5b)$$

Nella scrittura di queste equazioni abbiamo fatto uso delle unità (razionalizzate) di Heavyside-Lorentz; in queste unità si ha

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi} \quad \text{in unità naturali.} \quad (4.6)$$

Notiamo due importanti proprietà:

1. La natura antisimmetrica di $F^{\mu\nu}$ implica che la quadri-corrente j^ν è conservata: infatti, dalla (4.5a) si ottiene

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

2. In virtù della definizione (4.2), $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, l'equazione (4.5b) è identicamente soddisfatta.

Espressa mediante il quadri-potenziale A^μ , l'equazione (4.5a) diventa

$$\boxed{\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu}. \quad (4.8)$$

4.2 Interazione elettrone-campo elettromagnetico

Classicamente, per passare dalla trattazione di un elettrone libero a quella di un elettrone in interazione con un campo elettromagnetico si applica la cosiddetta prescrizione di accoppiamento minimo, ossia

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad (4.9)$$

dove e è la carica elettrica dell'elettrone. La regola quantistica corrispondente è

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad (4.10)$$

ossia (in unità naturali)

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i e A_\mu. \quad (4.11)$$

Per l'operatore di Dirac $i\partial - m$ si ha

$$i\gamma^\mu \partial_\mu - m \rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu - e \gamma^\mu A_\mu - m \quad (4.12)$$

e quindi l'equazione di Dirac in presenza di un campo elettromagnetico esterno diventa

$$\boxed{(i\partial - e A - m) \psi(x) = 0}. \quad (4.13)$$

4.3 Invarianza di gauge

Data una soluzione $\psi(x)$ dell'equazione di Dirac, anche una generica $\psi'(x)$, ottenuta dalla $\psi(x)$ per una ridefinizione della fase, ossia

$$\psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad (4.14)$$

è soluzione della stessa equazione, se α è una costante. La trasformazione (4.14) viene detta *trasformazione di gauge globale* della $\psi(x)$. Nell'ambito di una teoria Lagrangiana di campo (che sarà studiata nella seconda parte) si dimostra che l'invarianza per trasformazione di gauge globale di ψ comporta, in base al teorema di Noether, la conservazione della corrente $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Invece l'equazione di Dirac libera non è invariante per la *trasformazione di gauge locale*

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x). \quad (4.15)$$

Infatti, per questa trasformazione di gauge locale

$$\partial_\mu \psi(x) \longrightarrow \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi(x)) = ie^{i\alpha(x)} \psi(x) \partial_\mu \alpha(x) + e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x), \quad (4.16)$$

e l'equazione di Dirac libera diventa

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x) - m] \psi(x) = 0. \quad (4.17)$$

Invece, l'equazione (4.13) con l'accoppiamento $\gamma^\mu A_\mu$ è invariante per trasformazioni di gauge locali se il quadri-potenziale A_μ si trasforma come nella (4.4), con $\varphi(x) = -\alpha(x)/e$:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (4.18)$$

In tal caso, la trasformazione di gauge su $\psi(x)$ e quella su $A_\mu(x)$ si compensano in modo da garantire l'invarianza dell'equazione di Dirac (4.13).

Notare che questa proprietà dipende in modo cruciale dalla prescrizione di accoppiamento minimo, che, come si è visto, consiste nel sostituire la derivata ∂_μ con la cosiddetta *derivata covariante* D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (4.19)$$

Per trasformazioni di gauge

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x), \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \end{aligned} \quad (4.20)$$

abbiamo che

$$D_\mu \psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x). \quad (4.21)$$

La proprietà di invarianza di gauge gioca un ruolo importante non solo nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica, ma (in versione generalizzata) nelle moderne teorie dell'interazione elettrodebole e della cromodinamica quantistica.

4.4 Hamiltoniana di interazione elettrone–campo elettromagnetico

In questo e nei paragrafi successivi passiamo ad esaminare in dettaglio alcuni dei termini caratteristici di accoppiamento dell'elettrone con il campo elettromagnetico.

Se moltiplichiamo la (4.13)

$$\left(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^k \partial_k - e\gamma^0 A_0 + e\vec{\gamma} \cdot \vec{A} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (4.22)$$

a sinistra per γ^0 , otteniamo

$$\left(i\partial_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - eA_0 + e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - \beta m \right) \psi(x) = 0. \quad (4.23)$$

In forma hamiltoniana si ha quindi

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_{\text{int}}) \psi, \quad (4.24)$$

con

$$\mathbb{H}_0 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \quad (4.25)$$

$$\mathbb{H}_{\text{int}} = eA_0 - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A}. \quad (4.26)$$

Ricordiamo che classicamente l'hamiltoniana di interazione è data da $eA_0 - e\vec{v} \cdot \vec{A}$. Quindi l'operatore $\vec{\alpha}$ risulta essere il corrispettivo del vettore classico velocità $\vec{v}$.

Calcoliamo le derivate temporali di $\vec{r}$ e $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = i [\mathbb{H}, \vec{r}] = i [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{r}] = \vec{\alpha}, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\pi}}{dt} &= i [\mathbb{H}, \vec{\pi}] - e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= i \left[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + eA_0 - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A}, \vec{p} - e\vec{A} \right] - e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= i \left\{ -e [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{A}] + e [A_0, \vec{p}] - e [\vec{\alpha} \cdot \vec{A}, \vec{p}] \right\} - e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Utilizzando la formula

$$[f(\vec{r}), \vec{p}] = i \vec{\nabla} f, \quad (4.29)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} [A_0, \vec{p}] &= i \vec{\nabla} A_0, \\ [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{A}] + [\vec{\alpha} \cdot \vec{A}, \vec{p}] &= i \vec{\alpha} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

per cui

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = e \vec{\alpha} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - e \vec{\nabla} A_0 - e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = e \vec{\alpha} \times \vec{B} + e \vec{E}. \quad (4.31)$$

Il secondo membro di questa equazione rappresenta la forza di Lorentz.

4.5 Interazione elettromagnetica nel limite non-relativistico

Per stati stazionari l'equazione (4.24) diventa

$$\left[\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) + \beta m + e A_0 \right] \psi = E \psi \quad (4.32)$$

e quindi, scrivendo

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

nella rappresentazione di Dirac si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \left[(E - e A^0) \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

ossia

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) \varphi(x) = (E - e A^0 - m) \chi(x), \\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) \chi(x) = (E - e A^0 + m) \varphi(x). \end{cases} \quad (4.35)$$

Dalla seconda di queste equazioni, ponendo $\vec{\pi} \equiv \vec{p} - e \vec{A}$, si ottiene

$$\varphi(x) = \frac{1}{E - e A^0 + m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) \chi(x) \equiv \frac{1}{E - e A^0 + m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi(x). \quad (4.36)$$

Sostituendo nella prima si ottiene l'equazione per $\chi(x)$:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \frac{1}{E - e A^0 + m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi(x) = (E - e A^0 - m) \chi(x). \quad (4.37)$$

Studiamo ora il caso di un elettrone in regime non-relativistico ($v/c \ll 1$) in una regione spaziale in cui valga la condizione $E \simeq m$, la quale implica in particolare che

$$|e A^0| \ll m. \quad (4.38)$$

Poniamo

$$E^{(\text{nr})} \equiv E - m \ll m, \quad (4.39)$$

ed approssimiamo la frazione dell'eq.(4.37) nel modo seguente

$$\begin{aligned} \frac{1}{E - e A^0 + m} &= \frac{1}{2m + E^{(\text{nr})} - e A^0} \\ &= \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{E^{(\text{nr})} - e A^0}{2m} + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

All'ordine zero in $(E^{(\text{nr})} - e A^0)/2m$ la (4.37) diventa

$$\frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \chi(x) = (E^{(\text{nr})} - e A^0) \chi(x). \quad (4.41)$$

Valutiamo $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2$ tenendo conto che per le matrici di Pauli si ha

$$\begin{aligned} [\sigma^j, \sigma^k] &= 2i \epsilon^{jkl} \sigma^\ell \\ \{\sigma^j, \sigma^k\} &= 2\delta^{jk} \mathbb{1} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \sigma^j \sigma^k = \delta^{jk} \mathbb{1} + i \epsilon^{jkl} \sigma^\ell. \quad (4.42)$$

Segue quindi che

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 &= \sigma^j \sigma^k \pi^j \pi^k = (\delta^{jk} + i \epsilon^{jkl} \sigma^\ell) \pi^j \pi^k \\ &= \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} i \epsilon^{jkl} \sigma^\ell [\pi^j, \pi^k]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Da

$$\begin{aligned} [\pi^j, \pi^k] &= [p^j - eA^j, p^k - eA^k] = -e [A^j, p^k] - e [p^j, A^k] \\ &= -ie \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^j} \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 &= \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} e \epsilon^{jkl} \sigma^\ell \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^j} \right) \\ &= \vec{\pi}^2 - e \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= (\vec{p} - e \vec{A})^2 - e \vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

L'equazione (4.41) diventa

$$\left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - e \vec{A})^2 - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e A^0 \right] \chi(x) = E^{(\text{nr})} \chi(x). \quad (4.46)$$

I termini $e A^0$ e $\frac{1}{2m} (\vec{p} - e \vec{A})^2$ sono quelli che vengono comunemente trovati in teoria quantistica non-relativistica per l'elettrone in interazione con un campo elettromagnetico, quando nell'equazione di Schrödinger si effettua la sostituzione di accoppiamento minimo

$$p_\mu \longrightarrow p_\mu - e A_\mu. \quad (4.47)$$

Il termine

$$-\frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad \left(-\frac{e \hbar}{2m c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad \text{in unità ordinarie} \right) \quad (4.48)$$

descrive l'interazione della particella con il campo magnetico esterno tramite l'operatore di spin. Se riscriviamo il termine (4.48) come

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (4.49)$$

possiamo identificare l'operatore $\vec{\mu}$ (*momento magnetico* dell'elettrone) come

$$\vec{\mu} \equiv \frac{e \hbar}{2m c} \vec{\sigma} \equiv 2 \frac{e}{2m c} \left(\frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \right) = g \frac{e}{2m c} \vec{s}, \quad (4.50)$$

con

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma}, \quad \text{spin}, \quad (4.51)$$

$$g = 2, \quad \text{rapporto giromagnetico}. \quad (4.52)$$

L'unità di misura del momento magnetico è il *magnetone di Bohr* μ_B dato da

$$\mu_B \equiv \frac{|e| \hbar}{2 m c} = 0.579 \times 10^{-14} \text{ MeV gauss}^{-1}. \quad (4.53)$$

L'accoppiamento $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ che in teoria di Dirac è contenuto nella $\mathbb{H}_{\text{int}}$ di eq.(4.26), in teoria di Schrödinger deve essere aggiunto tramite il formalismo di spin di Pauli. Il valore del rapporto giromagnetico $g = 2$, trovato nell'ambito della teoria di Dirac, è molto prossimo al valore sperimentale. Correzioni al valore $g = 2$ sono valutabili nella Elettrodinamica Quantistica (QED); all'ordine α si ha

$$g = 2 \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right]. \quad (4.54)$$

Questi effetti (correzioni radiative) saranno discussi nella Parte Seconda.

Con le approssimazioni (4.38), (4.39) l'equazione (4.36) diventa

$$\varphi(x) \simeq \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e \vec{A})}{2 m} \chi(x). \quad (4.55)$$

4.6 Approssimazione non-relativistica in un campo elettrostatico

Consideriamo l'equazione (4.37) con lo sviluppo (4.40) nel caso $\vec{A} = 0$:

$$\left[\frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left(1 - \frac{E^{(\text{nr})} - e A^0}{2 m} \right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + e A^0 \right] \chi(x) = E^{(\text{nr})} \chi(x). \quad (4.56)$$

Notiamo che lo sviluppo (4.40) è da interpretarsi come sviluppo in serie nel parametro v^2/c^2 . Infatti, $E^{(\text{nr})} - e A^0 \simeq m v^2/2$, ossia

$$\frac{E^{(\text{nr})} - e A^0}{m c^2} = \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (4.57)$$

Se vogliamo studiare termini di accoppiamento sino all'ordine $(v^2/c^2)^2$, occorre che l'equazione sia riscritta mediante uno spinore a due componenti che, includendo termini di ordine v^2/c^2 , sia normalizzato a uno. Osserviamo che per ipotesi la funzione d'onda rigorosamente normalizzata a uno è la $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}$, ossia $\int d^3x \psi^\dagger \psi = 1$. Da questa condizione si ottiene

$$1 = \int d^3x (\chi^\dagger \chi + \varphi^\dagger \varphi) \simeq \int d^3x \chi^\dagger \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{4 m^2} \right) \chi. \quad (4.58)$$

Nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la (4.55), che per $\vec{A} = 0$ diventa

$$\varphi(x) \simeq \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \chi(x) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) \sim \frac{v}{c} \chi(x). \quad (4.59)$$

Quindi, una funzione d'onda spinoriale a due componenti correttamente normalizzata a uno, a meno di termini di ordine superiore a v^2/c^2 non è la χ , ma la funzione spinoriale

$$X = \Omega \chi, \quad \text{con} \quad \Omega = 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2}. \quad (4.60)$$

Infatti

$$\int d^3x X^\dagger X = \int d^3x \chi^\dagger \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{4m^2}\right) \chi = 1 + O\left(\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right). \quad (4.61)$$

Moltiplicando la (4.56) a sinistra per Ω^{-1} e sostituendo $\chi = \Omega^{-1} X$ si ottiene

$$\Omega^{-1} \left[\frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left(1 - \frac{E^{(\text{nr})} - e A^0}{2m}\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + e A^0 \right] \Omega^{-1} X(x) = E^{(\text{nr})} \Omega^{-2} X(x). \quad (4.62)$$

Tenuto conto che

$$\Omega^{-1} \simeq 1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}, \quad (4.63)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right) \left[\frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left(1 - \frac{E^{(\text{nr})} - e A^0}{2m}\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + e A^0 \right] \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right) X(x) \\ & \quad = E^{(\text{nr})} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{4m^2}\right) X(x), \\ & \left[\left(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right) \left(\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{2m} + e A^0 \right) \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right) - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \frac{E^{(\text{nr})} - e A^0}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right] X(x) \\ & \quad = E^{(\text{nr})} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{4m^2}\right) X(x), \\ & \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + e A^0 - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3} - \left\{ \frac{\vec{p}^2}{8m^2}, e A^0 \right\} - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \frac{E^{(\text{nr})} - e A^0}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right] X(x) \\ & \quad = E^{(\text{nr})} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{4m^2}\right) X(x). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Se scriviamo $E^{(\text{nr})} \vec{p}^2$ come $\{E^{(\text{nr})}, \vec{p}^2\}/2$, otteniamo

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + e A^0 - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3} + \frac{1}{8m^2} (\{\vec{p}^2, E^{(\text{nr})} - e A^0\} - 2 \vec{\sigma} \cdot \vec{p} (E^{(\text{nr})} - e A^0) \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \right] X(x) \\ & \quad = E^{(\text{nr})} X(x). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Utilizziamo ora l'identità $\{A^2, B\} - 2 A B A = [A, [A, B]]$ per ottenere

$$\begin{aligned} \{\vec{p}^2, E^{(\text{nr})} - e A^0\} - 2 \vec{\sigma} \cdot \vec{p} (E^{(\text{nr})} - e A^0) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, E^{(\text{nr})} - e A^0]] \\ &= [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, -e A^0]]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned}
[\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, -e A^0] &= -i e \vec{\sigma} \cdot \vec{E}, \\
[\vec{\sigma} \cdot \vec{p}, \vec{\sigma} \cdot \vec{E}] &= \sigma^j \sigma^k [p^j, E^k] + [\sigma^j, \sigma^k] E^k p^j \\
&= (\delta^{jk} + i \epsilon^{jkl} \sigma^l) [p^j, E^k] + 2 i \epsilon^{jkl} \sigma^l E^k p^j \\
&= \vec{p} \cdot \vec{E} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} \times \vec{E}) - 2 i \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) \\
&= -i \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 2 i \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}).
\end{aligned}$$

Il termine $\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} \times \vec{E})$ è stato ommesso perchè identicamente nullo; infatti

$$\vec{p} \times \vec{E} = -i \vec{\nabla} \times \vec{E} = i \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} A^0 = 0. \quad (4.67)$$

Sostituendo questi risultati nella (4.65) ricaviamo l'equazione

$$\left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + e A^0 - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8 m^3 c^2} - \frac{e \hbar}{4 m^2 c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) - \frac{e \hbar^2}{8 m^2 c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right] X(x) = E^{(\text{nr})} X(x), \quad (4.68)$$

dove abbiamo ripristinato le unità ordinarie.

I termini di questa equazione hanno il seguente significato:

1. $e A^0$ energia elettrostatica.
2. $\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8 m^3 c^2}$ termine cinetico con correzione relativistica:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 &= m c^2 \left(1 + \frac{\vec{p}^2 c^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2} - m c^2 \\
&\simeq m c^2 \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{2 m^2 c^2} - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8 m^4 c^4} \right) - m c^2 \\
&\simeq \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8 m^3 c^2}.
\end{aligned} \quad (4.69)$$

3. $-\frac{e \hbar}{4 m^2 c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p})$ termine di interazione spin-orbita (termine di Thomas). Questo termine descrive l'interazione tra il campo magnetico generato dal moto dell'elettrone

$$\vec{B} = \vec{E} \times \frac{\vec{p}}{m c} \quad (4.70)$$

e il momento di dipolo magnetico dell'elettrone

$$\vec{\mu} = \frac{e \hbar}{2 m c} \vec{\sigma}, \quad (4.71)$$

con un fattore di riduzione 1/2 dovuto alla precessione dello spin (Thomas).

Nel caso di un campo elettrico a simmetria sferica

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\vec{r}}{r} \frac{dA^0}{dr}, \\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) &= -\frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = -\frac{2}{\hbar} \frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \left(\frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \right) \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) \\ &= -\frac{2}{\hbar} \frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \vec{s} \cdot \vec{\ell},\end{aligned}$$

e quindi

$$-\frac{e\hbar}{4m^2c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) = \frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} \vec{s} \cdot \vec{\ell}. \quad (4.72)$$

Questo è l'accoppiamento di spin-orbita, che è importante in fisica atomica.

4. $-\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ termine di Darwin. Questo termine è da mettersi in relazione con la variazione dell'energia elettrostatica dovuta alle fluttuazioni della posizione dell'elettrone su dimensioni lineari dell'ordine della lunghezza d'onda Compton (Zitterbewegung):

$$\begin{aligned}A^0(\vec{r} + \delta\vec{r}) &= A^0(\vec{r}) + \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} A^0 + \frac{1}{2} \delta x^i \delta x^j \frac{\partial^2 A^0}{\partial x^i \partial x^j}, \\ \langle A^0(\vec{r} + \delta\vec{r}) \rangle &= A^0(\vec{r}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A^0}{\partial x^i \partial x^j} \langle \delta x^i \delta x^j \rangle, \\ \langle \delta x^i \delta x^j \rangle &= \frac{1}{3} \langle (\delta r)^2 \rangle \delta_{ij} \sim \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \delta_{ij}, \\ \delta(eA^0) &\sim \frac{e\hbar^2}{6m^2c^2} \Delta A^0 = -\frac{e\hbar^2}{6m^2c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}.\end{aligned}$$

Capitolo 5

Elettrone in un campo a simmetria sferica

5.1 Costanti del moto

Consideriamo l'hamiltoniana

$$\mathbb{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(r) , \quad (5.1)$$

relativa ad un elettrone in un generico campo a simmetria sferica.

Discutiamo le costanti del moto. Dal momento che sia $\vec{L}$ che $\vec{\Sigma}$ commutano con $V(r)$, anche in questo caso, come nel moto libero, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{\Sigma}/2$ è una costante del moto.

Cerchiamo ora un'altra costante del moto. In una teoria non relativistica vi sarebbe la proiezione dello spin su $\vec{J}$: $\vec{\sigma} \cdot \vec{J}$. Infatti, $\vec{\sigma} \cdot \vec{J}$ può essere riscritto come

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\hbar} \left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{3}{4} \hbar^2 \right) ; \quad (5.2)$$

tutti e due i momenti angolari sono costanti del moto e quindi lo è anche $\vec{\sigma} \cdot \vec{J}$. La generalizzazione alla teoria di Dirac di $\vec{\sigma} \cdot \vec{J}$ dovrebbe essere $\vec{\Sigma} \cdot \vec{J}$, oppure $\beta \vec{\Sigma} \cdot \vec{J}$ (che ha lo stesso limite non-relativistico di $\vec{\Sigma} \cdot \vec{J}$, ma commutatori più semplici). Si può dimostrare che¹

$$\left[\mathbb{H} , \beta \vec{\Sigma} \cdot \vec{J} \right] = \frac{1}{2} \hbar [\mathbb{H} , \beta] , \quad (5.3)$$

e quindi una costante del moto è

$$\boxed{K \equiv \beta \vec{\Sigma} \cdot \vec{J} - \frac{1}{2} \hbar \beta} . \quad (5.4)$$

K può anche essere scritto come

$$\begin{aligned} K &= \beta \vec{\Sigma} \cdot \left(\vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \vec{\Sigma} \right) - \frac{1}{2} \hbar \beta \\ &= \beta \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \beta \underbrace{\vec{\Sigma}^2}_3 - \frac{1}{2} \hbar \beta \\ &= \beta \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right) . \end{aligned} \quad (5.5)$$

¹Vedi, per esempio, Sakurai, pag. 122.

Si ha inoltre che $\vec{J}$ e K commutano tra loro:

$$[\vec{J}, K] = 0. \quad (5.6)$$

Quindi per un elettrone in un campo centrale gli operatori $\mathbb{H}$, $\vec{J}^2$, J^3 , K ammettono un insieme comune di autofunzioni che scriviamo come

$$\begin{cases} \mathbb{H} \psi = E \psi, \\ \vec{J}^2 \psi = \hbar^2 j(j+1) \psi, \\ J^3 \psi = \hbar j_3 \psi, \\ K \psi = -\hbar \kappa \psi. \end{cases} \quad (5.7)$$

Esiste una semplice relazione tra K^2 e $\vec{J}^2$. Per derivarla cominciamo a calcolare K^2 :

$$K^2 = \beta (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar) \beta (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar) = (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar) (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar).$$

Dalla relazione

$$(\vec{\Sigma} \cdot \vec{a}) (\vec{\Sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\Sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (5.8)$$

discende

$$(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L}) (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L}) = \vec{L}^2 + i \vec{\Sigma} \cdot \underbrace{(\vec{L} \times \vec{L})}_{i \hbar \vec{L}} = \vec{L}^2 - \hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L},$$

e quindi

$$K^2 = \vec{L}^2 - \hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 2 \hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar^2 = \vec{L}^2 + \hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar^2. \quad (5.9)$$

Inoltre si ha

$$\vec{J}^2 = \left(\vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \vec{\Sigma} \right)^2 = \vec{L}^2 + \hbar \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{4} \hbar^2. \quad (5.10)$$

Quindi

$$K^2 = \vec{J}^2 + \frac{1}{4} \hbar^2. \quad (5.11)$$

Questa relazione operatoriale comporta la seguente relazione tra autovalori:

$$\hbar^2 \kappa^2 = \hbar^2 j(j+1) + \frac{1}{4} \hbar^2 = \hbar^2 \left(j + \frac{1}{2} \right)^2,$$

per cui

$$\boxed{\kappa = \pm \left(j + \frac{1}{2} \right)}. \quad (5.12)$$

5.2 Riduzione a spinori a due componenti

Nella rappresentazione di Dirac K può essere scritto come

$$\begin{aligned} K &= \beta (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \hbar) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \hbar \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dall'equazione agli autovalori $K\psi = -\hbar\kappa\psi$, scrivendo

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

si ha

$$\begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = -\hbar\kappa \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right) \chi = -\hbar\kappa \chi, \\ \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar \right) \varphi = \hbar\kappa \varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \chi = -\hbar(1 + \kappa) \chi, \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \varphi = -\hbar(1 - \kappa) \varphi. \end{cases} \quad (5.15)$$

Osserviamo ora che χ e φ , essendo autofunzioni di $\vec{J}^2$ e di $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$, sono anche autofunzioni di $\vec{L}^2$. Infatti, gli operatori $\vec{J}^2$ e $\vec{L}^2$, quando operano su χ e φ , sono legati dalla relazione

$$\vec{J}^2 = \left(\vec{L} + \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \right)^2 = \vec{L}^2 + \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{4} \hbar^2,$$

ossia

$$\vec{L}^2 = \vec{J}^2 - \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \frac{3}{4} \hbar^2, \quad (5.16)$$

Da questa relazione e dalle (5.15) si ricava

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 \chi &= \left(\vec{J}^2 - \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \frac{3}{4} \hbar^2 \right) \chi = \left[\hbar^2 j(j+1) + \hbar^2(1 + \kappa) - \frac{3}{4} \hbar^2 \right] \chi \\ &= \hbar^2 \left[j(j+1) + \kappa + \frac{1}{4} \right] \chi \\ &\equiv \hbar^2 \ell_\chi (\ell_\chi + 1) \chi, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 \varphi &= \left(\vec{J}^2 - \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \frac{3}{4} \hbar^2 \right) \varphi = \left[\hbar^2 j(j+1) + \hbar^2(1 - \kappa) - \frac{3}{4} \hbar^2 \right] \varphi \\ &= \hbar^2 \left[j(j+1) - \kappa + \frac{1}{4} \right] \varphi \\ &\equiv \hbar^2 \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1) \varphi. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Quindi le funzioni d'onda spinoriali a due componenti χ e φ sono autofunzioni di $\vec{L}^2$ ma, a fissi j e κ , hanno due diversi valori di ℓ : $\ell_\chi \neq \ell_\varphi$. Questo spiega perchè lo spinore a quattro componenti ψ non può essere autofunzione di $\vec{L}^2$. Dalle (5.17), (5.18) si trova

$$\begin{cases} \ell_\chi (\ell_\chi + 1) = j(j+1) + \kappa + \frac{1}{4}, \\ \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1) = j(j+1) - \kappa + \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Utilizzando la (5.12) si ha

$$\kappa = + \left(j + \frac{1}{2} \right) \implies \begin{cases} \ell_\chi = j + \frac{1}{2}, \\ \ell_\varphi = j - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\kappa = - \left(j + \frac{1}{2} \right) \implies \begin{cases} \ell_\chi = j - \frac{1}{2}, \\ \ell_\varphi = j + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (5.21)$$

Da questo risultato si vede in particolare che, a κ fisso, χ e φ hanno parità opposta.

5.3 Separazione delle variabili

Dalle proprietà viste nel paragrafo precedente segue che, per risolvere l'equazione di Dirac per stati stazionari nel caso di un potenziale centrale,

$$\left[c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m c^2 + V(r) \right] \psi(x) = E \psi(x), \quad (5.22)$$

conviene innanzi tutto farne una riduzione a spinori a due componenti, ossia scrivere

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

per ottenere, con passaggi analoghi a quelli del paragrafo 4.5, in rappresentazione di Dirac

$$\begin{cases} c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi(x) = (E - V - m c^2) \chi(x), \\ c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi(x) = (E - V + m c^2) \varphi(x). \end{cases} \quad (5.24)$$

È conveniente scrivere la $\chi(x)$ e la $\varphi(x)$ mediante le seguenti fattorizzazioni:

$$\begin{cases} \chi = g(r) \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}, \\ \varphi = i f(r) \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}, \end{cases} \quad (5.25)$$

dove le funzioni $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell}$ sono le funzioni ortonormali di angolo-spin (autofunzioni di $\vec{J}^2$, J^3 , $\vec{L}^2$, $\vec{S}^2$)

$$\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell} = \sum_{m_\ell, m_s} \langle \ell m_\ell s m_s | j j_3 \rangle Y_{\ell, m_\ell} \chi_{s, m_s}. \quad (5.26)$$

Quando sostituiamo le (5.25) nelle (5.24) dobbiamo saper valutare il risultato dell'applicazione dell'operatore $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ sugli spinori χ e φ . Riscriviamo allora quest'operatore nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}), \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) &= \vec{r} \cdot \vec{p} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = -i \hbar r \frac{\partial}{\partial r} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} \left(-i \hbar r \frac{\partial}{\partial r} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Si ottiene quindi, per esempio,

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi &= i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} \left(-\hbar r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right) \varphi = i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} \left(-\hbar r \frac{\partial}{\partial r} - \hbar (1 - \kappa) \right) \varphi \\ &= \hbar \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi} \left(\frac{df}{dr} + \frac{(1 - \kappa)}{r} f \right).\end{aligned}\quad (5.28)$$

Notiamo ora che il risultato dell'applicazione dell'operatore $\vec{\sigma} \cdot \vec{r}$ (invariante per rotazione di spazio, ma pseudoscalare per riflessione spaziale) sulla funzione $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}$ (autofunzione di $\vec{J}^2$, J_3 , $\vec{L}^2$ con autovalori $\hbar^2 j(j+1)$, $\hbar j_3$, $\hbar^2 \ell_\varphi(\ell_\varphi+1)$) dev'essere quello di generare un'autofunzione $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell}$ di $\vec{J}^2$, J_3 , $\vec{L}^2$. Gli autovalori di quest'ultima per $\vec{J}^2$ e J_3 sono gli stessi della $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}$, mentre il valore di ℓ deve avere una parità opposta a quella di ℓ_φ , a causa del cambiamento di parità indotto dalla natura pseudoscalare di $\vec{\sigma} \cdot \vec{r}$. Deve quindi essere $\ell = \ell_\chi$ (per una dimostrazione analitica di questa proprietà, si veda l'Appendice F). Possiamo allora scrivere

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi} = \eta_1 \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}, \quad (5.29)$$

dove η_1 è un fattore di fase (dal momento che le funzioni $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell}$ sono normalizzate e $(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r})^2 = 1$). Analogamente, si deve avere

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi} = \eta_2 \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}. \quad (5.30)$$

Per compatibilità tra le due equazioni (5.29) e (5.30), dev'essere $\eta_1 \eta_2 = +1$. Definendo opportunamente la fase relativa tra le due funzioni $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}$ e $\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}$, che è arbitraria, possiamo scegliere $\eta_1 = \eta_2 = -1$. Abbiamo quindi

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi} = -\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}, \quad \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi} = -\mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}. \quad (5.31)$$

Sostituendo la prima di queste espressioni nella (5.28) otteniamo

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi = -\hbar \left(\frac{df}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} f \right) \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\chi}. \quad (5.32)$$

Analogamente si ha

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi = i \hbar \left(\frac{dg}{dr} + \frac{1 + \kappa}{r} g \right) \mathcal{Y}_{j_3}^{j\ell_\varphi}. \quad (5.33)$$

Usando queste relazioni, le equazioni del moto (5.24) diventano

$$\begin{cases} -\hbar c \left(\frac{df}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} f \right) = (E - V - m c^2) g, \\ \hbar c \left(\frac{dg}{dr} + \frac{1 + \kappa}{r} g \right) = (E - V + m c^2) f. \end{cases} \quad (5.34)$$

Il problema è stato quindi ricondotto a quello del calcolo delle funzioni d'onda radiali $f(r)$ e $g(r)$, una volta che sia stata precisata la forma funzionale del potenziale $V(r)$. Come si vede, anche nel caso dell'equazione di Dirac, un potenziale centrale consente la separazione

nella funzione d'onda tra dipendenza angolare (e di spin) e dipendenza radiale. Una importante differenza con il caso dell'equazione di Schrödinger è che adesso abbiamo due equazioni differenziali radiali accoppiate, anzichè una sola equazione. Normalmente conviene ridefinire le due funzioni radiali come segue:

$$F(r) = r f(r), \quad G(r) = r g(r), \quad (5.35)$$

e quindi si ha

$$\begin{cases} \hbar c \left(\frac{dF}{dr} - \frac{\kappa}{r} F \right) = - (E - V - m c^2) G, \\ \hbar c \left(\frac{dG}{dr} + \frac{\kappa}{r} G \right) = (E - V + m c^2) F. \end{cases} \quad (5.36)$$

5.4 Soluzione delle equazioni radiali per un atomo idrogenoide

Utilizziamo ora il formalismo precedente per ricavare lo spettro energetico di un atomo idrogenoide. In questo caso il potenziale centrale è

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{Z e^2}{r}. \quad (5.37)$$

Poniamo

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{m c^2 + E}{\hbar c}, & z_2 &= \frac{m c^2 - E}{\hbar c}, \\ \gamma &= \frac{Z e^2}{4\pi \hbar c} \equiv Z \alpha, \end{aligned} \quad (5.38)$$

ed introduciamo la variabile adimensionale

$$\rho = \sqrt{z_1 z_2} r. \quad (5.39)$$

Notiamo che $z_1 z_2 = \frac{(m c^2)^2 - E^2}{(\hbar c)^2} \geq 0$, perchè consideriamo stati legati.

Le equazioni radiali (5.36) diventano

$$\begin{cases} \frac{dF}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho} F = \left(\sqrt{\frac{z_2}{z_1}} - \frac{\gamma}{\rho} \right) G, \\ \frac{dG}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho} G = \left(\sqrt{\frac{z_1}{z_2}} + \frac{\gamma}{\rho} \right) F. \end{cases} \quad (5.40)$$

Dalle equazioni (5.40), per $\rho \rightarrow \infty$, si ha

$$\begin{cases} \frac{dF}{d\rho} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} G, \\ \frac{dG}{d\rho} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} F, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d^2 F}{d\rho^2} = F, \\ \frac{d^2 G}{d\rho^2} = G, \end{cases} \quad (5.41)$$

con soluzioni asintotiche (per $\rho \rightarrow \infty$)

$$F(\rho) \sim \rho^m e^{\pm \rho}, \quad G(\rho) \sim \rho^{m'} e^{\pm \rho}, \quad (5.42)$$

per qualunque valore finito di m e di m' . Per uno stato legato, occorre scegliere

$$F(\rho) \sim \rho^m e^{-\rho}, \quad G(\rho) \sim \rho^{m'} e^{-\rho}. \quad (5.43)$$

Cerchiamo delle soluzioni nella forma

$$F(\rho) = \rho^s e^{-\rho} \sum_n a_n \rho^n, \quad G(\rho) = \rho^s e^{-\rho} \sum_n b_n \rho^n. \quad (5.44)$$

Sostituendo nelle equazioni (5.40) ed eguagliando i coefficienti dei termini $\rho^s e^{-\rho} \rho^{n-1}$, si trovano le relazioni di ricorrenza

$$(s + n - \kappa) a_n - a_{n-1} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_{n-1} - \gamma b_n, \quad (5.45a)$$

$$(s + n + \kappa) b_n - b_{n-1} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} a_{n-1} + \gamma a_n. \quad (5.45b)$$

Moltiplicando la (5.45a) per z_1 , la (5.45b) per $\sqrt{z_1 z_2}$ e sottraendo membro a membro, si ottiene una relazione che coinvolge una sola coppia di coefficienti (a_n e b_n):

$$(z_1 (s + n - \kappa) + \sqrt{z_1 z_2} \gamma) a_n - (\sqrt{z_1 z_2} (s + n + \kappa) - z_1 \gamma) b_n = 0. \quad (5.46)$$

Per determinare s possiamo porre $n = 0$ nelle (5.45), ossia

$$(s - \kappa) a_0 = -\gamma b_0, \quad (5.47a)$$

$$(s + \kappa) b_0 = \gamma a_0. \quad (5.47b)$$

da cui

$$s^2 - \kappa^2 = -\gamma^2 \quad \implies \quad s = \pm \sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}. \quad (5.48)$$

I due integrali

$$\int d\rho |F(\rho)|^2, \quad \int d\rho |G(\rho)|^2$$

devono essere convergenti e quindi $s > -1/2$. Questa condizione è incompatibile con il segno negativo nella (5.48), tenendo conto che

$$\kappa^2 - \gamma^2 \geq 1 - (Z\alpha)^2.$$

Dobbiamo quindi scegliere

$$s = +\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}. \quad (5.49)$$

Notiamo ora che le somme $\sum_n a_n \rho^n$, $\sum_n b_n \rho^n$, se illimitate, forniscono, per grandi ρ , un comportamento asintotico del tipo $e^{2\rho}$. Infatti, per $n \rightarrow \infty$, dalle equazioni (5.45) si ottiene

$$n a_n - a_{n-1} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_{n-1} - \gamma b_n, \quad (5.50a)$$

$$n b_n - b_{n-1} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} a_{n-1} + \gamma a_n, \quad (5.50b)$$

e dalla (5.46)

$$b_n = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} a_n. \quad (5.50c)$$

Dalle equazioni (5.50) si ricava, per $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2}{n}, \quad (5.51)$$

e quindi

$$\sum_n a_n \rho^n \sim e^{2\rho} \quad (\rho \rightarrow \infty). \quad (5.52)$$

Analogamente, si ottiene anche

$$\sum_n b_n \rho^n \sim e^{2\rho} \quad (\rho \rightarrow \infty). \quad (5.53)$$

Se le somme $\sum_n a_n \rho^n$, $\sum_n b_n \rho^n$ fossero illimitate, i comportamenti asintotici delle funzioni $F(\rho)$, $G(\rho)$ a grandi ρ sarebbero $F(\rho) \sim \rho^s e^\rho$, $G(\rho) \sim \rho^s e^\rho$ e quindi non accettabili per stati legati. Ne segue che le due somme (5.44) si devono troncare a una certa potenza di ρ . Supponiamo che il primo coefficiente nullo della prima serie sia $a_{n'+1}$:

$$a_{n'} \neq 0, \quad a_{n'+1} = 0.$$

Scriviamo le equazioni (5.45) ponendo $n = n' + 1$:

$$-a_{n'} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_{n'} - \gamma b_{n'+1}, \quad (5.54a)$$

$$(s + n' + 1 + \kappa) b_{n'+1} - b_{n'} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} a_{n'}. \quad (5.54b)$$

Perchè queste equazioni siano compatibili, occorre che $b_{n'+1} = 0$ e quindi le due serie si troncano allo stesso ordine, con la relazione

$$a_{n'} = -\sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_{n'}. \quad (5.55)$$

Sostituendo questa espressione nella (5.46), scritta per $n = n'$, ed eliminando $b_{n'}$, si ha

$$2\sqrt{z_1 z_2} (s + n') = (z_1 - z_2) \gamma. \quad (5.56)$$

Dalla definizione di z_1 e z_2 si ottiene

$$\sqrt{z_1 z_2} = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{(m c^2)^2 - E}, \quad (5.57a)$$

$$z_1 - z_2 = \frac{2E}{\hbar c}, \quad (5.57b)$$

e quindi, sostituendo nella (5.56), si ha

$$E^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{(s + n')^2} \right) = (m c^2)^2,$$

n'	j	κ	ℓ	n	notazione spettroscopica
0	1/2	-1	0	1	$1S_{1/2}$
0	3/2	-2	1	2	$2P_{3/2}$
0	5/2	-3	2	3	$3D_{5/2}$
1	1/2	-1	0	2	$2S_{1/2}$
1	1/2	+1	1	2	$2P_{1/2}$
1	3/2	-2	1	3	$3P_{3/2}$
1	3/2	+2	2	3	$3D_{3/2}$
2	1/2	-1	0	3	$3S_{1/2}$
2	1/2	+1	1	3	$3P_{1/2}$

} degeneri
 } degeneri
 } degeneri

Tabella 5.1: Livelli di energia.

ossia

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n' + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}\right)^2}}}. \quad (5.58)$$

I valori di E dipendono solo dai numeri quantici n' e $|\kappa| = j + 1/2$; si ha quindi una degenerazione di ordine 2 dovuta ai due segni di $\kappa = \pm (j + 1/2)$, che comportano due diversi valori di ℓ_χ :

$$\begin{aligned} \kappa = + (j + 1/2) &\implies \ell_\chi = j + 1/2, \\ \kappa = - (j + 1/2) &\implies \ell_\chi = j - 1/2. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Notare che, se $n' = 0$ si ha solo $\kappa < 0$; infatti, dalla (5.47b) e dalla (5.55), per $n' = 0$ si ha

$$\left. \begin{aligned} (s + \kappa) b_0 &= \gamma a_0, \\ a_0 &= -\sqrt{\frac{z_2}{z_1}} b_0, \end{aligned} \right\} \implies s + \kappa = -\sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \gamma. \quad (5.60)$$

Essendo $s > 0$, deve essere $\kappa < 0$.

I livelli vengono abitualmente contraddistinti dalla notazione spettroscopica che fa uso dei numeri quantici n , ℓ_χ , j , dove n (numero quantico principale) è definito come

$$n = n' + |\kappa| = n' + \left(j + \frac{1}{2}\right). \quad (5.61)$$

I livelli di energia più bassa sono elencati nella Tabella 5.1 (con $\ell = \ell_\chi$).

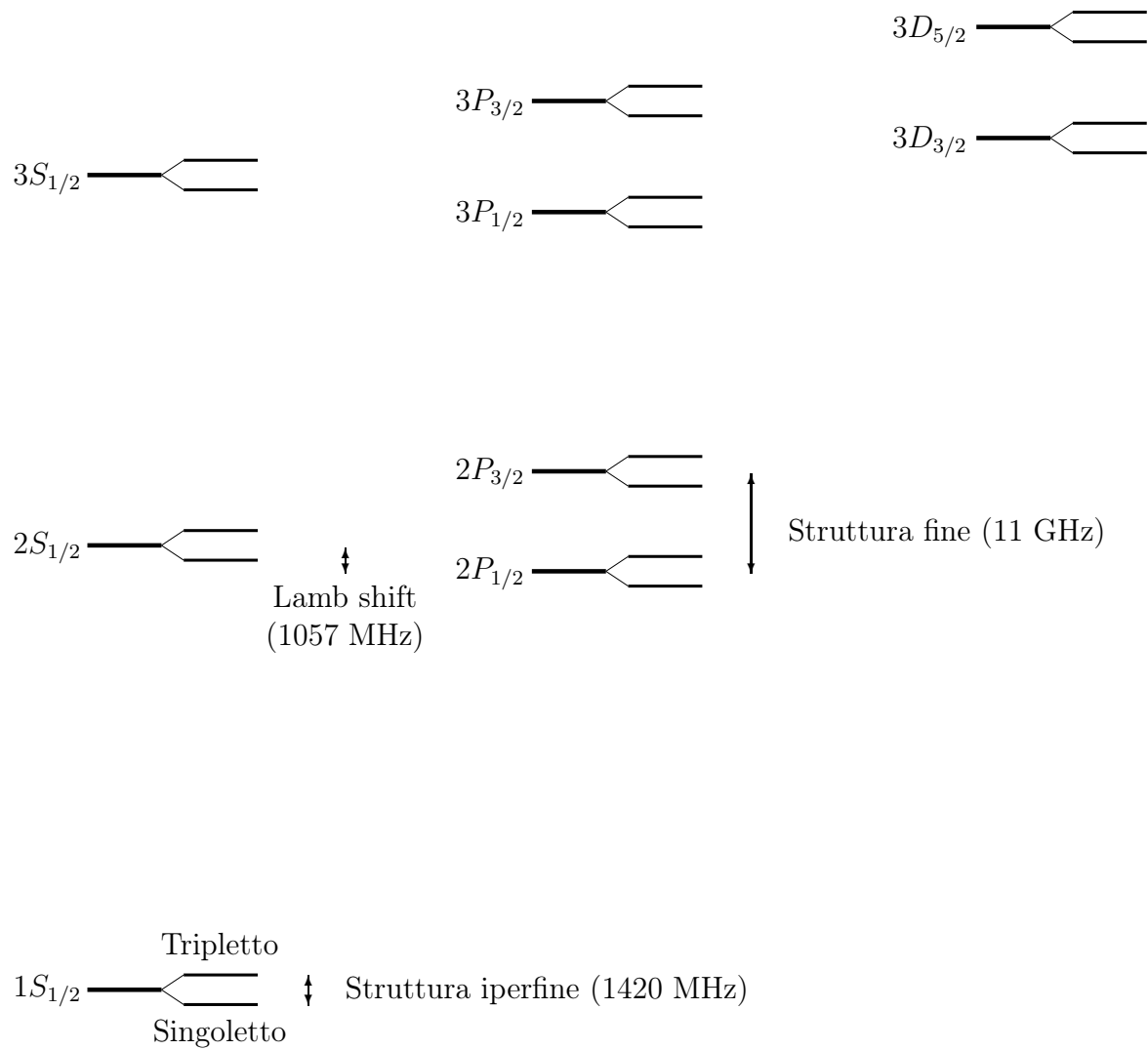


Figura 5.1: Livelli energetici più bassi dell'atomo di idrogeno.

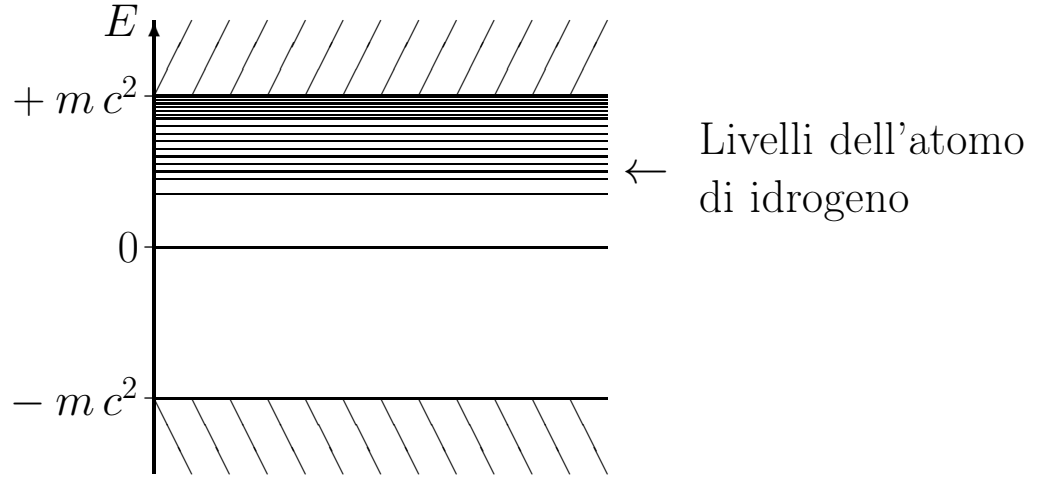


Figura 5.2: Banda energetica dell'atomo di idrogeno.

Sviluppando la (5.58) in serie nel parametro α^2 si trova

$$E = mc^2 \left[1 - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(Z\alpha)^2}{n^2}}_{\text{Balmer}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(Z\alpha)^4}{n^3} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right)}_{\text{termine di struttura fine}} + O(\alpha^6) \right]. \quad (5.62)$$

Lo schema dei livelli energetici più bassi dell'atomo di idrogeno è illustrato in Fig.5.1. Lo spettro completo è comunque confinato nella banda energetica $0 \leq E \leq mc^2$ di Fig.5.2.

► Struttura fine

Il termine di ordine α^4 nell'espressione (5.62) rappresenta la cosiddetta separazione di struttura fine: a parità di n , sono più bassi nella scala energetica gli stati con j minore. Questo termine rimuove in parte la degenerazione dello spettro non-relativistico per gli atomi idrogenoidi.

L'entità della separazione tra stati con uguale n e diverso j , per $Z = 1$, è data da

$$\begin{aligned} \Delta E &= mc^2 \frac{1}{2} \frac{\alpha^4}{n^3} \left(\frac{1}{j_{\min} + 1/2} - \frac{1}{j_{\max} + 1/2} \right) \\ &= mc^2 \frac{1}{2} \frac{\alpha^4}{n^3} \frac{j_{\max} - j_{\min}}{(j_{\min} + 1/2)(j_{\max} + 1/2)}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \Delta E(2P) &\equiv E(2P_{3/2}) - E(2P_{1/2}) = \frac{\alpha^4}{2^5} mc^2 \\ &= 8.87 \times 10^{-11} mc^2 = 4.53 \times 10^{-5} \text{ eV}, \end{aligned} \quad (5.64a)$$

$$\nu(2P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\Delta E}{2\pi \times 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV sec}} = 11 \text{ GHz}. \quad (5.64b)$$

► Struttura iperfine

Nella trattazione degli atomi idrogenoidi precedentemente adottata, l'interazione tra il nucleo e l'elettrone è stata semplicemente descritta mediante il potenziale coulombiano $V = -\frac{Ze^2}{4\pi r}$. È stata in particolare trascurata l'interazione magnetica tra il momento di dipolo magnetico del nucleo e quello dell'elettrone. Introduciamo ora questo termine di accoppiamento nel caso dell'atomo di idrogeno. Si può dimostrare che l'hamiltoniana di interazione è²

$$H^{\text{hf}} = -\frac{2}{3} \vec{\mu}_e \cdot \vec{\mu}_p |\psi_n(0)|^2, \quad (5.65)$$

dove $\psi_n(0)$ è la funzione d'onda dell'elettrone nell'origine, $\vec{\mu}_e$ è il momento di dipolo magnetico dell'elettrone (vedi la formula (4.50)) e $\vec{\mu}_p$ è il momento di dipolo magnetico del protone

$$\vec{\mu}_p = (1 + a_p) \frac{|e| \hbar}{2 m_p c} \vec{\sigma}_p. \quad (5.66)$$

m_p è la massa del protone e $a_p = 1.79$ è il momento anormale di dipolo magnetico del protone in unità di magnetoni nucleari; un magnetone nucleare μ_N è dato da

$$\mu_N \equiv \frac{|e| \hbar}{2 m_p c} = 3.15 \times 10^{-18} \text{ MeV gauss}^{-1}. \quad (5.67)$$

Per la funzione d'onda ψ_n possiamo utilizzare l'espressione non-relativistica, e quindi

$$|\psi_n(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3 n^3}, \quad \text{dove} \quad a_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m c} \quad \text{è il raggio di Bohr.} \quad (5.68)$$

Perciò otteniamo

$$H^{\text{hf}} = \frac{2}{3} (1 + a_p) \frac{1}{n^3} \frac{m}{m_p} m c^2 \alpha^4 \vec{\sigma}_e \cdot \vec{\sigma}_p. \quad (5.69)$$

Tenendo conto che

$$\vec{\sigma}_e \cdot \vec{\sigma}_p = \begin{cases} 1 & \text{tripletto,} \\ -3 & \text{singoletto,} \end{cases} \quad (5.70)$$

si ha

$$\begin{aligned} \Delta E_{n=1}^{\text{hf}}(\text{trip-sing}) &= \frac{8}{3} (1 + a_p) \frac{m}{m_p} m c^2 \alpha^4 \\ &= 5.88 \times 10^{-6} \text{ eV}, \end{aligned} \quad (5.71a)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\Delta E}{2\pi \times 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV sec}} \frac{\text{GHz}}{10^9 \text{ sec}^{-1}} = 1.42 \text{ GHz}. \quad (5.71b)$$

Notare il fattore di riduzione m/m_p (parzialmente compensato da coefficienti numerici) rispetto al termine di struttura fine.

► Lamb shift

La degenerazione prevista dalla teoria di Dirac tra gli stati di uguale n e uguale j non si verifica in natura. L'effetto di eliminazione della degenerazione, detto *Lamb shift*, può essere calcolato accuratamente nell'ambito della elettrodinamica quantistica (vedi Parte Seconda).

²Per la dimostrazione di questa formula vedi Sakurai, pag.130.

Capitolo 6

Coniugazione di carica

6.1 Mare di Dirac

Un atomo in uno stato eccitato transisce allo stato fondamentale emettendo radiazione. In presenza del continuo di stati ad energia negativa con valori compresi tra $-mc^2$ e $-\infty$, un elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno con energia $mc^2 - E_{\text{leg}}$ potrebbe transire indefinitamente a stati di energia inferiore. Perciò, nel 1930 Dirac formulò la seguente ipotesi: *tutti gli stati ad energia negativa sono occupati*, per cui la stabilità dell'atomo è garantita dal principio di Pauli. Il sistema fisico costituito dall'occupazione completa di tutti gli stati di particella singola ad energia negativa viene chiamato *mare di Dirac*. Nella scala di energia finora adottata, il mare di Dirac ha un'energia infinita negativa. Possiamo però interpretare il mare di Dirac come *stato di vuoto* e ridefinire la scala di energia, associando a questo stato di vuoto il valore di zero.

Consideriamo ora lo stato fisico che si ottiene sottraendo dal mare di Dirac un elettrone di energia $-\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} > 0$), ossia creando una lacuna nel mare di Dirac, e calcoliamone l'energia. Nella consueta scala di energia si ha

$$E = E_{\text{vuoto}} - (-\mathcal{E}) = E_{\text{vuoto}} + \mathcal{E}, \quad (6.1)$$

dove E_{vuoto} è l'energia associata al mare di Dirac. La ridefinizione della scala di energia equivale ad associare allo stato del mare di Dirac con una lacuna il valore di energia (osservata)

$$E_{\text{oss}} = E - E_{\text{vuoto}} = \mathcal{E}. \quad (6.2)$$

Procedendo in modo analogo per la carica, si ha

$$Q = Q_{\text{vuoto}} - e = Q_{\text{vuoto}} + |e|, \quad (6.3)$$

$$Q_{\text{oss}} = Q - Q_{\text{vuoto}} = |e|. \quad (6.4)$$

Quindi lo stato (ad infinite particelle) costituito dal mare di Dirac con una lacuna di elettrone nel livello energetico $-\mathcal{E}$ può essere interpretato come stato di particella (denominata *positrone*) in un livello energetico $\mathcal{E}$ e con carica $-e = |e|$. La massa del positrone dev'essere uguale a quella dell'elettrone. Il positrone viene anche chiamato *antiparticella* dell'elettrone oppure sua *coniugata di carica*. Particelle con le proprietà del positrone vennero scoperte nei raggi cosmici da Carl Anderson nel 1932.

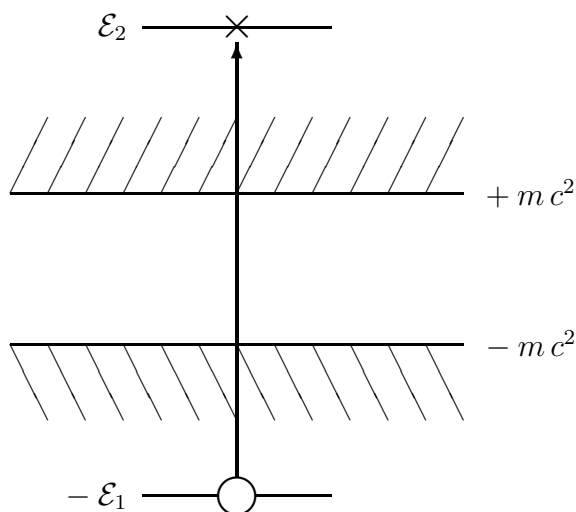


Figura 6.1: Transizione di un elettrone da uno stato di energia negativa ad uno stato di energia positiva

La rimozione di un elettrone da uno stato di energia negativa $-\mathcal{E}_1$ del mare di Dirac ad uno stato di energia positiva $\mathcal{E}_2$ può avvenire per esempio ad opera di un fotone di energia $E = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1$ (vedi Fig.6.1).

Secondo quanto visto precedentemente possiamo descrivere questo processo dicendo che il fotone ha creato una coppia elettrone-positrone con energie (positive) $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1$ rispettivamente, ossia schematicamente

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+. \quad (6.5)$$

La conservazione dell'energia-momento impedisce che questo processo, con le tre particelle tutte sul loro shell di massa, si realizzi nello spazio libero. La creazione di coppie (6.5) può però avvenire per esempio nel campo coulombiano di un nucleo; in questo caso uno dei due leptoni viene creato come particella virtuale (ossia fuori dallo shell di massa) e diviene elettrone fisico a seguito dell'interazione con il campo coulombiano.

È possibile anche avere il processo inverso del processo (6.5), ossia il processo di annichilazione

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow \dots, \quad (6.6)$$

o anche

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma. \quad (6.7)$$

Queste reazioni vengono per esempio prodotte ai collisionatori elettrone-positrone e saranno illustrate nella Parte Seconda.

► Polarizzazione del vuoto

Secondo quanto visto precedentemente un fotone è soggetto a processi del tipo descritto in Fig.6.2, nei quali una coppia e^+e^- , creata in modo virtuale dal fotone, si annichila rigenerando il fotone stesso. Ciò implica che l'interazione protone-elettrone (mediata da fotoni) nell'atomo di idrogeno risenta della presenza delle coppie virtuali e^+e^- dovute ai processi di Fig.6.2. È come se l'interazione $p-e^-$ anziché avvenire nel vuoto, avesse

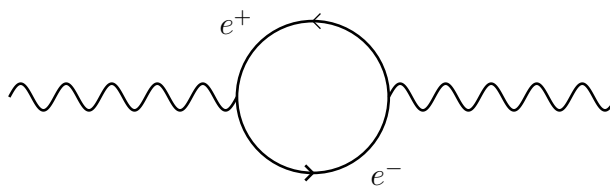


Figura 6.2: Creazione di una coppia virtuale e^+e^- .

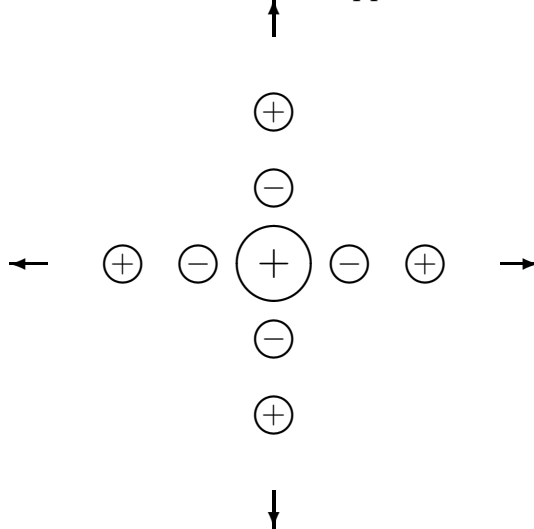


Figura 6.3: Polarizzazione del vuoto

luogo in un mezzo polarizzabile: la carica positiva del protone respinge i positroni virtuali ed attira gli elettroni virtuali (vedi Fig.6.3). Si genera quindi un effetto di parziale schermatura della carica vera (*nuda*) del protone da parte degli elettroni virtuali. L'elettrone dell'atomo di idrogeno risente di questo effetto di schermatura della carica nuda del protone in maggiore o in minore misura a seconda dell'orbita quantistica su cui si trova: la carica elettrica del nucleo vista dall'elettrone è più grande a piccole distanze (orbite interne), che non a grandi distanze (orbite esterne), e gli stati S si abbassano per questo effetto. La polarizzazione del vuoto induce per esempio una separazione $E(2P_{1/2}) - E(2S_{1/2}) = 27 \text{ MHz}$ tra i livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$. Quest'effetto, calcolato da Uehling nel 1935, elimina quindi la degenerazione tipica dello spettro dell'atomo di idrogeno in teoria di Dirac. Tuttavia, come si vedrà in elettrodinamica quantistica, altri effetti oltre a quello della polarizzazione del vuoto contribuiscono (in maniera più rilevante e con segno opposto) al Lamb shift.

6.2 Coniugazione di carica

Secondo la teoria di Dirac, elettroni e positroni (che hanno massa uguale e carica elettrica opposta) devono soddisfare allo stesso tipo di equazione del moto. Per l'elettrone vale

l'equazione

$$(i \not{\partial} - e \not{A} - m) \psi(x) = 0. \quad (6.8)$$

Quindi per il positrone deve valere l'equazione

$$(i \not{\partial} + e \not{A} - m) \psi^c(x) = 0. \quad (6.9)$$

Per determinare la funzione $\psi^c(x)$ prendiamo l'equazione aggiunta della (6.8),

$$-i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - e \bar{\psi} \not{A} - m \bar{\psi} = 0,$$

e trasponiamo,

$$-i \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \tilde{\bar{\psi}} - e \tilde{\gamma}^\mu A_\mu \tilde{\bar{\psi}} - m \tilde{\bar{\psi}} = 0.$$

Se introduciamo una matrice $\mathcal{C}$ tale che

$$\mathcal{C} \tilde{\gamma}^\mu \mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu, \quad (6.10)$$

otteniamo

$$(i \not{\partial} + e \not{A} - m) \mathcal{C} \tilde{\bar{\psi}}(x) = 0. \quad (6.11)$$

Confrontando questa equazione con la (6.9) deduciamo che il positrone è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi^c(x) = \eta_c \mathcal{C} \tilde{\bar{\psi}}(x), \quad (6.12)$$

dove η_c è un fattore di fase ($|\eta_c| = 1$) costante che dipende dalla natura della particella. Nella rappresentazione di Dirac si ha

$$\mathcal{C} = i \gamma^2 \gamma^0 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Esempio: un elettrone in uno stato con energia negativa e spin in su è descritto (nel sistema di riposo) dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Poichè

$$\tilde{\bar{\psi}} = \tilde{\gamma}^0 \psi^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ha

$$\psi^c = -i \eta_c e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\eta_c e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Quindi, in questo caso, ψ^c descrive una particella (di carica $|e|$) con energia positiva e spin in giù.

► Parità relativa particella–antiparticella

Particella e antiparticella hanno parità intrinseche opposte. Infatti, nel sistema di riposo, si ha

- per energie positive

$$\psi_+^{(r)}(x) = e^{-imt} \begin{pmatrix} \chi^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

con

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (6.17)$$

- per energie negative

$$\psi_-^{(r)}(x) = e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(r)} \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Per riflessioni spaziali

$$\psi \xrightarrow{P} \psi' = \gamma^0 \psi \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \psi_+^{(r)}(x) \xrightarrow{P} +\psi_+^{(r)}(x), \\ \psi_-^{(r)}(x) \xrightarrow{P} -\psi_-^{(r)}(x). \end{cases} \quad (6.19)$$

Per la corrispondenza discussa precedentemente tra lacune in stati di energie negative ed antiparticelle in stati di energie positive discende che elettrone e positrone hanno parità intrinseche opposte.

Le proprietà viste in questo capitolo indicano che una teoria quantistica ad una sola particella non può essere una teoria consistente, come indicato per esempio dagli effetti virtuali di creazione e di annichilazione di particelle. Il formalismo adeguato per trattare in modo sistematico i processi fisici dell'elettrodinamica è quello della teoria dei campi, con l'introduzione di campi quantizzati che creano e distruggono particelle e antiparticelle. Questi aspetti saranno discussi nella Parte Seconda.

Capitolo 7

Funzioni di Green

7.1 Funzione di Green per l'equazione di Dirac

L'equazione di Dirac in presenza di un campo elettromagnetico

$$(i \not{\partial} - m) \psi(x) = e \not{A}(x) \psi(x) \quad (7.1)$$

può essere risolta mediante un metodo generale basato sull'uso della funzione di Green. Ossia la soluzione dell'equazione (7.1) può essere scritta come

$$\boxed{\psi(x) = \psi_0(x) + \int d^4x' K(x - x') e \not{A}(x') \psi(x')}, \quad (7.2)$$

dove la $\psi_0(x)$ è soluzione dell'equazione di Dirac libera e la funzione di Green $K(x - x')$, avente la struttura di una matrice 4×4 , è definita dall'equazione

$$\boxed{(i \not{\partial} - m) K(x - x') = \delta^4(x - x')}. \quad (7.3)$$

Questa proprietà può essere immediatamente verificata applicando l'operatore $i \not{\partial} - m$ ai due membri della (7.2).

La (7.2) è un'equazione integrale, che può essere risolta mediante metodo iterativo:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_0(x) + \int d^4x' K(x - x') e \not{A}(x') \left[\psi_0(x') + \int d^4x'' K(x' - x'') e \not{A}(x'') [\psi_0(x'') + \dots] \right] \\ &= \psi_0(x) + \int d^4x' K(x - x') e \not{A}(x') \psi_0(x') \\ &\quad + \int d^4x' d^4x'' K(x - x') e \not{A}(x') K(x' - x'') e \not{A}(x'') \psi_0(x'') + \dots \end{aligned} \quad (7.4)$$

Quest'espressione costituisce una utile formula risolutiva sotto forma di serie, una volta che la funzione di Green $K(x - x')$ sia stata calcolata.

► Rappresentazione integrale di $K(x - x')$

Determiniamo ora $K(x - x')$ sostituendo la sua trasformata di Fourier quadri-dimensionale

$$K(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p K(p) e^{-ip \cdot (x - x')} \quad (7.5)$$

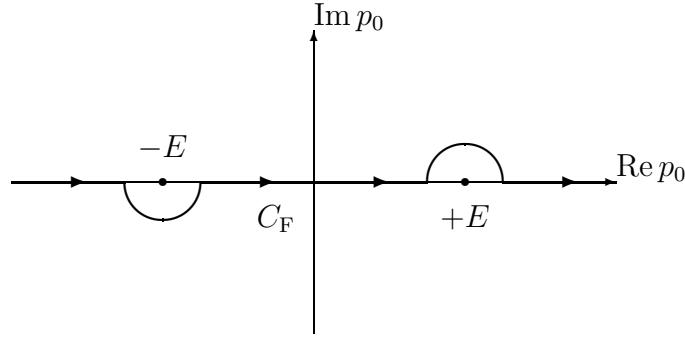


Figura 7.1: Il cammino di integrazione C_F di Feynman.

nell'Eq.(7.3). Il primo membro dell'Eq.(7.3) diventa

$$(i \not{\partial} - m) K(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p (\not{p} - m) K(p) e^{-ip \cdot (x - x')} .$$

Il secondo membro dell'Eq.(7.3) si può scrivere come

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x - x')} . \quad (7.6)$$

Uguagliando i due membri, si ha

$$(\not{p} - m) K(p) = \mathbb{1} , \quad (7.7)$$

e quindi

$$K(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} , \quad (7.8)$$

in quanto $(\not{p} + m)(\not{p} - m) = p^2 - m^2$. Si ottiene perciò

$$\boxed{K(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x')} .} \quad (7.9)$$

La funzione $K(p)$ ha due punti di singolarità che sono dati da

$$p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0 . \quad (7.10)$$

Nella variabile p_0 i due poli semplici sono localizzati nei punti

$$p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \equiv \pm E . \quad (7.11)$$

che si trovano nell'intervallo di integrazione della (7.9). Diamo ora una prescrizione sul modo di evitare queste singolarità. Rendiamo complessa la variabile p_0 ed esaminiamo le proprietà analitiche dell'integrale della (7.9) nel piano complesso della p_0 (vedi Fig.7.1). Prescrivere il modo di evitare le singolarità della funzione $K(p)$ equivale a definire univocamente la funzione $K(x - x')$ mediante delle condizioni al contorno.

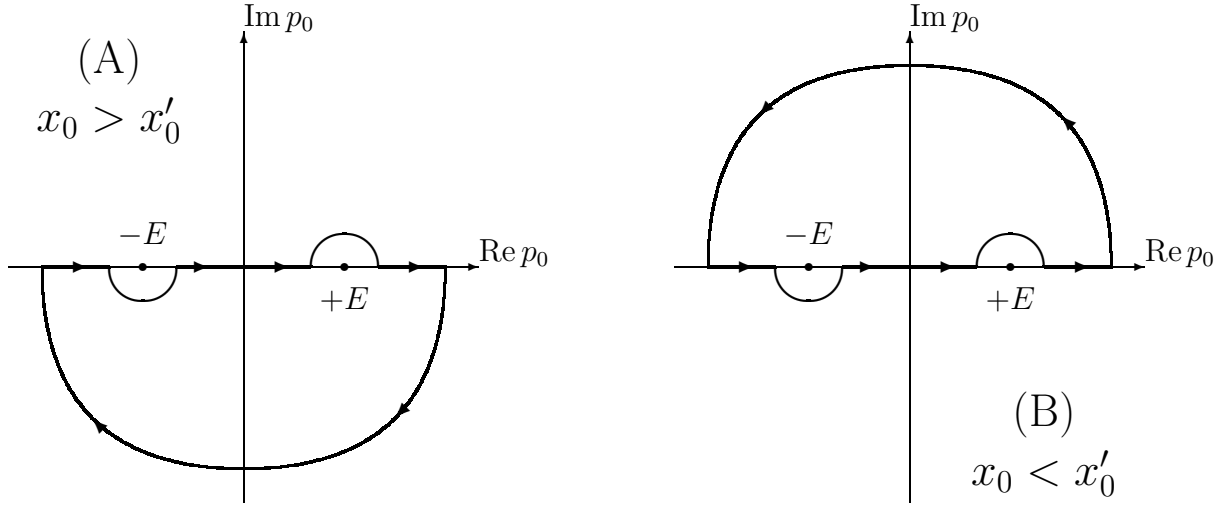


Figura 7.2: Chiusura del cammino di integrazione di Feynman.

Per aggirare le singolarità polari abbiamo complessivamente quattro possibilità, perchè le deformazioni del cammino di integrazione nei due poli possono essere verso il basso o verso l'alto. Noi scegliamo la prescrizione di Feynman, secondo la quale la deformazione del cammino avviene secondo quanto indicato in Fig.7.1. Indichiamo con C_F il cammino così definito.

L'integrazione sulla variabile p_0 viene eseguita nel piano complesso, chiudendo il cammino di integrazione all'infinito e applicando il teorema di Cauchy:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_n \lim_{z \rightarrow a_n} ((z - a_n) f(z)), \quad (7.12)$$

dove i punti $z = a_n$ sono i poli (semplici) di $f(z)$ e l'integrale sulla curva C viene percorso in senso antiorario. La convergenza dell'integrale di Eq.(7.9) dipende dal fattore

$$e^{-ip_0(x_0 - x'_0)} = e^{-i(x_0 - x'_0) \text{Re}(p_0)} e^{(x_0 - x'_0) \text{Im}(p_0)} \quad (7.13)$$

e quindi occorrerà (vedi Fig.7.2):

(A) per $x_0 > x'_0$, chiudere il cammino di integrazione inferiormente;

(B) per $x_0 < x'_0$, chiudere il cammino di integrazione superiormente.

Applicando il teorema di Cauchy alla funzione di Green K_F (alla Feynman)

$$K_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x')}, \quad (7.14)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} K_F(x - x') &= -2\pi i \theta(x_0 - x'_0) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p \lim_{p_0 \rightarrow E} \left[(p_0 - E) \frac{\not{p} + m}{(p_0 - E)(p_0 + E)} e^{-ip \cdot (x - x')} \right] \\ &\quad + 2\pi i \theta(x'_0 - x_0) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p \lim_{p_0 \rightarrow -E} \left[(p_0 + E) \frac{\not{p} + m}{(p_0 + E)(p_0 - E)} e^{-ip \cdot (x - x')} \right] \\ &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left\{ \theta(x_0 - x'_0) (\not{p} + m) e^{-ip \cdot (x - x')} - \theta(x'_0 - x_0) (\not{p} - m) e^{ip \cdot (x - x')} \right\}_{p_0=E}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

È ovvio che la prescrizione di Feynman può essere riformulata dicendo che, mantenendo il cammino di integrazione sulla variabile p_0 lungo l'asse reale, le posizioni delle singolarità polari vengono traslate di una quantità immaginaria infinitesima di segno appropriato, ossia: $-E \rightarrow -E + i\epsilon$, $+E \rightarrow +E - i\epsilon$. Quindi la (7.14) può anche essere riscritta come

$$K_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - x')}, \quad (7.16)$$

con ϵ infinitesimo, poichè

$$(p_0 + E - i\epsilon)(p_0 - E + i\epsilon) = p^2 - m^2 + i\epsilon. \quad (7.17)$$

Vedremo in seguito che nel contesto dell'elettrodinamica quantistica il corrispettivo della funzione di Green è il propagatore dell'elettrone.

7.2 Funzione di Green per l'equazione di Klein-Gordon

Schematizziamo ora le proprietà della funzione di Green (alla Feynman) per una particella scalare. Consideriamo l'equazione di Klein-Gordon in presenza di una corrente $j(x)$:

$$(\square + m^2) \varphi(x) = j(x). \quad (7.18)$$

La soluzione può essere scritta come

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \int d^4x' G(x - x') j(x'), \quad (7.19)$$

avendo definito la funzione di Green $G(x - x')$ mediante l'equazione

$$(\square + m^2) G(x - x') = \delta^4(x - x'). \quad (7.20)$$

Ponendo

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p G(p) e^{-ip \cdot (x - x')}, \quad (7.21)$$

si ha

$$(\square + m^2) G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (-p^2 + m^2) G(p) e^{-ip \cdot (x - x')}.$$

Sostituendo nella (7.20) quest'espressione e la rappresentazione integrale (7.6) della $\delta^4(x - x')$, si ottiene

$$G(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (7.22)$$

In analogia a quanto si è visto precedentemente, definiamo la funzione di Green (alla Feynman) per l'equazione di Klein-Gordon come

$$G_F(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot x}, \quad (7.23)$$

da cui troviamo anche una interessante relazione tra $G_F(x)$ e $K_F(x)$:

$$(i\not{\partial} + m) G_F(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot x} = -K_F(x). \quad (7.24)$$

Appendice A

Unità naturali

In unità ordinarie le costanti $\hbar$ e c hanno le dimensioni

$$[\hbar] = [E \cdot t] , \quad (\text{A.1})$$

$$[c] = [\ell \cdot t^{-1}] . \quad (\text{A.2})$$

Le unità naturali sono definite dalla condizione

$$\hbar = c = 1 . \quad (\text{A.3})$$

Questa condizione implica quindi che, in unità naturali, valgano le seguenti relazioni dimensionali:

$$[E] = [t^{-1}] = [\ell^{-1}] . \quad (\text{A.4})$$

Inoltre, dalla relazione relativistica energia-impulso, scritta in unità naturali,

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (\text{A.5})$$

si ricava che

$$[E] = [|\vec{p}|] = [m] . \quad (\text{A.6})$$

Per la conversione numerica tra le diverse grandezze in unità naturali è utile usare la formula

$$\hbar c = 197 \text{ Mev} \cdot \text{fm} , \quad (\text{A.7})$$

che, in unità naturali, si riduce a

$$197 \text{ Mev} \cdot \text{fm} = 1 . \quad (\text{A.8})$$

Appendice B

Quadri-vettori – metrica

Consideriamo uno spazio vettoriale a 4 dimensioni. Gli elementi di questo spazio vettoriale si chiamano quadri-vettori. Il quadri-vettore v ha componenti controvarianti $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$, dove v^0 è la componente temporale e v^1, v^2, v^3 sono le componenti spaziali¹, le quali si trasformano come le componenti di un tri-vettore euclideo $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ per rotazioni spaziali. Le componenti covarianti $v_\mu = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ del quadri-vettore v sono legate alle componenti controvarianti dalla relazione

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu, \quad (\text{B.1})$$

dove g è il tensore metrico, con componenti covarianti $g_{\mu\nu}$ date da

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Perciò, le componenti covarianti e controvarianti del quadri-vettore v sono legate dalle relazioni

$$v_0 = v^0, \quad v_k = -v^k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (\text{B.3})$$

Le componenti controvarianti ($g^{\mu\nu}$) del tensore metrico sono date dalla relazione

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = g^\mu_\nu, \quad (\text{B.4})$$

con

$$g^\mu_\nu \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

¹Per gli indici quadri-dimensionali, che vanno da 0 a 3, usiamo lettere greche $\mu, \nu, \rho, \dots$, mentre gli indici tri-dimensionali, che vanno da 1 a 3, usiamo lettere romane $k, i, j, \dots$. Usiamo anche la notazione secondo la quale quando un indice è ripetuto in uno stesso termine è implicita la somma sui suoi valori. Ad esempio

$$u^\mu v_\mu = u^0 v_0 + u^1 v_1 + u^2 v_2 + u^3 v_3.$$

Perciò

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{B.6})$$

Il prodotto scalare tra due quadri-vettori u, v è dato da

$$u \cdot v = u_\mu v^\mu = u^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = g^{\mu\nu} u_\mu v_\nu = u^0 v^0 - \vec{u} \cdot \vec{v} . \quad (\text{B.7})$$

I quadri-vettori si dividono in tre gruppi, a seconda del segno della loro norma $v^2 \equiv v \cdot v$,

$$v^2 > 0 \quad \text{quadri-vettori di tipo tempo} \quad (\text{B.8a})$$

$$v^2 = 0 \quad \text{quadri-vettori di tipo luce} \quad (\text{B.8b})$$

$$v^2 < 0 \quad \text{quadri-vettori di tipo spazio} \quad (\text{B.8c})$$

Una trasformazione di Lorentz $L(\Lambda)$ agisce sui quadri-vettori trasformando un quadri-vettore v in un quadri-vettore v'

$$v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu , \quad (\text{B.9})$$

in modo da mantenere invariante la norma dei quadri-vettori:

$$v'^2 = v^2 \quad \Longleftrightarrow \quad g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta v^\alpha v^\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta . \quad (\text{B.10})$$

Ciò implica che le matrici $\Lambda^\mu{}_\nu$ devono soddisfare alla relazione

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} . \quad (\text{B.11})$$

La trasformazione inversa della (B.9) è

$$v^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu v'^\mu , \quad (\text{B.12})$$

come si verifica immediatamente utilizzando la (B.11).

Appendice C

Tracce di prodotti di matrici γ

Proprietà fondamentali:

1. La traccia del prodotto di un numero dispari di matrici γ è nulla. Infatti

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) &= \mathrm{Tr}\left((\gamma^5)^2 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\right) = \mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5) \\ &= (-1)^n \mathrm{Tr}\left((\gamma^5)^2 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\right) = (-1)^n \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) ,\end{aligned}\tag{C.1}$$

dove γ^5 è stato prima permutato circolarmente e poi commutato con le γ^{μ_k} . In particolare, si ha

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = 0 ,\tag{C.2}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^5) = 0 .\tag{C.3}$$

2. Se il numero n di matrici γ è pari, il numero di fattori può essere progressivamente scalato di 2 utilizzando le proprietà di anticommutazione. Per esempio,

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = g^{\mu\nu} \mathrm{Tr}(\mathbb{1}) = 4 g^{\mu\nu} .\tag{C.4}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu} \mathrm{Tr}(\gamma^\rho \gamma^\sigma) - g^{\mu\rho} \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\sigma) + g^{\mu\sigma} \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) .\end{aligned}\tag{C.5}$$

La formula generale per ridurre la traccia di un prodotto di n matrici γ , con n pari, alla somma di tracce di prodotti di $n - 2$ matrici γ è data da

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n}) &= g^{\mu_1 \mu_2} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}] - g^{\mu_1 \mu_3} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}] + \dots \\ &\dots + g^{\mu_1 \mu_n} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{n-1}}] .\end{aligned}\tag{C.6}$$

Notare alcuni casi particolari:

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5) = 0 ,\tag{C.7}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0 .\tag{C.8}$$

Infatti

$$\text{Tr}((\gamma^\mu)^2 \gamma^5) = -\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\mu) = -\text{Tr}((\gamma^\mu)^2 \gamma^5)$$

e da $(\gamma^\mu)^2 \pm \mathbb{1}$ segue che $\text{Tr}(\gamma^5) = -\text{Tr}(\gamma^5) = 0$. La (C.8) può essere verificata usando la definizione (1.40) della matrice γ^5 :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= -i \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \\ &= -\frac{i}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) - \frac{i}{2} \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu) \\ &= -i g^{\mu 3} \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2) + i g^{\mu 2} \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3) - i g^{\mu 1} \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3) \\ &\quad + i g^{\mu 0} \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) - i g^{\mu \nu} \text{Tr}(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Il prodotto di matrici γ di ordine più basso contenente la γ^5 con traccia non nulla è $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5$:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = 4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} , \quad (\text{C.9})$$

dove $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è il tensore di rango 4 completamente antisimmetrico con $\epsilon^{0123} = +1$. Infatti, la traccia (C.9) è antisimmetrica per tutte le permutazioni dispari degli indici μ, ν, ρ, σ e si ha inoltre

$$\text{Tr}(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^5) = i \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^5) = 4i = 4i \epsilon^{0123} .$$

In base alle proprietà precedenti si ritrova che tutte le matrici Γ^a hanno traccia nulla, eccetto la matrice identità $\Gamma^1 \equiv \mathbb{1}$.

Per i prodotti di un numero n pari di matrici γ vale la proprietà

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{n-1}} \gamma^{\mu_n}) = \text{Tr}(\gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_{n-1}} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}) . \quad (\text{C.10})$$

Infatti, inserendo tra tutte le coppie di matrici γ l'identità nella forma $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C} = \mathbb{1}$, dove $\mathcal{C}$ è la matrice di coniugazione di carica tale che $\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} = -\tilde{\gamma}^\mu$, poichè n è pari si ha

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{n-1}} \gamma^{\mu_n}) &= \text{Tr}(\mathcal{C} \gamma^{\mu_1} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^{\mu_2} \mathcal{C}^{-1} \dots \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^{\mu_{n-1}} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \gamma^{\mu_n} \mathcal{C}^{-1}) \\ &= (-1)^n \text{Tr}(\tilde{\gamma}^{\mu_1} \tilde{\gamma}^{\mu_2} \dots \tilde{\gamma}^{\mu_{n-1}} \tilde{\gamma}^{\mu_n}) = \text{Tr}([\gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_{n-1}} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}]^T) \\ &= \text{Tr}(\gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_{n-1}} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}) . \end{aligned}$$

Appendice D

Rappresentazioni delle matrici γ

D.1 Proprietà generali

Le matrici γ sono definite dalla relazione di anticommutazione

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}}, \quad (\text{D.1})$$

e dalla condizione

$$\boxed{\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu}. \quad (\text{D.2})$$

Una scelta specifica delle matrici che soddisfano alla (D.1) viene chiamata *rappresentazione delle matrici γ* .

Date due rappresentazioni γ^μ e γ'^μ di dimensione 4×4 , esiste una matrice S non-singolare (cioè tale che esiste la matrice inversa S^{-1}) che connette le due rappresentazioni tramite la relazione di equivalenza

$$\boxed{\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}}. \quad (\text{D.3})$$

Inoltre, S è definita univocamente a meno di una costante moltiplicativa arbitraria. Questo è il teorema fondamentale di Pauli sulle rappresentazioni delle matrici γ .

In questa Appendice considereremo le tre rappresentazioni maggiormente utilizzate: la rappresentazione di Dirac, quella di Majorana e quella chirale.

D.1.1 Rappresentazione di Dirac

Questa rappresentazione viene anche chiamata *rappresentazione standard* ed è utile per discutere il limite non-relativistico dell'equazione di Dirac.

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

$$\gamma_D^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_D^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.5})$$

$$\mathcal{C}_D = i \gamma_D^2 \gamma_D^0 = -i \alpha_D^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.6})$$

$$\sigma_D^{0k} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_D^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

$$\gamma_D^0 \gamma_D^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^k \gamma_D^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

D.1.2 Rappresentazione di Majorana

Questa rappresentazione rende reale l'equazione di Dirac scambiando tra loro α_D^2 (l'unica matrice complessa nella rappresentazione di Dirac) e β_D . Infatti l'equazione di Dirac in forma hamiltoniana può essere scritta come

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i \beta m \right) \psi = 0, \quad (\text{D.9})$$

da cui si vede che l'equazione di Dirac è reale se le α^k sono reali e β è immaginaria.

Le trasformazioni $\alpha_D^2 \rightarrow \beta_M$ e $\beta_D \rightarrow \alpha_M^2$ sono realizzate dalla trasformazione di equivalenza

$$\gamma_M^\mu = S_M \gamma_D^\mu S_M^{-1} \quad (\text{D.10})$$

con

$$S_M = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_D + \alpha_D^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_D^0 + \gamma_D^0 \gamma_D^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.11})$$

Utilizzando la (D.11) si verifica esplicitamente che

$$S_M = S_M^{-1} = S_M^\dagger. \quad (\text{D.12})$$

e che

$$\beta_M = S_M \beta_D S_M^{-1} = \alpha_D^2, \quad (\text{D.13})$$

$$\alpha_M^2 = S_M \alpha_D^2 S_M^{-1} = \beta_D. \quad (\text{D.14})$$

In conclusione, nella rappresentazione di Majorana si ha

$$\gamma_M^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.15})$$

$$\gamma_M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.16})$$

$$\alpha_M^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_M^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.17})$$

$$\alpha_M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.18})$$

$$\mathcal{C}_M = -i \gamma_M^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.19})$$

D.1.3 Rappresentazione chirale

Questa rappresentazione è utile per studiare le proprietà di chiralità (γ^5 è diagonale) e per risolvere l'equazione di Dirac per particelle di massa nulla (quali potrebbero essere i neutrini). La rappresentazione chirale si ottiene dalla rappresentazione di Dirac in modo che $\gamma_C^5 = \gamma_D^0$ e $\gamma_C^0 = -\gamma_D^5$.

La trasformazione di equivalenza dalla rappresentazione di Dirac a quella chirale è data da

$$\gamma_C^\mu = S_C \gamma_D^\mu S_C^{-1}, \quad (\text{D.20})$$

con

$$S_C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} + \gamma_D^0 \gamma_D^5) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.21})$$

Notare che

$$S_C^\dagger = \tilde{S}_C = S_C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} - \gamma_D^0 \gamma_D^5) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.22})$$

Le matrici γ^k nella rappresentazione chirale sono uguali alle corrispondenti matrici nella rappresentazione di Dirac:

$$\gamma_C^k = S_C \gamma_D^k S_C^{-1} = \gamma_D^k. \quad (\text{D.23})$$

La matrice di coniugazione di carica è data da

$$\mathcal{C}_C = S_C \mathcal{C}_D \tilde{S}_C = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.24})$$

In conclusione, nella rappresentazione chirale si ha

$$\gamma_C^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_C^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.25})$$

$$\gamma_C^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_C^k = \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad (\text{D.26})$$

$$\mathcal{C}_C = i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_C^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (\text{D.27})$$

Appendice E

Trasformazioni di forme bilineari per inversione temporale

Per inversione temporale si ha

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') \Gamma^a \psi'(x') &= \tilde{\psi}(x) \tilde{\mathcal{B}}^{-1} \Gamma^a \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\bar{\psi}}(x) = \left[\tilde{\psi}(x) \tilde{\mathcal{B}}^{-1} \Gamma^a \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\bar{\psi}}(x) \right]^T \\ &= \bar{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\Gamma}^a \mathcal{B}^{-1} \psi(x) .\end{aligned}\tag{E.1}$$

Per ottenere le matrici $\mathcal{B} \tilde{\Gamma}^a \mathcal{B}^{-1}$ basta tenere conto delle proprietà (1.124) e delle relazioni da queste ricavabili:

$$\mathcal{B} \tilde{\gamma}^5 \mathcal{B}^{-1} = -\gamma^5 ,\tag{E.2}$$

$$\mathcal{B} (\tilde{\gamma}^5 \tilde{\gamma}^\mu) \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B} \tilde{\gamma}^\mu \mathcal{B}^{-1} \gamma^5 = \begin{cases} +\gamma^0 \gamma^5 & \text{per } \mu = 0 , \\ -\gamma^k \gamma^5 & \text{per } \mu = k . \end{cases} ,\tag{E.3}$$

$$\mathcal{B} \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \mathcal{B}^{-1} = \begin{cases} +\sigma^{\mu\nu} & \text{per } \mu = 0, \nu \neq 0 \\ -\sigma^{\mu\nu} & \text{per } \mu \neq 0, \nu \neq 0 . \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \mu \neq 0, \nu = 0 ,\tag{E.4}$$

Si ha quindi

1. $\Gamma^a = \mathbb{1}$.

$$\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \mathcal{B} \mathcal{B}^{-1} \psi(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x) .\tag{E.5}$$

2. $\Gamma^a = \gamma^\mu$.

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\gamma}^\mu \mathcal{B}^{-1} \psi(x) = \begin{cases} +\bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) & \text{per } \mu = 0 , \\ -\bar{\psi}(x) \gamma^k \psi(x) & \text{per } \mu = k . \end{cases}\tag{E.6}$$

3. $\Gamma^a = \sigma^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') \sigma^{\mu\nu} \psi'(x') &= \bar{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \mathcal{B}^{-1} \psi(x) \\ &= \begin{cases} +\bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) & \text{per } \mu = 0, \nu \neq 0 \\ -\bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) & \text{per } \mu \neq 0, \nu \neq 0 . \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \mu \neq 0, \nu = 0 ,\end{aligned}\tag{E.7}$$

4. $\Gamma^a = \gamma^\mu \gamma^5$.

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^5 \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\gamma}^5 \tilde{\gamma}^\mu \mathcal{B}^{-1} \psi(x) = \begin{cases} +\overline{\psi}(x) \gamma^0 \gamma^5 \psi(x) & \text{per } \mu = 0 , \\ -\overline{\psi}(x) \gamma^k \gamma^5 \psi(x) & \text{per } \mu = k . \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

5. $\Gamma^a = \gamma^5$.

$$\overline{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = \overline{\psi}(x) \mathcal{B} \tilde{\gamma}^5 \mathcal{B}^{-1} \psi(x) = -\overline{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x) . \quad (\text{E.9})$$

Appendice F

Dimostrazione della proprietà

$$\vec{L}^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi = \ell_\chi (\ell_\chi + 1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi$$

Consideriamo gli spinori a due componenti χ e φ definiti nell'eq.(5.23), i quali sono autofunzioni di $\vec{L}^2$ con rispettivi autovalori $\hbar^2 \ell_\chi (\ell_\chi + 1)$ e $\hbar^2 \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1)$ (si vedano le eq.(5.17), (5.18)). In questa appendice dimostriamo che $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi$ è un'autofunzione di $\vec{L}^2$ con autovalore $\hbar^2 \ell_\chi (\ell_\chi + 1)$. Analogamente, si può dimostrare che $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi$ è un'autofunzione di $\vec{L}^2$ con autovalore $\hbar^2 \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1)$.

L'azione dell'operatore $\vec{L}^2$ sulla funzione $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi$ è data da

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \vec{L}^2 \varphi + [\vec{L}^2, \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \varphi \\ &= \hbar^2 \ell_\varphi (\ell_\varphi + 1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi + [\vec{L}^2, \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] \varphi. \end{aligned} \quad (F.1)$$

Calcoliamo il commutatore nella (F.1) utilizzando l'identità $[L^k L^k, p^j] = [L^k, [L^k, p^j]] + 2[L^k, p^j] L^k$ e il commutatore $[L^k, p^j] = \epsilon^{km\ell} [r^m, p^j] p^\ell = i\hbar \sum_\ell \epsilon^{kj\ell} p^\ell$:

$$\begin{aligned} [\vec{L}^2, \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] &= \sum_{k,j} \sigma^j \{ [L^k, [L^k, p^j]] + 2 [L^k, p^j] L^k \} \\ &= \sum_{k,j} \sigma^j \{ -\hbar^2 \epsilon^{kj\ell} \epsilon^{k\ell m} p^m + 2 i \hbar \epsilon^{kj\ell} p^\ell L^k \} \\ &= 2 \hbar^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + 2 i \hbar (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) . \end{aligned} \quad (F.2)$$

L'ultima eguaglianza discende dalle proprietà

$$\sum_{k,\ell} \epsilon^{k\ell j} \epsilon^{k\ell m} = 2 \delta^{jm}, \quad (F.3)$$

$$i \sum_j \sigma^j \epsilon^{j k \ell} = \delta^{k\ell} - \sigma^k \sigma^\ell, \quad (F.4)$$

e da $\vec{p} \cdot \vec{L} = 0$.

Poichè φ è un'autofunzione dell'operatore $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$ con autovalore $-\hbar(1 - \kappa)$ (si veda l'eq.(5.15)), dalla (F.2) si ha

$$\left[\vec{L}^2, \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right] \varphi = 2 \hbar^2 \kappa (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi . \quad (\text{F.5})$$

Infine, utilizzando la relazione $\ell_\varphi(\ell_\varphi + 1) + 2\kappa = \ell_\chi(\ell_\chi + 1)$ (si veda l'eq.(5.19)), dalle (F.1) e (F.5) si ottiene

$$\vec{L}^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi = \ell_\chi (\ell_\chi + 1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi . \quad (\text{F.6})$$

Parte II

Elementi di Elettrodinamica Quantistica

A. Bottino e C. Giunti

Capitolo 1

Quantizzazione del campo elettromagnetico

1.1 Introduzione

Il carattere dualistico del campo elettromagnetico, come campo di radiazione e come insieme dei suoi quanti (fotoni), induce ad introdurre la quantizzazione del campo stesso. Dal momento che il campo elettromagnetico può essere pensato come un insieme di infiniti oscillatori armonici, il metodo più diretto per il processo di quantizzazione consiste nel quantizzare questi oscillatori armonici secondo le regole usuali di quantizzazione della meccanica quantistica (quantizzazione canonica).

In tal modo il campo elettromagnetico quantizzato risulta espresso in termini di operatori di creazione e di annichilazione di fotoni, riferiti ai singoli modi normali del campo. Questo formalismo si rivela di grande interesse, perchè permette di trattare in modo adeguato processi fisici con assorbimento o emissione di fotoni.

Nella fisica delle particelle la descrizione adottata per il campo elettromagnetico e i suoi quanti viene estesa anche ad altri campi, con i loro corrispettivi quanti. Questo è il caso di elettroni-positroni che trovano la loro adeguata descrizione in un campo quantizzato $\psi(x)$, in sostituzione della precedente funzione d'onda spinoriale di Dirac (di particella singola).

In questo capitolo presentiamo la quantizzazione del campo elettromagnetico e nel capitolo 2 estendiamo il metodo di quantizzazione ad un generico campo bosonico. Nel capitolo 3 discutiamo la quantizzazione del campo di Dirac. La trattazione è necessariamente molto succinta ed intesa solo a fornire gli elementi indispensabili per la trattazione dell'elettrodinamica quantistica (QED), svolta nel capitolo 4 e in quelli successivi¹.

1.2 Scelte di gauge particolari

Abbiamo visto al capitolo 4 della Parte prima che, dato un campo elettromagnetico descritto mediante il tensore $F_{\mu\nu}$, il corrispondente quadri-potenziale A_μ è definito solo a

¹Per una trattazione estesa della teoria dei campi si veda, per esempio, V. de Alfaro, *Introduzione alla teoria dei campi*, CLU Torino.

meno di una trasformazione di gauge

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x). \quad (1.1)$$

Vi è quindi la possibilità di ridefinire $A_\mu(x)$ tramite la (1.1) in modo che il nuovo quadri-potenziale $A'_\mu(x)$ soddisfi ad opportune condizioni semplificative per i problemi in esame. La ridefinizione di $A_\mu(x)$ costituisce la scelta di un particolare *gauge*. Esaminiamo due scelte di gauge particolarmente interessanti.

► Gauge di Lorentz

Il gauge di Lorentz è definito come il gauge in cui il quadri-potenziale $A_\mu(x)$ soddisfa alla condizione

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.2)$$

Esiste sempre la possibilità di ridefinire il campo A_μ , mediante una opportuna trasformazione di gauge, in modo che il suo trasformato $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x)$ soddisfi alla condizione di Lorentz $\partial_\mu A'^\mu(x) = 0$. Infatti, basta scegliere una funzione $\varphi(x)$ tale che

$$\square \varphi(x) = -\partial_\mu A^\mu(x). \quad (1.3)$$

Il campo $A'^\mu(x)$ non è univocamente definito: lo è solo a meno di trasformazioni di gauge tali che $\square \varphi(x) = 0$.

► Gauge di Coulomb

È possibile scegliere un gauge (di Coulomb) tale che sia soddisfatta la *condizione di trasversalità*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.4)$$

Nel caso libero ($j^\mu = 0$), mediante una opportuna scelta di gauge, è possibile imporre simultaneamente

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) = 0, \\ A_0(x) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Infatti, nella trasformazione di gauge

$$\begin{cases} \vec{A}(x) \rightarrow \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) - \vec{\nabla} \varphi(x), \\ A_0(x) \rightarrow A'_0(x) = A_0(x) + \partial_0 \varphi(x) \end{cases} \quad (1.6)$$

la funzione $\varphi(x)$ può essere scelta in modo che

$$\begin{cases} \Delta \varphi(x) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) & \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(x) = 0, \\ \partial_0 \varphi(x) = -A_0(x) & \implies A'_0(x) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Le due equazioni sono compatibili, perchè $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(x)$ non dipende dal tempo, come si può vedere considerando l'equazione del moto (vedi l'eq.(4.8) della Parte prima, pag.I.38)

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (1.8)$$

con $j^\mu = 0$ per $\mu = 0$:

$$\square A'_0 - \partial_0 (\partial_0 A'_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}') = 0. \quad (1.9)$$

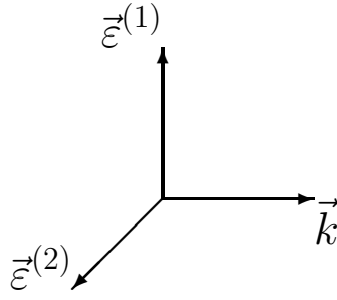


Figura 1.1: Scelta dei vettori di polarizzazione $\vec{\epsilon}^{(1)}(\vec{k})$ e $\vec{\epsilon}^{(2)}(\vec{k})$.

Tenendo conto che $A'_0 = 0$, si ottiene $\partial_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') = 0$, per cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'$ non dipende dal tempo.

Notiamo che se si impone $A_0 = 0$, la condizione di Lorentz è equivalente alla condizione di Coulomb.

Esaminiamo alcune proprietà del campo elettromagnetico nel gauge di Coulomb (1.4). Nel caso libero ($j^\mu = 0$) con $A_0 = 0$, si ha

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.10a)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.10b)$$

e l'equazione di campo del potenziale vettore $\vec{A}$ si riduce a

$$\square \vec{A} = 0. \quad (1.11)$$

In questo capitolo il campo elettromagnetico viene analizzato nel caso libero e nel gauge di Coulomb con $A_0 = 0$.

1.3 Sviluppo in serie di Fourier

Sviluppiamo $\vec{A}$ in serie di Fourier al tempo $t = 0$, con una normalizzazione in un cubo di lato L e volume V , tenendo conto che $\vec{A}$ deve essere reale:

$$\vec{A}(0, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ c_{\vec{k},\alpha}(0) \underbrace{\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}_{\vec{u}_{\vec{k},\alpha}(\vec{x})} + c_{\vec{k},\alpha}^*(0) \underbrace{\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}}_{\vec{u}_{\vec{k},\alpha}^*(\vec{x})} \right\}, \quad (1.12)$$

dove $\vec{\epsilon}^{(1)}(\vec{k})$ e $\vec{\epsilon}^{(2)}(\vec{k})$ sono i vettori di polarizzazione, unitari e reali, le cui direzioni dipendono dalla direzione di $\vec{k}$. Data la condizione di trasversalità, $\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k})$ è ortogonale a $\vec{k}$. Scegliamo $\vec{\epsilon}^{(1)}(\vec{k})$ e $\vec{\epsilon}^{(2)}(\vec{k})$ in modo che (vedi la Fig.1.1)

$$\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha')}(\vec{k}) = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (1.13)$$

$$\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0. \quad (1.14)$$

Le componenti di Fourier $\vec{u}_{\vec{k},\alpha}(\vec{x})$ soddisfano alle condizioni di ortonormalità

$$\frac{1}{V} \int d^3x \vec{u}_{\vec{k},\alpha}(\vec{x}) \cdot \vec{u}_{\vec{k}',\alpha'}^*(\vec{x}) = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \quad (1.15)$$

e alle condizioni di periodicità

$$L \vec{k} = 2\pi (n_1, n_2, n_3), \quad \text{con } n_i = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.16)$$

L'evoluzione temporale di $\vec{A}$ viene ottenuta sostituendo ai coefficienti $c_{\vec{k},\alpha}(0)$ i coefficienti

$$c_{\vec{k},\alpha}(t) = c_{\vec{k},\alpha}(0) e^{-i\omega t}, \quad (1.17)$$

che soddisfano all'equazione

$$\ddot{c}_{\vec{k},\alpha} + \omega^2 c_{\vec{k},\alpha} = 0, \quad (1.18)$$

dove

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = |\vec{k}|c. \quad (1.19)$$

Quindi

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ c_{\vec{k},\alpha}(0) \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + c_{\vec{k},\alpha}^*(0) \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right\}, \quad (1.20)$$

con $k^0 = \omega$.

► Hamiltoniana – Oscillatori di radiazione

Sostituendo nell'hamiltoniana del campo elettromagnetico

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right) \quad (1.21)$$

le espressioni (1.10) e (1.20), si ottiene

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} 2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 c_{\vec{k},\alpha}^*(t) c_{\vec{k},\alpha}(t). \quad (1.22)$$

Questa è l'hamiltoniana di un insieme di oscillatori armonici indipendenti. Infatti, se sostituiamo nella (1.22)

$$\left. \begin{aligned} q_{\vec{k},\alpha} &= \frac{1}{c} \left(c_{\vec{k},\alpha} + c_{\vec{k},\alpha}^* \right), \\ p_{\vec{k},\alpha} &= -i \frac{\omega}{c} \left(c_{\vec{k},\alpha} - c_{\vec{k},\alpha}^* \right), \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} c_{\vec{k},\alpha} &= \frac{c}{2\omega} \left(\omega q_{\vec{k},\alpha} + i p_{\vec{k},\alpha} \right), \\ c_{\vec{k},\alpha}^* &= \frac{c}{2\omega} \left(\omega q_{\vec{k},\alpha} - i p_{\vec{k},\alpha} \right), \end{aligned} \right. \quad (1.23)$$

troviamo

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} 2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(\frac{c}{2\omega} \right)^2 \left(\omega q_{\vec{k},\alpha} - i p_{\vec{k},\alpha} \right) \left(\omega q_{\vec{k},\alpha} + i p_{\vec{k},\alpha} \right) \\ &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{2} p_{\vec{k},\alpha}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_{\vec{k},\alpha}^2 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Questa hamiltoniana descrive un insieme infinito di oscillatori armonici indipendenti; $q_{\vec{k},\alpha}$ e $p_{\vec{k},\alpha}$ sono variabili coniugate nel formalismo hamiltoniano. Quindi, il campo di radiazione ha le proprietà di un insieme di oscillatori armonici le cui variabili dinamiche sono combinazioni lineari ortogonali dei coefficienti di Fourier.

1.4 Quantizzazione del campo di radiazione

La quantizzazione del campo di radiazione può ora essere introdotta facendo corrispondere alle variabili dinamiche canonicamente coniugate degli operatori che soddisfano alle regole canoniche di commutazione

$$[q_{\vec{k},\alpha}, q_{\vec{k}',\alpha'}] = 0, \quad (1.25a)$$

$$[p_{\vec{k},\alpha}, p_{\vec{k}',\alpha'}] = 0, \quad (1.25b)$$

$$[q_{\vec{k},\alpha}, p_{\vec{k}',\alpha'}] = i \hbar \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\vec{k},\vec{k'}}. \quad (1.25c)$$

Di conseguenza, anche i coefficienti di Fourier diventano operatori; li scriviamo in termini degli operatori adimensionali $a_{\vec{k},\alpha}$, $a_{\vec{k},\alpha}^\dagger$:

$$c_{\vec{k},\alpha} = c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} a_{\vec{k},\alpha}, \quad c_{\vec{k},\alpha}^\dagger = c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} a_{\vec{k},\alpha}^\dagger. \quad (1.26)$$

Dalle (1.23) si ottiene

$$\begin{cases} a_{\vec{k},\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q_{\vec{k},\alpha} + i p_{\vec{k},\alpha}) , \\ a_{\vec{k},\alpha}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q_{\vec{k},\alpha} - i p_{\vec{k},\alpha}) . \end{cases} \quad (1.27)$$

I commutatori di $a_{\vec{k},\alpha}$ e $a_{\vec{k},\alpha}^\dagger$ seguono dalle regole di commutazione (1.25):

$$[a_{\vec{k},\alpha}, a_{\vec{k}',\alpha'}^\dagger] = \frac{1}{2\hbar\sqrt{\omega\omega'}} \left\{ -i\omega [q_{\vec{k},\alpha}, p_{\vec{k}',\alpha'}] + i\omega [p_{\vec{k},\alpha}, q_{\vec{k}',\alpha'}] \right\} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\vec{k},\vec{k'}}, \quad (1.28a)$$

$$[a_{\vec{k},\alpha}, a_{\vec{k}',\alpha'}] = [a_{\vec{k},\alpha}^\dagger, a_{\vec{k}',\alpha'}^\dagger] = 0. \quad (1.28b)$$

Notare che tutti questi operatori sono *a tempi uguali*.

Sostituendo le (1.26) nella (1.20) si trova

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left\{ a_{\vec{k},\alpha} \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + a_{\vec{k},\alpha}^\dagger \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right\}. \quad (1.29)$$

Ora $\vec{A}$ è un *operatore di campo* o *campo quantizzato* (hermitiano). Anche i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ risultano quantizzati. Tenuto conto delle (1.10) e (1.29) si trova

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} c \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \left\{ a_{\vec{k},\alpha} \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} - a_{\vec{k},\alpha}^\dagger \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right\}, \quad (1.30a)$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = -\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \vec{k} \times \left\{ a_{\vec{k},\alpha} \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} - a_{\vec{k},\alpha}^\dagger \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right\}. \quad (1.30b)$$

1.5 Spazio di Fock e operatori connessi

Se calcoliamo ora l'operatore hamiltoniano (1.21), utilizzando la (1.30), troviamo

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar \omega \left(a_{\vec{k},\alpha}^\dagger a_{\vec{k},\alpha} + a_{\vec{k},\alpha} a_{\vec{k},\alpha}^\dagger \right) \\ &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar \omega \left(a_{\vec{k},\alpha}^\dagger a_{\vec{k},\alpha} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.31)$$

La struttura di questa formula porta a interpretare l'operatore $a_{\vec{k},\alpha}^\dagger a_{\vec{k},\alpha}$ come operatore *numero di occupazione*, ossia come quell'operatore i cui autovalori danno il numero di fotoni nello stato di impulso $\vec{k}$ e polarizzazione α . Definiamo quindi l'operatore hamiltoniano *numero di occupazione* $N_{\vec{k},\alpha}$ come

$$N_{\vec{k},\alpha} \equiv a_{\vec{k},\alpha}^\dagger a_{\vec{k},\alpha}. \quad (1.32)$$

Denotiamo lo stato in cui vi sono $n_{\vec{k}_1,\alpha_1}$ fotoni nello stato $(\vec{k}_1, \alpha_1)$, $n_{\vec{k}_2,\alpha_2}$ fotoni nello stato $(\vec{k}_2, \alpha_2)$, etc., con il vettore di stato

$$|n_{\vec{k}_1,\alpha_1}, n_{\vec{k}_2,\alpha_2}, \dots, n_{\vec{k}_i,\alpha_i}, \dots\rangle. \quad (1.33)$$

Questo stato è un autostato dell'operatore $N_{\vec{k}_i,\alpha_i}$ con autovalore $n_{\vec{k}_i,\alpha_i}$:

$$N_{\vec{k}_i,\alpha_i} |n_{\vec{k}_1,\alpha_1}, n_{\vec{k}_2,\alpha_2}, \dots, n_{\vec{k}_i,\alpha_i}, \dots\rangle = n_{\vec{k}_i,\alpha_i} |n_{\vec{k}_1,\alpha_1}, n_{\vec{k}_2,\alpha_2}, \dots, n_{\vec{k}_i,\alpha_i}, \dots\rangle. \quad (1.34)$$

Lo spazio sotteso dai vettori di stato (1.33) è detto *spazio di Fock*.

► Proprietà di $a_{\vec{k},\alpha}$, $a_{\vec{k},\alpha}^\dagger$, $N_{\vec{k},\alpha}$

Dai commutatori (1.28) discendono le seguenti relazioni:

$$[a_{\vec{k},\alpha}, N_{\vec{k}',\alpha'}] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} a_{\vec{k},\alpha}, \quad (1.35a)$$

$$[a_{\vec{k},\alpha}^\dagger, N_{\vec{k}',\alpha'}] = -\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} a_{\vec{k},\alpha}^\dagger. \quad (1.35b)$$

Quindi, per ogni stato $(\vec{k}, \alpha)$ si ha (omettiamo, per semplicità, gli indici $\vec{k}, \alpha$)

$$N a^\dagger |n\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger) |n\rangle = (n+1) a^\dagger |n\rangle, \quad (1.36a)$$

$$N a |n\rangle = (a N - a) |n\rangle = (n-1) a |n\rangle. \quad (1.36b)$$

Perciò gli a ($a^\dagger$) sono operatori che diminuiscono (aumentano) il numero di occupazione di una unità:

$$a \iff \text{operatore di distruzione}, \quad (1.37a)$$

$$a^\dagger \iff \text{operatore di creazione}. \quad (1.37b)$$

Perciò

$$a^\dagger|n\rangle = c_+|n+1\rangle, \quad (1.38a)$$

$$a|n\rangle = c_-|n-1\rangle, \quad (1.38b)$$

dove c_+ e c_- sono dei coefficienti di normalizzazione (i vettori di stato sono normalizzati a uno: $\langle n|n\rangle = 1$). Moltiplicando le (1.38) a sinistra per le loro complesse coniugate si ottiene

$$|c_+|^2 = \langle n|a a^\dagger|n\rangle = \langle n|\underbrace{a a^\dagger - a^\dagger a}_{[a,a^\dagger]=1} + \underbrace{a^\dagger a}_N|n\rangle = n+1, \quad (1.39a)$$

$$|c_-|^2 = \langle n|\underbrace{a^\dagger a}_N|n\rangle = n. \quad (1.39b)$$

Scegliendo opportunamente le fasi arbitrarie di c_+ e c_- si ha

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (1.40a)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (1.40b)$$

► Costruzione dei vettori di stato

Lo stato di vuoto $|0\rangle$ è lo stato in cui tutti gli stati $(\vec{k}, \alpha)$ sono vuoti. Quindi

$$a_{\vec{k},\alpha}|0\rangle = 0 \quad \text{per qualsiasi } (\vec{k}, \alpha). \quad (1.41)$$

Tutti gli stati possono essere generati mediante l'applicazione degli operatori di creazione $a_{\vec{k},\alpha}^\dagger$ sullo stato di vuoto. Ad esempio, gli stati ad un fotone sono dati da

$$|1_{\vec{k},\alpha}\rangle = a_{\vec{k},\alpha}^\dagger|0\rangle, \quad (1.42)$$

e gli stati a due fotoni sono dati da

$$|1_{\vec{k},\alpha}, 1_{\vec{k}',\alpha'}\rangle = a_{\vec{k},\alpha}^\dagger a_{\vec{k}',\alpha'}^\dagger|0\rangle. \quad (1.43)$$

In particolare, si vede che, in virtù dei commutatori (1.28b), gli stati a due particelle sono simmetrici nello scambio $(\vec{k}, \alpha) \leftrightarrow (\vec{k}', \alpha')$ e quindi la statistica è automaticamente quella relativa ai bosoni (statistica di Bose-Einstein). Il presente formalismo si può quindi applicare, oltre che ai fotoni, alle altre particelle di spin intero. Si vedrà successivamente come debba essere modificato il formalismo nel caso dei fermioni.

1.6 Massa e spin dei fotoni

► Operatore hamiltoniano

Torniamo ora all'operatore H (1.31), che adesso scriviamo

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar \omega \left(N_{\vec{k},\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.44)$$

Il termine $\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar \omega$ rappresenta l'energia del vuoto (infinita):

$$H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar \omega |0\rangle. \quad (1.45)$$

Possiamo definire la scala dell'energia in modo che l'energia del vuoto sia nulla:

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar \omega N_{\vec{k},\alpha} \quad \Longrightarrow \quad H|0\rangle = 0. \quad (1.46)$$

► Operatore impulso

In elettrodinamica classica l'impulso totale del campo di radiazione è dato dall'integrale spaziale del vettore di Poynting:

$$\vec{P} = \frac{1}{c} \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (1.47)$$

Dobbiamo quindi prendere come operatore impulso l'operatore ottenuto sostituendo in $\vec{P}$ le espressioni quantistiche per i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Dalle (1.30) si ottiene

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar \vec{k} \left(N_{\vec{k},\alpha} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar \vec{k} N_{\vec{k},\alpha}. \quad (1.48)$$

Calcoliamo l'energia e l'impulso da associare al campo elettromagnetico in presenza di un fotone:

$$H a_{\vec{k},\alpha}^\dagger |0\rangle = \hbar \omega a_{\vec{k},\alpha}^\dagger |0\rangle, \quad (1.49a)$$

$$\vec{P} a_{\vec{k},\alpha}^\dagger |0\rangle = \hbar \vec{k} a_{\vec{k},\alpha}^\dagger |0\rangle. \quad (1.49b)$$

Quindi al fotone dobbiamo associare l'energia $E = \hbar \omega = \hbar |\vec{k}|c$, l'impulso $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ e la massa

$$m = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - \vec{p}^2 c^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{\hbar^2 \omega^2 - \hbar^2 \vec{k}^2 c^2} = 0. \quad (1.50)$$

Poichè lo stato di polarizzazione di un fotone è caratterizzato dal vettore di polarizzazione $\vec{\epsilon}^{(\alpha)}$, è chiaro che il fotone ha spin 1. In luogo dei vettori di polarizzazione lineare $\vec{\epsilon}^{(1)}$, $\vec{\epsilon}^{(2)}$ possiamo introdurre i vettori di polarizzazione circolare

$$\vec{\epsilon}^{(\pm)} = \mp \frac{\vec{\epsilon}^{(1)} \pm i \vec{\epsilon}^{(2)}}{\sqrt{2}}. \quad (1.51)$$

Ricordando le relazioni generali tra componenti cartesiane T_x, T_y, T_z e componenti sferiche $T_{1,\pm m}$ ($m = 0, 1$) dei vettori,

$$\begin{cases} T_{1,\pm 1} = \mp \frac{T_x \pm i T_y}{\sqrt{2}}, \\ T_{1,0} = T_z, \end{cases} \quad (1.52)$$

si vede che, fissato l'asse di quantizzazione nella direzione del moto, le componenti di spin da associare a $\vec{\varepsilon}^{(\pm)}$ sono $m = \pm 1$. Lo stato $m = 0$ manca per la condizione di trasversalità (1.4). Lo spin del fotone è parallelo o anti-parallelo alla direzione di propagazione. Questa è una proprietà generale delle particelle di massa nulla.

In conclusione, *le eccitazioni del campo elettromagnetico (i fotoni) possono essere considerate come particelle di massa zero e spin uno.*

In generale, in teoria dei campi ad ogni campo viene associata una particella di massa e spin definiti.

Capitolo 2

Cenni sul metodo (canonico) di quantizzazione dei campi

2.1 Formulazione lagrangiana-hamiltoniana per campi classici

Supponiamo di avere un insieme di campi $\varphi^\alpha(x)$, con $\alpha = 1, \dots, N$ (per esempio, nel caso elettromagnetico: $A^\alpha(x)$ con $\alpha = 1, \dots, 4$) con una densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^\alpha, \partial_\mu \varphi^\alpha) \quad (2.1)$$

che sia uno scalare di Lorentz. La formulazione lagrangiana della teoria dei campi è particolarmente adatta a descrivere la dinamica relativistica con un formalismo esplicitamente covariante.

I valori dei campi $\varphi^\alpha(x)$ in ogni punto x dello spazio-tempo e i valori delle loro derivate $\partial_\mu \varphi^\alpha$ rappresentano un infinito continuo di gradi di libertà.

Suddividiamo lo spazio (ad un tempo fissato) in cellette di volume $\delta \vec{x}_{(s)}$ con centro $\vec{x}_{(s)}$, in modo che il sistema sia caratterizzato da un numero infinito ma numerabile di coordinate:

$$q_s^\alpha(t) = \varphi^\alpha(t, s) \quad (s = 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

con $\varphi^\alpha(t, s) = \varphi^\alpha(t, \vec{x}_{(s)})$. In questo modo la lagrangiana $L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi^\alpha(x), \partial_\mu \varphi^\alpha(x))$ può essere approssimata da

$$L(t) = \sum_s \delta \vec{x}_{(s)} \mathcal{L}_{(s)}, \quad (2.3)$$

dove la $\mathcal{L}_{(s)}$ è la densità lagrangiana della celletta s -esima.

Il momento coniugato a $q_s^\alpha(t)$ è

$$p_s^\alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s^\alpha(t)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^\alpha(t, s)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{(s)}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha(t, s)} \delta \vec{x}_{(s)} \quad (2.4)$$

e l'hamiltoniana è data da

$$H = \sum_s p_s^\alpha \dot{q}_s^\alpha - L. \quad (2.5)$$

Definiamo anche

$$\pi^\alpha(t, s) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{(s)}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha(t, s)} \quad (2.6)$$

e quindi

$$p_s^\alpha(t) = \pi^\alpha(t, s) \delta \vec{x}_{(s)} \quad (2.7)$$

L'hamiltoniana H può essere riscritta nella forma

$$H = \sum_s \delta \vec{x}_{(s)} \left[\pi^\alpha(t, s) \dot{\varphi}^\alpha(t, s) - \mathcal{L}_{(s)} \right]. \quad (2.8)$$

Passiamo ora al limite $\delta \vec{x}_{(s)} \rightarrow 0$, cioè

$$\varphi^\alpha(t, s) \rightarrow \varphi^\alpha(x) \quad \text{e} \quad \pi^\alpha(t, s) \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha(x)} \equiv \pi^\alpha(x), \quad (2.9)$$

per ottenere

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}(t, \vec{x}), \quad \text{con} \quad \mathcal{H}(x) = \pi^\alpha(x) \dot{\varphi}^\alpha(x) - \mathcal{L}(x). \quad (2.10)$$

Nel seguito considereremo solamente campi descritti da densità lagrangiane del tipo (2.1), ossia dipendenti soltanto dai campi $\varphi^\alpha(x)$ e dalle loro derivate prime $\partial_\mu \varphi^\alpha(x)$.

► Principio variazionale ed equazioni di campo

Le equazioni di campo sono ottenute dal principio variazionale seguente. Definiamo l'integrale d'azione

$$I(\Omega) \equiv \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\varphi^\alpha, \partial_\mu \varphi^\alpha) \quad (2.11)$$

su una regione spazio-temporale Ω arbitraria. Se i campi sono variati, $\varphi^\alpha(x) \rightarrow \varphi^\alpha(x) + \delta \varphi^\alpha(x)$, in modo tale che le variazioni si annullino sull'iper-superficie Γ che delimita Ω , l'integrale d'azione ha un valore stazionario:

$$\delta I(\Omega) = 0. \quad (2.12)$$

La variazione dell'integrale d'azione è data da

$$\begin{aligned} \delta I(\Omega) &= \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} \delta \varphi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \underbrace{\delta (\partial_\mu \varphi^\alpha)}_{\partial_\mu (\delta \varphi^\alpha)} \right] \\ &= \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} \delta \varphi^\alpha + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \delta \varphi^\alpha \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \right) \delta \varphi^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Utilizzando il teorema di Gauss, si ha

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \delta \varphi^\alpha \right) = \int_\Gamma dS_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \delta \varphi^\alpha = 0, \quad (2.14)$$

perchè $\delta \varphi^\alpha = 0$ sull'iper-superficie Γ . Quindi, dal principio variazionale (2.12) ricaviamo

$$0 = \delta I(\Omega) = \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \right] \delta \varphi^\alpha. \quad (2.15)$$

Data l'arbitrarietà delle variazioni $\delta\varphi^\alpha$, si ottengono le equazioni di campo (equazioni di Euler-Lagrange)

$$\boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, N)} . \quad (2.16)$$

Sottolineiamo che le proprietà di covarianza delle equazioni di campo (2.16) dipendono dal requisito che la densità lagrangiana (2.1) sia un invariante di Lorentz. Questa condizione determina la struttura esplicita della densità lagrangiana di ogni singolo campo.

Esaminiamo adesso due casi specifici: il campo scalare ed il campo elettromagnetico. Il campo fermionico di Dirac verrà discusso nel capitolo 3.

► Campo scalare

Dato un campo scalare $\varphi(x)$, la sua densità lagrangiana, per essere un invariante di Lorentz, non può che avere la forma

$$\mathcal{L} = a \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + b \varphi \varphi , \quad (2.17)$$

dove a, b sono due costanti. Dalle equazioni di Euler-Lagrange (2.16) otteniamo quindi

$$a \partial_\mu (\partial^\mu \varphi) - b \varphi = 0 . \quad (2.18)$$

Se vogliamo che quest'equazione coincida con l'equazione scalare che già conosciamo, di Klein-Gordon,

$$(\square + m^2) \varphi = 0 , \quad (2.19)$$

dobbiamo porre $b/a = -m^2$. Scegliendo la costante moltiplicativa (arbitraria) della $\mathcal{L}$ in modo che $a = 1/2$, la lagrangiana (2.17) diventa

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi \varphi} . \quad (2.20)$$

Questa espressione può essere immediatamente estesa al caso di un campo scalare a N componenti: $\varphi^\alpha(x)$, $(\alpha = 1, \dots, N)$. In tale caso si avrà

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^\alpha \partial^\mu \varphi^\alpha - \frac{1}{2} m^2 \varphi^\alpha \varphi^\alpha} , \quad (2.21)$$

dove si sottointende anche una somma sull'indice α . Ogni componente $\varphi^\alpha(x)$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon

$$\boxed{(\square + m^2) \varphi^\alpha = 0} . \quad (2.22)$$

Il momento coniugato a $\varphi^\alpha(x)$ è

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^\alpha)} = \partial_0 \varphi^\alpha(x) , \quad (2.23)$$

per cui si ottiene la densità hamiltoniana

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^\alpha \partial_0 \varphi^\alpha - \mathcal{L} \\
&= (\pi^\alpha)^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^\alpha \partial^\mu \varphi^\alpha + \frac{1}{2} m^2 \varphi^\alpha \varphi^\alpha \\
&= \frac{1}{2} \left[(\pi^\alpha)^2 + (\vec{\nabla} \varphi^\alpha)^2 + m^2 (\varphi^\alpha)^2 \right] .
\end{aligned} \tag{2.24}$$

► Lagrangiana del campo elettromagnetico

In base al principio di invarianza relativistica la densità lagrangiana elettromagnetica deve essere della forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[a \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + b \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + c (\partial_\mu A^\mu)^2 + d A_\mu A^\mu \right] . \tag{2.25}$$

Utilizzando la (2.16), ricaviamo l'equazione di campo relativa a $\mathcal{L}$ ed imponiamo che questa coincida con l'equazione del campo A_μ nel caso libero (vedi l'eq.(4.8) della prima parte, pag.I.38)

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0 . \tag{2.26}$$

Calcoliamo i singoli termini nella (2.16):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} = a \partial^\mu A_\nu + b \partial_\nu A^\mu + c g_\nu^\mu \partial_\rho A^\rho , \tag{2.27a}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} = a \square A_\nu + (b + c) \partial_\nu (\partial_\mu A^\mu) , \tag{2.27b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = d A_\nu . \tag{2.27c}$$

Quindi otteniamo l'equazione di campo

$$a \square A_\nu + (b + c) \partial_\nu (\partial_\mu A^\mu) - d A_\nu = 0 . \tag{2.28}$$

Perchè questa espressione sia uguale alla (2.26) deve essere

$$d = 0 \quad \text{e} \quad \frac{b + c}{a} = -1 , \tag{2.29}$$

da cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[a \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu - a \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu - c \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + c (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] . \tag{2.30}$$

Dividendo per $-a$ (le equazioni di campo rimangono inalterate) si ottiene

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{c}{2a} \underbrace{\left[\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu - (\partial_\mu A^\mu)^2 \right]}_{\partial_\mu [A^\nu (\partial_\nu A^\mu - g_\nu^\mu \partial_\rho A^\rho)]} . \tag{2.31}$$

La quadri-divergenza $\partial_\mu [A^\nu (\partial_\nu A^\mu - g_\nu^\mu \partial_\rho A^\rho)]$ non contribuisce all'integrale di azione e può essere sottratta alla densità lagrangiana. Perciò il termine rilevante della densità lagrangiana è

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} . \tag{2.32}$$

In questa densità lagrangiana il campo A_μ compare solo attraverso il tensore $F_{\mu\nu}$. Quindi l'invarianza della teoria per trasformazioni di gauge $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x)$ è garantita dalla struttura stessa della $\mathcal{L}$.

Inoltre, si osservi che nella $\mathcal{L}$ non compare un termine $A_\mu A^\mu$ (vedi la condizione $d = 0$ nella (2.29)), perchè questo genererebbe nell'equazione del campo A_μ un termine lineare in A_μ , interpretabile come termine di massa. Ossia, una densità lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \quad (2.33)$$

fornirebbe l'equazione di campo

$$(\square + m^2) A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0. \quad (2.34)$$

Il campo elettromagnetico è a massa nulla (fotoni) e quindi il termine aggiuntivo $m^2 A^\mu$ nella (2.34) non è accettabile. Si noti ancora che il termine $\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$ nella (2.33) non sarebbe invariante per trasformazioni di gauge su A_μ .

2.2 Quantizzazione dei campi

Facciamo corrispondere alle coordinate coniugate q_s^α, p_s^α degli operatori che soddisfano le regole di commutazione canoniche:

$$[q_s^\alpha, p_{s'}^\beta] = i \hbar \delta_{ss'} \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.35a)$$

$$[q_s^\alpha, q_{s'}^\beta] = [p_s^\alpha, p_{s'}^\beta] = 0. \quad (2.35b)$$

Scrivendo

$$q_s^\alpha = \varphi^\alpha(t, s) \quad \text{e} \quad p_s^\alpha = \pi^\alpha(t, s) \delta \vec{x}_{(s)}, \quad (2.36)$$

si ottengono le regole di commutazione

$$[\varphi^\alpha(t, s), \pi^\beta(t, s')] = i \hbar \delta_{\alpha\beta} \frac{\delta_{ss'}}{\delta \vec{x}_{(s)}}, \quad (2.37a)$$

$$[\varphi^\alpha(t, s), \varphi^\beta(t, s')] = [\pi^\alpha(t, s), \pi^\beta(t, s')] = 0. \quad (2.37b)$$

Passiamo al limite $\delta \vec{x}_{(s)} \rightarrow 0$; in tale limite si ha

$$\frac{\delta_{ss'}}{\delta \vec{x}_{(s)}} \xrightarrow{\delta \vec{x}_{(s)} \rightarrow 0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.38)$$

con $\vec{x} = \vec{x}_{(s)}$ e $\vec{x}' = \vec{x}_{(s')}$. Infatti

$$f_s = \sum_{s'} \delta \vec{x}_{(s)} \frac{\delta_{ss'}}{\delta \vec{x}_{(s)}} f_{s'} \xrightarrow{\delta \vec{x}_{(s)} \rightarrow 0} f(\vec{x}) = \int d^3 x' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') f(\vec{x}'). \quad (2.39)$$

Quindi, otteniamo le relazioni di commutazione a tempi uguali

$$[\varphi^\alpha(t, \vec{x}), \pi^\beta(t, \vec{x}')] = i \hbar \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.40a)$$

$$[\varphi^\alpha(t, \vec{x}), \varphi^\beta(t, \vec{x}')] = [\pi^\alpha(t, \vec{x}), \pi^\beta(t, \vec{x}')] = 0. \quad (2.40b)$$

► Sviluppi in serie di Fourier

Torniamo al caso classico e consideriamo, per semplicità, un unico campo scalare $\varphi(x)$. Sviluppiamo $\varphi(x)$ ed il campo coniugato $\pi(x) = \partial_0 \varphi(x)$ in serie di Fourier ($k_0 = \omega_k = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \{a_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\vec{k}}^* e^{ik \cdot x}\}_{k_0=\omega_k}, \quad (2.41a)$$

$$\pi(x) = \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \{a_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} - a_{\vec{k}}^* e^{ik \cdot x}\}_{k_0=\omega_k}. \quad (2.41b)$$

I campi quantizzati sono dati da espressioni analoghe, dove gli $a_{\vec{k}}$ sono degli operatori e gli $a_{\vec{k}}^*$ devono essere sostituiti da $a_{\vec{k}}^\dagger$.

Le regole di commutazione (2.40) impongono che gli operatori $a_{\vec{k}}$ soddisfino le relazioni di commutazione (tenere presente che $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')})$

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (2.42a)$$

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0. \quad (2.42b)$$

Gli operatori $a_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}}^\dagger$ vengono interpretati come operatori di distruzione e di creazione, secondo il formalismo discusso nel capitolo precedente.

Per l'operatore hamiltoniano si trova

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x \left[(\pi)^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 (\varphi)^2 \right]_{t=0} \\ &= \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

per cui, eliminando il contributo del vuoto, si ha

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k N_{\vec{k}}, \quad \text{con} \quad N_{\vec{k}} \equiv a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}. \quad (2.44)$$

Definiamo anche

$$\varphi(x) \equiv \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \quad (2.45)$$

con

$$\varphi^{(+)}(x) \iff \begin{cases} \text{campo a frequenze positive} \\ \text{(contiene solo operatori di annichilazione)}, \end{cases} \quad (2.46a)$$

$$\varphi^{(-)}(x) \iff \begin{cases} \text{campo a frequenze negative} \\ \text{(contiene solo operatori di creazione)}. \end{cases} \quad (2.46b)$$

Notare che vale la proprietà

$$(\varphi^{(+)}(x))^\dagger = \varphi^{(-)}(x). \quad (2.47)$$

► Commutatori a tempi qualsiasi

Calcoliamo il commutatore di due campi liberi in due punti arbitrari dello spazio-tempo:

$$\begin{aligned}
[\varphi(x), \varphi(x')] &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \left[\left(a_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right), \left(a_{\vec{k}'} e^{-ik' \cdot x'} + a_{\vec{k}'}^\dagger e^{ik' \cdot x'} \right) \right]_{k_0=\omega_k, k'_0=\omega_{k'}} \\
&= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \left\{ [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] e^{-i(k \cdot x - k' \cdot x')} + [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}] e^{i(k \cdot x - k' \cdot x')} \right\}_{k_0=\omega_k, k'_0=\omega_{k'}} \\
&= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega_k} \left\{ e^{-ik \cdot (x-x')} - e^{ik \cdot (x-x')} \right\}_{k_0=\omega_k} \\
&\xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left\{ e^{-ik \cdot (x-x')} - e^{ik \cdot (x-x')} \right\}_{k_0=\omega_k} . \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Ponendo

$$\Delta(x) \equiv \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left\{ e^{-ik \cdot x} - e^{ik \cdot x} \right\}_{k_0=\omega_k} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} \sin(k \cdot x)|_{k_0=\omega_k} , \tag{2.49}$$

si ha

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = i \Delta(x - x') . \tag{2.50}$$

Notiamo le seguenti proprietà della $\Delta(x)$:

1. Dalla (2.49) si vede che $\Delta(x)$ è una funzione di x reale e dispari, come d'altra parte è richiesto dalla (2.50).
2. Per $t = t'$ dalla (2.49) si ha

$$\Delta(t = 0, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}) = 0 \tag{2.51}$$

e quindi si ritrova il risultato che il commutatore a tempi uguali è nullo (vedi l'eq.(2.40b)).

3. La funzione $\Delta(x)$ è un invariante di Lorentz (la (2.50) è una relazione di commutazione covariante). Infatti, $\Delta(x)$ può essere riscritta nella forma esplicitamente Lorentz-invariante

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \epsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2) , \tag{2.52}$$

nella quale tutti i fattori della funzione integranda sono Lorentz-invarianti, incluso $\epsilon(k_0)$ se la trasformazione di Lorentz è propria. Per dimostrare la validità di questa espressione utilizziamo la proprietà

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta(k_0^2 - \underbrace{\vec{k}^2}_{-\omega_k^2} - m^2) = \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)] , \tag{2.53}$$

per cui la (2.52) diventa

$$\Delta(x) \equiv \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left\{ e^{-ik_0t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} - e^{ik_0t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}_{k_0=\omega_k}. \quad (2.54)$$

Cambiando nel secondo termine $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ si ritrova la (2.49).

4. Dalle proprietà (2) e (3) discende che il commutatore dei campi è nullo per qualsiasi intervallo $x - x'$ di tipo spazio ($(x - x')^2 = (x_0 - x'_0)^2 - (\vec{x} - \vec{x}')^2 < 0$). Infatti, qualsiasi quadri-vettore di tipo spazio ($x^2 < 0$) può essere trasformato nel vettore $x_\mu = (0, \vec{x})$ mediante una trasformazione di Lorentz appropriata; e d'altra parte per la proprietà (2) $\Delta(t = 0, \vec{x}) = 0$. L'annullarsi del commutatore per intervalli di tipo spazio dipende da principi fondamentali di meccanica quantistica e di relatività speciale (principio di causalità):
 - (a) Il non annullarsi del commutatore di due operatori hermitiani significa che le misure dei due campi osservabili corrispondenti interferiscono.
 - (b) Per la relatività speciale l'interferenza tra due punti richiede che i due punti siano collegabili mediante un segnale e quindi che la loro distanza sia entro il cono luce.
5. Un'altra rappresentazione integrale di $\Delta(x)$ è data da

$$\Delta(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4k \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 - m^2}, \quad (2.55)$$

dove C è il cammino nel piano della variabile complessa k rappresentato nella Fig.2.1. Infatti, si ha

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4k \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 - m^2} &= -\frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int d^3k \left\{ \lim_{k_0 \rightarrow \omega_k} \left[(k_0 - \omega_k) \frac{e^{-ik\cdot x}}{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \lim_{k_0 \rightarrow -\omega_k} \left[(k_0 + \omega_k) \frac{e^{-ik\cdot x}}{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)} \right] \right\} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} [e^{-ik\cdot x} - e^{ik\cdot x}]_{k_0=\omega_k} \equiv \Delta(x). \end{aligned} \quad (2.56)$$

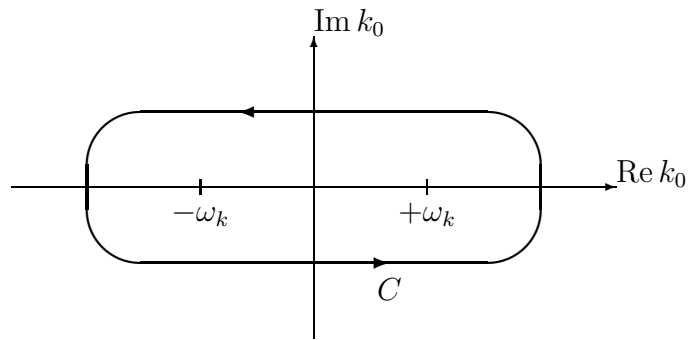


Figura 2.1: Cammino di integrazione C nella rappresentazione integrale (2.55) di $\Delta(x)$.

Capitolo 3

Campi di Dirac

3.1 Operatori fermionici di creazione e di annichilazione

Per i fermioni occorre adottare delle relazioni di commutazione che tengano conto della statistica di Fermi-Dirac e del principio di Pauli (Jordan & Wigner 1928); quindi per gli operatori fermionici di creazione e di annichilazione si impongono le seguenti relazioni di anticommutazione:

$$\left\{ b_{\vec{p}}^{(r)}, b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} \right\} = \delta_{r,r'} \delta_{\vec{p},\vec{p}'}, \quad (3.1a)$$

$$\left\{ b_{\vec{p}}^{(r)}, b_{\vec{p}'}^{(r')} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger}, b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} \right\} = 0, \quad (3.1b)$$

dove r è un indice di polarizzazione. Perciò vale l'interpretazione:

$$\text{stati ad un fermione} \quad \Longleftrightarrow \quad b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} |0\rangle, \quad (3.2a)$$

$$\text{stati a due fermioni} \quad \Longleftrightarrow \quad b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} |0\rangle. \quad (3.2b)$$

Se $r = r'$ e $\vec{p} = \vec{p}'$, si ha

$$b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} |0\rangle = \frac{1}{2} \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger}, b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} \right\} |0\rangle = 0, \quad (3.3)$$

per cui vale il principio di Pauli. Se $r, \vec{p} \neq r', \vec{p}'$, si ha

$$b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} |0\rangle = -b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} |0\rangle, \quad (3.4)$$

per cui lo stato è anti-simmetrico per scambio $r, \vec{p} \leftrightarrow r', \vec{p}'$ (statistica di Fermi-Dirac).

Consideriamo l'operatore numero di particelle

$$N_{\vec{p}}^{(r)} \equiv b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)}, \quad (3.5)$$

tale che

$$N_{\vec{p}}^{(r)} |0\rangle = b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} |0\rangle = 0, \quad (3.6a)$$

$$N_{\vec{p}}^{(r)} (b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} |0\rangle) = b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} |0\rangle = b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} (1 - b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)}) |0\rangle = b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} |0\rangle, \quad (3.6b)$$

$$N_{\vec{p}}^{(r)2} = b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} = b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} (1 - b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)}) b_{\vec{p}}^{(r)} = b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} = N_{\vec{p}}^{(r)}. \quad (3.6c)$$

Quindi, si ha

$$N_{\vec{p}}^{(r)} (N_{\vec{p}}^{(r)} - 1) = 0 \quad (3.7)$$

e gli autovalori di $N_{\vec{p}}^{(r)}$ sono 0 e 1.

3.2 Lagrangiana di Dirac ed equazioni di campo

Dimostriamo che la densità lagrangiana di Dirac (Lorentz invariante)

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) (i \hbar c \vec{\partial} - m c^2) \psi(x) \quad (3.8a)$$

$$= \bar{\psi}(x) (-i \hbar c \overleftarrow{\partial} - m c^2) \psi(x) \quad (3.8b)$$

conduce, tramite le equazioni di Euler-Lagrange (2.16), all'equazione di Dirac. (Le due espressioni (3.8a) e (3.8b) per la $\mathcal{L}$ sono equivalenti perchè differiscono per una quadri-divergenza, che costituisce un termine ininfluenza nella derivazione delle equazioni di Euler-Lagrange.)

Nella variazione di $\mathcal{L}$ per la derivazione delle equazioni di campo secondo la (2.16), ψ e $\bar{\psi}$ devono essere considerati indipendenti. Consideriamo la variazione di $\mathcal{L}$ rispetto a $\bar{\psi}$. Utilizzando la (3.8a) si ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i \hbar c \vec{\partial} - m c^2) \psi(x), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad (3.9)$$

per cui si ottiene l'equazione di campo

$$(i \hbar c \vec{\partial} - m c^2) \psi(x) = 0, \quad (3.10)$$

che in unità naturali si scrive

$$\boxed{(i \vec{\partial} - m) \psi(x) = 0}. \quad (3.11)$$

Se consideriamo la variazione di $\mathcal{L}$ rispetto a ψ , utilizzando la (3.8b) si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \bar{\psi}(x) (-i \overleftarrow{\partial} - m), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0, \quad (3.12)$$

per cui si ottiene l'equazione di campo

$$\boxed{\bar{\psi}(x) (i \overleftarrow{\partial} + m) = 0}. \quad (3.13)$$

Se avessimo variato la (3.8b) rispetto a $\bar{\psi}$ e la (3.8a) rispetto a ψ , avremmo ottenuto le stesse equazioni (3.11) e (3.13), rispettivamente.

Utilizzando la forma (3.8a) di $\mathcal{L}$ si trova il momento coniugato a ψ :

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i \bar{\psi} \gamma^0 = i \psi^\dagger. \quad (3.14)$$

Invece, il momento coniugato a $\bar{\psi}$ è nullo, perchè dalla (3.8a) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0$. Per la densità hamiltoniana si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= i \bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \bar{\psi} (i \gamma^0 \partial_0 + i \gamma^k \partial_k - m) \psi \\ &= \bar{\psi} (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \psi \\ &= \psi^\dagger (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Per cui, l'operatore hamiltoniano è dato da

$$H = \int d^3x \psi^\dagger (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi. \quad (3.16)$$

3.3 Campi di Dirac quantizzati

In analogia a quanto visto nei casi del campo elettromagnetico e del campo scalare, scriviamo (tenendo conto dell'espressione (2.61) della Parte prima)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{r=1,2} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{E}} \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)} u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} v^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right\}_{p_0=E}. \quad (3.17)$$

con $E \equiv +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Nella quantizzazione del campo $\psi(x)$ i coefficienti b, d^* diventano gli operatori $b, d^\dagger$ che vengono interpretati come

$$b_{\vec{p}}^{(r)} \iff \text{operatore di annichilazione di un elettrone nello stato } \vec{p}, r, \quad (3.18a)$$

$$d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} \iff \text{operatore di creazione di un positrone nello stato } \vec{p}, r. \quad (3.18b)$$

Verificheremo la validità di questa interpretazione quando avremo calcolato l'energia, l'impulso e la carica totali del sistema a multicorpi.

In conformità a quanto fatto precedentemente (vedi le (3.1)), assumiamo per gli operatori b e d le relazioni di anticommutazione:

$$\left\{ b_{\vec{p}}^{(r)}, b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} \right\} = \left\{ d_{\vec{p}}^{(r)}, d_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} \right\} = \delta_{r,r'} \delta_{\vec{p},\vec{p}'}, \quad (3.19a)$$

$$\left\{ b_{\vec{p}}^{(r)}, b_{\vec{p}'}^{(r')} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger}, b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} \right\} = \left\{ d_{\vec{p}}^{(r)}, d_{\vec{p}'}^{(r')} \right\} = \left\{ d_{\vec{p}}^{(r)\dagger}, d_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} \right\} = 0, \quad (3.19b)$$

$$\left\{ b_{\vec{p}}^{(r)}, d_{\vec{p}'}^{(r')} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger}, d_{\vec{p}'}^{(r')} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)}, d_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger}, d_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} \right\} = 0. \quad (3.19c)$$

L'aggiunto del campo $\psi(x)$ è

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{r=1,2} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{E}} \left\{ d_{\vec{p}}^{(r)} \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right\}_{p_0=E}. \quad (3.20)$$

Per l'operatore hamiltoniano, dalla (3.16) si ottiene

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{r,r'} \sum_{\vec{p},\vec{p}'} \frac{m}{\sqrt{EE'}} \left\{ d_{\vec{p}}^{(r)} v^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} u^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right\}_{p_0=E} \\ &\quad \times (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \left\{ b_{\vec{p}'}^{(r')} u^{(r')}(\vec{p}') e^{-ip' \cdot x} + d_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} v^{(r')}(\vec{p}') e^{ip' \cdot x} \right\}_{p'_0=E}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Tenuto conto che

$$(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi = i \partial_0 \psi \quad \text{e} \quad i \partial_0 e^{-ip' \cdot x} \Big|_{k'_0=E'} = E' e^{-ip' \cdot x} \Big|_{k'_0=E'} , \quad (3.22)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{V} \sum_{r,r'} \sum_{\vec{p},\vec{p}'} \frac{m}{\sqrt{EE'}} E' \left\{ - d_{\vec{p}}^{(r)} d_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} v^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(r')}(\vec{p}') \underbrace{\int d^3x e^{-i(p-p') \cdot x}}_{V \delta_{\vec{p},\vec{p}'}} \right. \\ \left. + b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}'}^{(r')} u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(r')}(\vec{p}') \underbrace{\int d^3x e^{-i(p'-p) \cdot x}}_{V \delta_{\vec{p},\vec{p}'}} \right\}_{\substack{p_0=E \\ p'_0=E'}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

(gli altri termini sono nulli per le proprietà di ortogonalità (2.60) della Parte prima).
Dalle relazioni

$$u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(r')}(\vec{p}) = \frac{E}{m} \delta_{rr'} = v^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(r')}(\vec{p}) , \quad (3.24)$$

troviamo per H il risultato

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{p},r} E \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} - d_{\vec{p}}^{(r)} d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} \right\} \\ &= \sum_{\vec{p},r} E \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} + d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} d_{\vec{p}}^{(r)} - 1 \right\} . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Da questa espressione segue l'interpretazione

$$b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} \equiv N_{\vec{p}}^{(r)}(e^-) \iff \text{operatore numero di occupazione di elettroni,} \quad (3.26a)$$

$$d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} d_{\vec{p}}^{(r)} \equiv N_{\vec{p}}^{(r)}(e^+) \iff \text{operatore numero di occupazione di positroni.} \quad (3.26b)$$

Notare che sia gli elettroni che i positroni contribuiscono alla (3.25) con un'energia positiva E .

Nell'espressione (3.25) il termine $-\sum_{\vec{p},r} E$ corrisponde all'energia (non osservabile) del vuoto. Sottraendo tale energia si ha

$$\boxed{H = \sum_{\vec{p},r} E \left\{ N_{\vec{p}}^{(r)}(e^-) + N_{\vec{p}}^{(r)}(e^+) \right\}} . \quad (3.27)$$

Analogamente, per l'operatore carica totale si trova

$$\begin{aligned} Q &= e \int d^3x \psi^\dagger \psi \\ &= e \sum_{\vec{p},r} \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} + d_{\vec{p}}^{(r)} d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} \right\} \\ &= e \sum_{\vec{p},r} \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} - d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} d_{\vec{p}}^{(r)} + 1 \right\} . \end{aligned} \quad (3.28)$$

I positroni contribuiscono con una carica $-e = |e|$. Sottraendo la carica del vuoto, si ottiene

$$Q = e \sum_{\vec{p}, r} \left\{ N_{\vec{p}}^{(r)}(e^-) - N_{\vec{p}}^{(r)}(e^+) \right\}. \quad (3.29)$$

L'operatore impulso totale è dato da

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -i \hbar \int d^3x \psi^\dagger \vec{\nabla} \psi \\ &= \sum_{\vec{p}, r} \vec{p} \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} - d_{\vec{p}}^{(r)} d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} \right\} \\ &= \sum_{\vec{p}, r} \vec{p} \left\{ b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} b_{\vec{p}}^{(r)} + d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} d_{\vec{p}}^{(r)} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

E quindi, tenuto conto che $\sum_{\vec{p}} \vec{p} = 0$, possiamo scrivere

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p}, r} \vec{p} \left\{ N_{\vec{p}}^{(r)}(e^-) + N_{\vec{p}}^{(r)}(e^+) \right\}. \quad (3.31)$$

Notare che l'impulso dello stato di positrone $d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} |0\rangle$ è $+\vec{p}$, come quello dello stato di elettrone $b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} |0\rangle$. D'ora in poi potremo evitare il linguaggio della teoria dei buchi di Dirac (stati ad energia negativa, mare di Dirac, etc.); parleremo solo di elettroni e positroni con energia positiva.

3.4 Anticommutatori dei campi $\psi, \bar{\psi}$

Dalle espressioni (3.17) e (3.20) si ottiene

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = 0, \quad (3.32a)$$

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = -i S_{\alpha\beta}(x - x'), \quad (3.32b)$$

dove

$$S(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \left\{ (\not{p} + m) e^{-ip \cdot x} + (\not{p} - m) e^{ip \cdot x} \right\}_{p_0=E}. \quad (3.33)$$

Dimostriamo l'espressione (3.32b):

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} &= \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, r} \sum_{\vec{p}', r'} \frac{m}{\sqrt{EE'}} \left[u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}_\beta^{(r')}(\vec{p}') \underbrace{\left\{ b_{\vec{p}}^{(r)}, b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} \right\}}_{\delta_{r,r'} \delta_{\vec{p},\vec{p}'}} e^{-i(p \cdot x - p' \cdot x')} \right. \\ &\quad \left. + v_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{v}_\beta^{(r')}(\vec{p}') \underbrace{\left\{ d_{\vec{p}}^{(r)\dagger}, d_{\vec{p}'}^{(r')} \right\}}_{\delta_{r,r'} \delta_{\vec{p},\vec{p}'}} e^{i(p \cdot x - p' \cdot x')} \right]_{\substack{p_0=E \\ p'_0=E'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{m}{E} \left[\underbrace{\sum_r u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}_{\beta}^{(r)}(\vec{p})}_{\frac{(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{2m}} e^{-ip \cdot (x-x')} + \underbrace{\sum_r v_{\alpha}^{(r)}(\vec{p}) \bar{v}_{\beta}^{(r)}(\vec{p})}_{\frac{(\not{p}-m)_{\alpha\beta}}{2m}} e^{ip \cdot (x-x')} \right]_{p_0=E} \\
&= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2E} \left[(\not{p}+m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-x')} + (\not{p}-m)_{\alpha\beta} e^{ip \cdot (x-x')} \right]_{p_0=E} \\
&\xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E} \left[(\not{p}+m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-x')} + (\not{p}-m)_{\alpha\beta} e^{ip \cdot (x-x')} \right]_{p_0=E} \\
&\equiv -i S_{\alpha\beta}(x-x').
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Notiamo che la funzione $S(x)$ gode delle seguenti proprietà:

1. $S(x)$ può essere scritta nel modo seguente:

$$S(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p (\not{p}+m) e^{-ip \cdot x} \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2). \tag{3.35}$$

Infatti, utilizzando la proprietà (2.53) si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p (\not{p}+m) e^{-ip \cdot x} \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2) = \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p (\not{p}+m) e^{-ip \cdot x} \epsilon(p_0) \frac{1}{2E} [\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E)] \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \left\{ \int \frac{d^3 p}{2E} [(\not{p}+m) e^{-ip \cdot x}]_{p_0=E} - \underbrace{\int \frac{d^3 p}{2E} [(\not{p}+m) e^{-ip \cdot x}]_{p_0=-E}}_{\int \frac{d^3 p}{2E} [(-\not{p}+m) e^{ip \cdot x}]_{p_0=E}} \right\} \\
&\equiv S(x).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

2. $S(x-x')$ può essere espresso come

$$S(x-x') = -(i \not{\partial}_x + m) \Delta(x-x'). \tag{3.37}$$

Infatti, utilizzando la (2.52) si ha

$$\begin{aligned}
&-(i \not{\partial}_x + m) \Delta(x-x') = \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p (i \not{\partial}_x + m) e^{-ip \cdot (x-x')} \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2) \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p (\not{p}+m) e^{-ip \cdot (x-x')} \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2) \equiv S(x-x').
\end{aligned} \tag{3.38}$$

3. Dalle (3.32b) e (3.37) e dalla proprietà 4 della $\Delta(x-x')$ (vedi par.2.2), segue che per distanze di tipo spazio $S(x-x') = 0$ e perciò

$$\{\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x')\} = 0 \quad \text{se} \quad (x-x')^2 < 0. \tag{3.39}$$

3.5 Dimensioni degli operatori di campo

A conclusione di questo capitolo discutiamo la dimensione da associare agli operatori di campo $\psi(x)$ e $\varphi(x)$ precedentemente definiti. Osserviamo innanzi tutto che una generica densità lagrangiana ha dimensione

$$[\mathcal{L}] = \left[\frac{E}{\ell^3} \right] \xrightarrow{\text{unità naturali}} [m^4]. \quad (3.40)$$

Dalla densità lagrangiana (3.8) per il campo di spin 1/2 si vede che $[E][\bar{\psi}\psi] = [\frac{E}{\ell^3}]$, per cui l'operatore di campo fermionico ha dimensione

$$[\psi] = \left[\frac{1}{\ell^{3/2}} \right] \xrightarrow{\text{unità naturali}} [m^{3/2}]. \quad (3.41)$$

Inoltre, dalla (3.17), tenuto conto che gli spinori u e v sono adimensionali, si vede che gli operatori b , d sono adimensionali.

Dalla densità lagrangiana per un campo scalare, che in unità ordinarie è usualmente definita come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\vec{\nabla} \varphi \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 \varphi^2, \quad (3.42)$$

si ottiene $[\ell^{-2}][\varphi^2] = [\frac{E}{\ell^3}]$. Quindi l'operatore di campo scalare ha dimensione

$$[\varphi] = \left[\frac{E^{1/2}}{\ell^{1/2}} \right] \xrightarrow{\text{unità naturali}} [m]. \quad (3.43)$$

Dalla (2.41a), si vede che gli operatori $a_{\vec{k}}$ sono adimensionali (notare che la (2.41a) è scritta in unità naturali).

Capitolo 4

Interazione campo di Dirac – campo elettromagnetico

4.1 Operatore lagrangiano ed operatore hamiltoniano

Come visto al paragrafo 4.2 della Parte prima, l'equazione per un elettrone in un campo elettromagnetico si ottiene dall'equazione libera di Dirac mediante la sostituzione di accoppiamento minimo

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i e A_\mu. \quad (4.1)$$

Questa stessa prescrizione viene utilizzata per generare, a partire dalla densità lagrangiana libera di Dirac $\mathcal{L}_D$, la densità lagrangiana con accoppiamento dell'elettrone al campo elettromagnetico; ossia

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \xrightarrow{\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i e A_\mu} \mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - e \not{A} - m) \psi \equiv \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I, \quad (4.2)$$

dove

$$\boxed{\mathcal{L}_I = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu = -e j^\mu A_\mu} \quad (4.3)$$

è la densità lagrangiana di interazione.

La densità hamiltoniana di interazione si ottiene da $\mathcal{L}_I$ nel modo usuale:

$$\mathcal{H}_I = \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\bar{\psi}}} + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{A}_\mu} \dot{A}_\mu - \mathcal{L}_I. \quad (4.4)$$

Dal momento che $\mathcal{L}_I$ non contiene derivate degli operatori di campo, si ha

$$\boxed{\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu = e j^\mu A_\mu}. \quad (4.5)$$

La densità lagrangiana di interazione (4.3) associata alla densità lagrangiana libera elettromagnetica

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.6)$$

permette anche di ricavare le equazioni del campo elettromagnetico in presenza di una corrente j^μ . Infatti, dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_I = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e j^\mu A_\mu \quad (4.7)$$

si ottiene l'equazione di Euler-Lagrange

$$\square A_\mu - \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = e j_\mu. \quad (4.8)$$

Esaminiamo ora la variazione della densità lagrangiana (4.7) per trasformazioni di gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \varphi$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e j^\mu A_\mu \xrightarrow{A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \varphi} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e j^\mu A_\mu - e j^\mu \partial_\mu \varphi \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e j^\mu A_\mu - e \partial_\mu (j^\mu \varphi) + e \varphi \partial_\mu j^\mu. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dal momento che, al solito, un termine di quadri-divergenza è ininfluenza nella densità lagrangiana, ne discende che $\mathcal{L}$ è invariante per trasformazioni di gauge su A_μ se e solo se la corrente è conservata:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}. \quad (4.10)$$

Analizziamo ora qual è la funzione dell'operatore densità hamiltoniana di interazione $\mathcal{H}_I$. Scomponiamo gli operatori di campo fermionici in parte a frequenza positiva e parte a frequenza negativa:

$$\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}, \quad (4.11a)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)}, \quad (4.11b)$$

dove

$$\psi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, r} \sqrt{\frac{m}{E}} b_{\vec{p}}^{(r)} u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \Big|_{p_0=E} \quad \text{distrugge } e^-, \quad (4.12a)$$

$$\psi^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, r} \sqrt{\frac{m}{E}} d_{\vec{p}}^{(r)\dagger} v^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \Big|_{p_0=E} \quad \text{crea } e^+, \quad (4.12b)$$

$$\bar{\psi}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, r} \sqrt{\frac{m}{E}} d_{\vec{p}}^{(r)} \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \Big|_{p_0=E} \quad \text{distrugge } e^+, \quad (4.12c)$$

$$\bar{\psi}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, r} \sqrt{\frac{m}{E}} b_{\vec{p}}^{(r)\dagger} \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \Big|_{p_0=E} \quad \text{crea } e^-. \quad (4.12d)$$

Sostituendo le (4.11) nella (4.5) si ottiene

$$\mathcal{H}_I = e \left(\bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)} \right) \gamma^\mu \left(\psi^{(+)} + \psi^{(-)} \right) A_\mu$$

$$= e \bar{\psi}^{(-)} \gamma^\mu \psi^{(+)} A_\mu \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} e^- \quad \quad e^- \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \gamma \end{array} \quad (4.13a)$$

$$+ e \bar{\psi}^{(+)} \gamma^\mu \psi^{(-)} A_\mu \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} e^+ \quad e^+ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \gamma \end{array} \quad (4.13b)$$

$$+ e \bar{\psi}^{(+)} \gamma^\mu \psi^{(+)} A_\mu \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} e^- \\ \diagdown \\ e^+ \quad \gamma \end{array} \quad (4.13c)$$

$$+ e \bar{\psi}^{(-)} \gamma^\mu \psi^{(-)} A_\mu \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} e^- \\ \gamma \quad \diagup \\ e^+ \end{array} \quad (4.13d)$$

Questa rappresentazione grafica mostra il ruolo che $\mathcal{H}_I$ può avere nella descrizione di un determinato processo fisico, una volta che si fissi la direzione e il verso in cui fluisce il tempo (da sinistra a destra nella nostra convenzione). Il fotone può essere quello emesso o assorbito da una sorgente esterna (per esempio un nucleo atomico). I grafici illustrati nella (4.13) possono quindi essere interpretati come rappresentanti rispettivamente: la diffusione di un elettrone, la diffusione di un positrone, l'annichilazione di una coppia e^-e^+ e la creazione di una coppia e^-e^+ .

Nello spazio degli impulsi si hanno le seguenti associazioni tra operatori di campo ed elementi grafici:

$$\psi^{(+)}: \text{annichilazione di un elettrone} \\ \text{con spinore } u^{(r)}(\vec{p}) \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \vec{p} \end{array} \quad (4.14a)$$

$$\psi^{(-)}: \text{creazione di un positrone} \\ \text{con spinore } v^{(r)}(\vec{p}) \quad \begin{array}{c} \nearrow \vec{p} \\ \bullet \end{array} \quad (4.14b)$$

$$\bar{\psi}^{(-)}: \text{creazione di un elettrone} \\ \text{con spinore } \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \quad \begin{array}{c} \nearrow \vec{p} \\ \bullet \end{array} \quad (4.14c)$$

$$\bar{\psi}^{(+)}: \text{annichilazione di un positrone} \\ \text{con spinore } \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \vec{p} \end{array} \quad (4.14d)$$

4.2 Anticommutatori degli operatori di campo $\psi^{(\pm)}$ e $\bar{\psi}^{(\pm)}$

Per calcolare gli anticommutatori degli operatori di campo $\psi^{(\pm)}$ e $\bar{\psi}^{(\pm)}$ si utilizza lo stesso metodo impiegato nella (3.34) per calcolare l'anticommutatore di ψ e $\bar{\psi}$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2E} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-x')} \Big|_{p_0=E} \\ &\xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-x')} \Big|_{p_0=E} \equiv -i S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'), \end{aligned} \quad (4.15a)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2E} (\not{p} - m)_{\alpha\beta} e^{ip \cdot (x-x')} \Big|_{p_0=E} \\ &\xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} (\not{p} - m)_{\alpha\beta} e^{ip \cdot (x-x')} \Big|_{p_0=E} \equiv -i S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x'). \end{aligned} \quad (4.15b)$$

Gli altri anticommutatori sono nulli. Dalle (4.15) è possibile riottenere la relazione di anticommutazione (3.32b):

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x') \right\} &= \left\{ \psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(x') \right\} + \left\{ \psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(x') \right\} \\ &= -i \left[S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x') + S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x') \right] = -i S_{\alpha\beta}(x-x'). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Capitolo 5

Teoria perturbativa della matrice $\mathcal{S}$

5.1 Introduzione

Passiamo ora allo studio di processi fisici in cui avviene una transizione tra due diversi stati fisici (processi di scattering e decadimenti di particelle). Per trattare questo problema è necessario innanzi tutto specificare lo stato iniziale e lo stato finale. Perciò bisogna:

1. Individuare un insieme completo di stati ad una particella.
2. Specificare il numero di particelle in ciascuno di questi stati scrivendo il vettore di stato

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \equiv \Phi(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots), \quad (5.1)$$

analogo della funzione d'onda in una teoria ad una particella. I vettori di stato costituiscono una base ortonormale in uno spazio vettoriale ad infinite dimensioni (spazio di Fock):

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | n'_1, n'_2, \dots, n'_i, \dots \rangle = (\Phi(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots), \Phi(n'_1, n'_2, \dots, n'_i, \dots)) \quad (5.2)$$

$$= \prod_i \delta_{n_i, n'_i}. \quad (5.3)$$

Per ogni processo fisico si definirà quindi lo stato iniziale e quello finale mediante i vettori di stato (5.1); questi sono stati asintotici (rispettivamente ai tempi $t = -\infty$ e $t = +\infty$), autostati di un operatore hamiltoniano libero $\mathcal{H}_0$. La transizione dallo stato asintotico iniziale (a $t = -\infty$) a quello asintotico finale (a $t = +\infty$) è imputata ad un opportuno operatore hamiltoniano di interazione $\mathcal{H}_I$.

Ad esempio, lo scattering Compton può essere schematizzato dal grafico

$$(5.4)$$

Gli stati asintotici (iniziale e finale) descrivono entrambi un elettrone ed un fotone liberi (con impulsi e polarizzazioni indicati dalle notazioni in figura). Questi stati sono autostati degli operatori hamiltoniani liberi del campo di Dirac e del campo elettromagnetico. La transizione tra i due stati è indotta dall'operatore di interazione

$$\mathcal{H}_I = e j^\mu A_\mu. \quad (5.5)$$

In questo capitolo sviluppiamo un formalismo generale utile a trattare i problemi sopra esposti.

5.2 Rappresentazione di interazione

Nella rappresentazione di Schrödinger i vettori di stato sono dipendenti dal tempo, mentre gli operatori sono indipendenti dal tempo. Viceversa, nella rappresentazione di Heisenberg i vettori di stato sono indipendenti dal tempo, mentre gli operatori sono dipendenti dal tempo. La rappresentazione di interazione è una rappresentazione intermedia tra quella di Schrödinger e quella di Heisenberg: nella rappresentazione di interazione i vettori di stato hanno una dipendenza temporale dovuta all'operatore hamiltoniano di interazione, mentre gli operatori dipendono dal tempo attraverso l'operatore hamiltoniano libero.

In rappresentazione di Schrödinger la dipendenza temporale dei vettori di stato $\Phi^S(t)$ è data da

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi^S(t) = H^S \Phi^S(t) = (H_0^S + H_I^S) \Phi^S(t). \quad (5.6)$$

Gli stati $\Phi(t)$ e gli operatori $\Omega(t)$ in rappresentazione di interazione si ottengono dai loro corrispondenti $\Phi^S(t)$, Ω^S in rappresentazione di Schrödinger mediante la trasformazione

$$\Phi(t) = e^{iH_0^S t} \Phi^S(t), \quad (5.7a)$$

$$\Omega(t) = e^{iH_0^S t} \Omega^S e^{-iH_0^S t}. \quad (5.7b)$$

La dipendenza temporale degli stati $\Phi(t)$ è data da

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) &= -H_0^S e^{iH_0^S t} \Phi^S(t) + e^{iH_0^S t} i \frac{\partial}{\partial t} \Phi^S(t) \\ &= -H_0^S e^{iH_0^S t} \Phi^S(t) + e^{iH_0^S t} (H_0^S + H_I^S) \Phi^S(t) \\ &= e^{iH_0^S t} H_I^S e^{-iH_0^S t} e^{iH_0^S t} \Phi^S(t) \equiv H_I(t) \Phi(t), \end{aligned} \quad (5.8)$$

mentre la dipendenza temporale degli operatori $\Omega(t)$ è data da

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega(t)}{dt} &= i H_0^S e^{iH_0^S t} \Omega^S e^{-iH_0^S t} - i e^{iH_0^S t} \Omega^S e^{-iH_0^S t} H_0^S \\ &= i [H_0^S, \Omega(t)] = i [H_0, \Omega(t)], \end{aligned} \quad (5.9)$$

perchè

$$H_I(t) = e^{iH_0^S t} H_I^S e^{-iH_0^S t}, \quad (5.10a)$$

$$H_0 = e^{iH_0^S t} H_0^S e^{-iH_0^S t} = H_0^S. \quad (5.10b)$$

Perciò, nella rappresentazione di interazione gli operatori di campo soddisfano le equazioni di campi liberi anche in presenza di interazione. Questa proprietà rende particolarmente utile l'impiego della rappresentazione di interazione.

5.3 Matrice $\mathcal{S}$ e suo sviluppo perturbativo

Risolviamo l'equazione (5.8) in modo appropriato a problemi di scattering. Definiamo un operatore U tale che

$$\Phi(t) = U(t, t_0) \Phi(t_0), \quad \text{con} \quad U(t_0, t_0) = 1, \quad (5.11)$$

e sostituiamo la (5.11) nella (5.8):

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \right) \Phi(t_0) = H_I(t) U(t, t_0) \Phi(t_0). \quad (5.12)$$

Eliminando la $\Phi(t_0)$ ed integrando, otteniamo l'equazione integrale

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') U(t', t_0). \quad (5.13)$$

Quest'equazione può essere risolta perturbativamente iterando la soluzione:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \left[1 - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) U(t_2, t_0) \right] \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots \\ &\quad \dots + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

Se Φ_i è il vettore di stato al tempo iniziale t_0 , il vettore di stato $\Phi(t)$ al tempo t è dato da

$$\Phi(t) = U(t, t_0) \Phi_i. \quad (5.15)$$

L'ampiezza di probabilità di avere al tempo t lo stato Φ_f è data da

$$(\Phi_f, \Phi(t)) = (\Phi_f, U(t, t_0) \Phi_i) \equiv U_{fi}(t, t_0). \quad (5.16)$$

La probabilità di transizione per unità di tempo dallo stato Φ_i allo stato Φ_f è data da

$$P_{fi} = \frac{|U_{fi}(t, t_0) - \delta_{fi}|^2}{t - t_0}. \quad (5.17)$$

Definiamo gli stati asintotici $\Phi(-\infty)$ e $\Phi(+\infty)$ ai tempi $t = -\infty$ e $t = +\infty$, rispettivamente, cioè molto prima e molto dopo il processo di interazione. Gli stati asintotici $\Phi(-\infty)$ e $\Phi(+\infty)$ sono stati di particelle libere. Essi sono connessi dall'operatore U :

$$\Phi(+\infty) = U(+\infty, -\infty) \Phi(-\infty) \equiv \mathcal{S} \Phi(-\infty), \quad (5.18)$$

dove abbiamo definito l'operatore $\mathcal{S} \equiv U(+\infty, -\infty)$, che ha lo sviluppo perturbativo

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots \\ &\equiv 1 + \mathcal{S}^{(1)} + \mathcal{S}^{(2)} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n). \end{aligned} \quad (5.19)$$

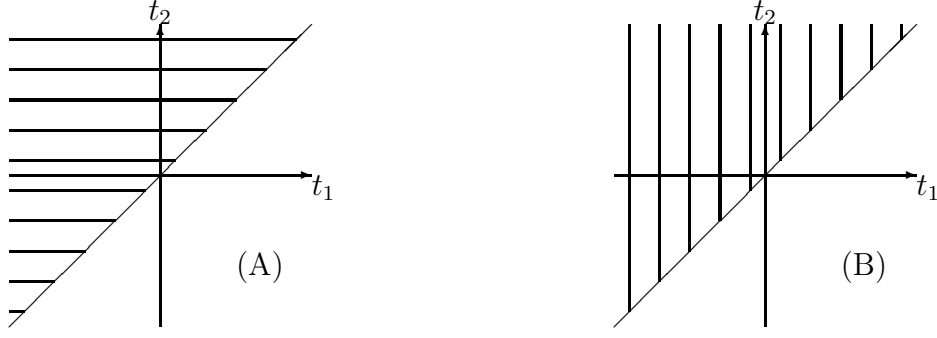


Figura 5.1: Dominio di integrazione per calcolare $\mathcal{S}^{(2)}$: (A) corrisponde alla (5.21), mentre (B) corrisponde alla (5.22).

Per mettere $\mathcal{S}$ in una scrittura più conveniente, prendiamo in esame il termine del second'ordine $\mathcal{S}^{(2)}$,

$$\mathcal{S}^{(2)} = (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2), \quad (5.20a)$$

e dimostriamo che $\mathcal{S}^{(2)}$ può essere riscritto nel modo seguente:

$$\mathcal{S}^{(2)} = (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{t_1}^{+\infty} dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1). \quad (5.20b)$$

Notare che l'ordine dei fattori nella funzione integranda va mantenuto perchè le H_I a tempi diversi in generale non commutano (la loro dipendenza temporale dipende da H_0 secondo la (5.10a)). Per dimostrare la (5.20b), riscriviamo la (5.20a) scambiando $t_1 \leftrightarrow t_2$:

$$\mathcal{S}^{(2)} = (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1). \quad (5.21)$$

Come illustrato dalla figura 5.1, l'integrazione nel piano t_1 - t_2 interessa il semipiano $t_2 > t_1$. Nella (5.21) l'integrazione viene fatta prima sulle linee orizzontali, come illustrato dalla figura 5.1A, ma può essere eseguita prima sulle linee verticali nella stessa regione, come illustrato dalla figura 5.1B. Quindi $\mathcal{S}^{(2)}$ può essere riscritto come

$$\mathcal{S}^{(2)} = (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{t_1}^{+\infty} dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1), \quad (5.22)$$

che coincide con la (5.20b).

Utilizzando le (5.20), $\mathcal{S}^{(2)}$ può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \left[\int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (H_I(t_1) H_I(t_2)) + \int_{t_1}^{+\infty} dt_2 (H_I(t_2) H_I(t_1)) \right] \\ &= \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 P[H_I(t_1) H_I(t_2)] \\ &= \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 P[\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2)], \end{aligned} \quad (5.23)$$

avendo definito il prodotto cronologico (o prodotto ordinato temporalmente) di Dyson

$$P[\phi(x)\phi(x')] = \begin{cases} \phi(x)\phi(x') & \text{se } x_0 > x'_0, \\ \phi(x')\phi(x) & \text{se } x'_0 > x_0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Generalizzando la definizione di P al caso del prodotto di un numero qualsiasi di campi, si dimostra che $\mathcal{S}^{(n)}$ è dato da

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(n)} &= \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n P[H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)] \\ &= \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n P[\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)] . \end{aligned} \quad (5.25)$$

L'espressione (5.14) per l'operatore $\mathcal{S}$ diventa quindi

$$\boxed{\mathcal{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n P[\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)]} . \quad (5.26)$$

Si può dimostrare che $\mathcal{S}$ soddisfa alla condizione di unitarietà

$$\boxed{\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger = \mathcal{S}^\dagger\mathcal{S} = \mathbb{1}} , \quad (5.27)$$

ossia

$$\sum_n \mathcal{S}_{fn} \mathcal{S}_{in}^* = \sum_n \mathcal{S}_{nf}^* \mathcal{S}_{ni} = \delta_{fi} , \quad (5.28)$$

5.4 Prodotto normale

Il prodotto normale di operatori è il prodotto degli operatori stessi ordinato in modo tale che gli operatori di distruzione compaiano tutti sulla destra; per riordinare tutti i fattori, i campi bosonici vengono considerati commutanti tra di loro e con i campi fermionici, mentre i campi fermionici vengono considerati anticommutanti tra di loro.

Ad esempio, per un campo scalare φ si ha

$$\begin{aligned} N[\varphi^{(+)}\varphi^{(-)}] &= \varphi^{(-)}\varphi^{(+)} , & N[\varphi^{(-)}\varphi^{(+)}] &= \varphi^{(-)}\varphi^{(+)} , \\ N[\varphi^{(+)}\varphi^{(+)}] &= \varphi^{(+)}\varphi^{(+)} , & N[\varphi^{(-)}\varphi^{(-)}] &= \varphi^{(-)}\varphi^{(-)} , \end{aligned} \quad (5.29)$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} N[\varphi\varphi] &= N[(\varphi^{(+)} + \varphi^{(-)}) (\varphi^{(+)} + \varphi^{(-)})] \\ &= \varphi^{(+)}\varphi^{(+)} + 2\varphi^{(-)}\varphi^{(+)} + \varphi^{(-)}\varphi^{(-)} . \end{aligned} \quad (5.30)$$

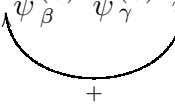
Relazioni analoghe valgono per il campo fotonico. D'altra parte, per un campo fermionico ψ si ha

$$\begin{aligned} N[\psi_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(-)}] &= -\psi_\beta^{(-)}\psi_\alpha^{(+)} , & N[\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\bar{\psi}_\beta^{(-)}] &= -\bar{\psi}_\beta^{(-)}\bar{\psi}_\alpha^{(+)} , \\ N[\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(-)}] &= -\psi_\beta^{(-)}\bar{\psi}_\alpha^{(+)} , & N[\psi_\alpha^{(+)}\bar{\psi}_\beta^{(-)}] &= -\bar{\psi}_\beta^{(-)}\psi_\alpha^{(+)} , \end{aligned} \quad (5.31)$$

mentre per le altre coppie di operatori $\psi_\alpha^{(\pm)}$, $\bar{\psi}_\beta^{(\pm)}$ il prodotto normale lascia l'ordinamento invariato; per cui si ha, per esempio,

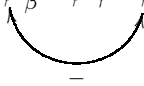
$$\begin{aligned} N[\bar{\psi}_\alpha \psi_\beta] &= N\left[\left(\bar{\psi}_\alpha^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\right) \left(\psi_\beta^{(+)} + \psi_\beta^{(-)}\right)\right] \\ &= \bar{\psi}_\alpha^{(+)} \psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\beta^{(+)} - \psi_\beta^{(-)} \bar{\psi}_\alpha^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\beta^{(-)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Nel caso di un prodotto di più di due campi fermionici si ha, ad esempio,

$$N\left[\bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\beta^{(+)} \bar{\psi}_\gamma^{(+)} \psi_\delta^{(-)}\right] = \bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\delta^{(-)} \psi_\beta^{(+)} \bar{\psi}_\gamma^{(+)} = -\bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\delta^{(-)} \bar{\psi}_\gamma^{(+)} \psi_\beta^{(+)}.$$


$$+ \quad (5.33)$$

Ciò è equivalente a

$$N\left[\bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\beta^{(+)} \bar{\psi}_\gamma^{(+)} \psi_\delta^{(-)}\right] = -\bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\delta^{(-)} \bar{\psi}_\gamma^{(+)} \psi_\beta^{(+)}.$$


$$- \quad (5.34)$$

Quindi si ha un segno meno in corrispondenza di ogni scambio di operatori fermionici. Perciò, in generale, si ha

$$N[A_1 A_2 \dots A_n] = (-1)^P B_1 B_2 \dots B_n, \quad (5.35)$$

dove P è il numero di scambi di coppie di operatori fermionici e il prodotto $B_1 B_2 \dots B_n$ contiene gli stessi operatori del prodotto $A_1 A_2 \dots A_n$, ma ordinati in modo che gli operatori di distruzione compaiano tutti sulla destra.

Un'altra notazione usata per il prodotto normale è

$$: AB : \equiv N[AB]. \quad (5.36)$$

► Proprietà del prodotto normale

Il valore medio nel vuoto di un prodotto normale di operatori è nullo:

$$\langle 0 | N[A_1 A_2 \dots A_n] | 0 \rangle = 0, \quad (5.37)$$

a causa dell'applicazione diretta di un operatore di distruzione sul ket $|0\rangle$ o di un operatore di creazione sul bra $\langle 0|$.

Vediamo ora come un prodotto ordinario possa essere espresso in termini di prodotto normale. Osserviamo innanzi tutto che, dati due operatori di campo (fermionici o bosonici) A e B , si ha

$$AB = N[AB] + c, \quad (5.38)$$

dove c è un numero (non un operatore). Infatti, per esempio,

$$N[A^{(+)} B^{(-)}] = \pm B^{(-)} A^{(+)} = A^{(+)} B^{(-)} \underbrace{- A^{(+)} B^{(-)} \pm B^{(-)} A^{(+)}}_{-[A^{(+)}, B^{(-)}]_{\mp}}, \quad (5.39)$$

dove il segno superiore (inferiore) si riferisce al caso di campi bosonici (fermionici). Quindi in questo caso c è dato da

$$c = A^{(+)}B^{(-)} - N[A^{(+)}B^{(-)}] = [A^{(+)}, B^{(-)}]_{\mp}, \quad (5.40)$$

e perciò non ha carattere operatoriale, come segue dai risultati trovati precedentemente per i commutatori dei campi bosonici e per gli anticommutatori dei campi fermionici.

Prendendo il valore medio nel vuoto della (5.38), si trova

$$c = \langle 0|AB|0 \rangle, \quad (5.41)$$

ossia

$$\boxed{AB = N[AB] + \langle 0|AB|0 \rangle}. \quad (5.42)$$

Inoltre, vale l'ovvia proprietà

$$N[AB] = \pm N[BA], \quad (5.43)$$

dove il segno superiore (inferiore) vale per due campi bosonici (fermionici).

5.5 $\mathcal{H}_I$ espresso come prodotto normale

La sottrazione della carica negativa infinita del mare di Dirac (vedi la sezione 3.3)

$$Q = e \int d^3x \psi^\dagger \psi = e \sum_{\vec{p}, r} \left[N_{\vec{p}}^{(r)}(e^-) - N_{\vec{p}}^{(r)}(e^+) + 1 \right] \implies Q = e \sum_{\vec{p}, r} \left[N_{\vec{p}}^{(r)}(e^-) - N_{\vec{p}}^{(r)}(e^+) \right] \quad (5.44)$$

equivale a definire una densità di carica

$$\rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi - \langle 0 | \bar{\psi} \gamma^0 \psi | 0 \rangle \equiv \psi^\dagger \psi - \langle 0 | \psi^\dagger \psi | 0 \rangle. \quad (5.45)$$

Infatti,

$$Q = e \int d^3x \left[\psi^\dagger \psi - \langle 0 | \psi^\dagger \psi | 0 \rangle \right] \quad (5.46)$$

$$= e \sum_{\vec{p}, r} \left[N_{\vec{p}}^{(r)}(e^-) - N_{\vec{p}}^{(r)}(e^+) + 1 \right] - e \sum_{\vec{p}, r} \underbrace{\langle 0 | \left[N_{\vec{p}}^{(r)}(e^-) - N_{\vec{p}}^{(r)}(e^+) + 1 \right] | 0 \rangle}_{\langle 0 | 0 \rangle} \quad (5.47)$$

$$= e \sum_{\vec{p}, r} \left[N_{\vec{p}}^{(r)}(e^-) - N_{\vec{p}}^{(r)}(e^+) \right]. \quad (5.48)$$

Per il quadri-vettore densità di corrente si deve quindi adottare la definizione

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \langle 0 | \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | 0 \rangle = N \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] \quad (5.49)$$

e per la densità hamiltoniana si ha

$$\mathcal{H}_I(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \implies \mathcal{H}_I(x) = e N \left[\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \right]. \quad (5.50)$$

L'operatore $\mathcal{S}$ per l'elettrodinamica quantistica è quindi dato da

$$\boxed{\mathcal{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n P \left[N \left[\bar{\psi} A \psi \right]_{x_1} N \left[\bar{\psi} A \psi \right]_{x_2} \dots N \left[\bar{\psi} A \psi \right]_{x_n} \right]}. \quad (5.51)$$

5.6 Prodotto cronologico di Wick

Il prodotto cronologico di Wick per operatori bosonici è definito da

$$T[A(x)B(x')] = P[A(x)B(x')] , \quad (5.52a)$$

mentre per operatori fermionici è definito da

$$T[A(x)B(x')] = \begin{cases} A(x)B(x') & \text{se } x_0 > x'_0 , \\ -B(x')A(x) & \text{se } x'_0 > x_0 . \end{cases} \quad (5.52b)$$

Quindi, in generale si ha

$$T[A(x_1)B(x_2)\dots] = (-1)^P P[A(x_1)B(x_2)\dots] , \quad (5.53)$$

dove P è il numero di scambi di coppie di campi fermionici necessario per riordinare temporalmente il prodotto.

Nel caso dell'elettrodinamica quantistica, essendo $\mathcal{H}_I$ bilineare nei campi fermionici, P è equivalente a T e quindi per l'operatore $\mathcal{S}$ si ha

$$\boxed{\mathcal{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n T \left[N \left[\bar{\psi} A \psi \right]_{x_1} N \left[\bar{\psi} A \psi \right]_{x_2} \dots N \left[\bar{\psi} A \psi \right]_{x_n} \right]} . \quad (5.54)$$

Questo sviluppo perturbativo risulta essere rapidamente convergente in virtù del fatto che la costante (adimensionale) di struttura fine $\alpha \equiv e^2/4\pi$ è molto piccola rispetto all'unità ($\alpha^{-1} \simeq 137$). Quindi, in elettrodinamica quantistica basta tenere conto dei primi termini dello sviluppo (5.54) per avere un buon accordo con i dati osservativi.

Per il prodotto cronologico di Wick esiste una formula analoga alla (5.42). Infatti, tenendo conto delle proprietà (5.52), (5.42) e (5.43) si ha

$$\begin{aligned} T[A(x_1)B(x_2)] &= \theta(x_1^0 - x_2^0) A(x_1)B(x_2) \pm \theta(x_2^0 - x_1^0) B(x_2)A(x_1) \\ &= \theta(x_1^0 - x_2^0) (N[A(x_1)B(x_2)] + \langle 0|A(x_1)B(x_2)|0\rangle) \\ &\quad \pm \theta(x_2^0 - x_1^0) (N[B(x_2)A(x_1)] + \langle 0|B(x_2)A(x_1)|0\rangle) \\ &= \theta(x_1^0 - x_2^0) (N[A(x_1)B(x_2)] + \langle 0|A(x_1)B(x_2)|0\rangle) \\ &\quad + \theta(x_2^0 - x_1^0) (N[A(x_1)B(x_2)] \pm \langle 0|B(x_2)A(x_1)|0\rangle) \\ &= N[A(x_1)B(x_2)] + \langle 0|T[A(x_1)B(x_2)]|0\rangle , \end{aligned} \quad (5.55)$$

ossia

$$\boxed{T[A(x_1)B(x_2)] = N[A(x_1)B(x_2)] + \langle 0|T[A(x_1)B(x_2)]|0\rangle} . \quad (5.56)$$

Per il valor medio nel vuoto del prodotto cronologico di Wick di due operatori di campo viene anche utilizzata la notazione (contrazione di A e B)

$$\langle 0|T[A(x_1)B(x_2)]|0\rangle = \underbrace{A(x_1)B(x_2)} . \quad (5.57)$$

Questo valore medio è diverso da zero solo se un operatore crea una particella e l'altro la distrugge.

5.7 Contrazione di campi fermionici

Vogliamo ora calcolare la seguente contrazione:

$$\underbrace{\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')} = \langle 0 | T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')] | 0 \rangle . \quad (5.58)$$

Il prodotto cronologico di Wick $T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')]$ è dato da

$$T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')] = \begin{cases} \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') & \text{se } x_0 > x'_0 , \\ -\bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) & \text{se } x'_0 > x_0 . \end{cases} \quad (5.59)$$

Tenendo conto che $\psi^{(+)}|0\rangle = \bar{\psi}^{(+)}|0\rangle = 0$ e $\langle 0|\psi^{(-)} = \langle 0|\bar{\psi}^{(-)} = 0$, si ottiene

$$\langle 0 | T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')] | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \psi_\alpha^{(+)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(-)}(x') | 0 \rangle & \text{se } x_0 > x'_0 , \\ -\langle 0 | \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x') \psi_\alpha^{(-)}(x) | 0 \rangle & \text{se } x'_0 > x_0 . \end{cases} \quad (5.60)$$

Calcoliamo $\langle 0 | \psi_\alpha^{(+)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(-)}(x') | 0 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_\alpha^{(+)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(-)}(x') | 0 \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, r} \sum_{\vec{p}', r'} \frac{m}{\sqrt{E E'}} \left[u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}_\beta^{(r')}(\vec{p}') \underbrace{\langle 0 | b_{\vec{p}}^{(r)} b_{\vec{p}'}^{(r')\dagger} | 0 \rangle}_{\delta_{r, r'} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}} e^{-i(p \cdot x - p' \cdot x')} \right]_{\substack{p_0=E \\ p'_0=E'}} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{m}{E} \underbrace{\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}_\beta^{(r)}(\vec{p})}_{\frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{2m}} e^{-ip \cdot (x - x')} \Big|_{p_0=E} \\ &\xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x - x')} \Big|_{p_0=E} . \end{aligned} \quad (5.61)$$

Analogamente, si ha

$$\langle 0 | \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x') \psi_\alpha^{(-)}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E} (\not{p} - m)_{\alpha\beta} e^{ip \cdot (x - x')} \Big|_{p_0=E} , \quad (5.62)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')] | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E} \left[\theta(x_0 - x'_0) (\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x - x')} - \theta(x'_0 - x_0) (\not{p} - m)_{\alpha\beta} e^{ip \cdot (x - x')} \right]_{p_0=E} . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Tenendo conto della (7.15) della Parte prima, pag.I.67, possiamo scrivere

$$\langle 0 | T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')] | 0 \rangle = i [K_F(x - x')]_{\alpha\beta} . \quad (5.64)$$

Come si è visto nella sezione 7.1 della Parte prima, $K_F(x)$ può essere scritto nella forma

$$K_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4 p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot x} , \quad (5.65)$$

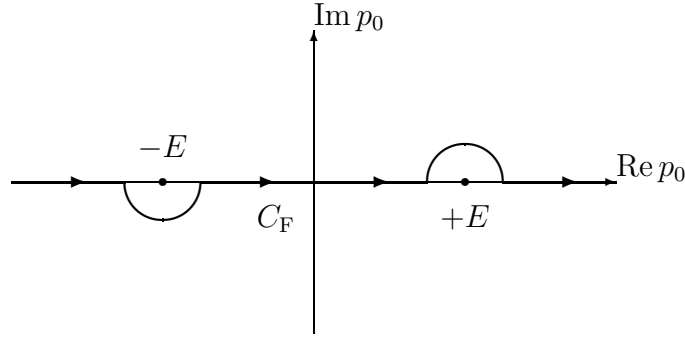


Figura 5.2: Il cammino di integrazione C_F di Feynman.

dove C_F è il cammino di integrazione di Feynman nel piano complesso della p_0 , illustrato nella figura 5.2.

Abbiamo perciò dimostrato che

$$\boxed{\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')} = i [K_F(x - x')]_{\alpha\beta}. \quad (5.66)$$

La contrazione $\underbrace{\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')}$ viene anche detta *propagatore di Feynman per l'elettrone*, ed infatti rappresenta la propagazione di un elettrone (virtuale) generato nel punto x' ed assorbito nel punto x . Dai risultati precedenti si ha quindi che il propagatore dell'elettrone nello spazio degli impulsi è

$$iK_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.67)$$

Notiamo inoltre che dalla definizione di prodotto T segue che

$$\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x')} = - \underbrace{\psi_\beta(x') \bar{\psi}_\alpha(x)} = -i [K_F(x' - x)]_{\beta\alpha}. \quad (5.68)$$

Le altre contrazioni di operatori fermionici danno risultato nullo:

$$\underbrace{\psi_\alpha(x) \psi_\beta(x')} = \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')} = 0. \quad (5.69)$$

Analogamente, le contrazioni tra campi diversi danno risultato nullo:

$$\underbrace{\psi_\alpha(x) A_\mu(x')} = \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x) A_\mu(x')} = 0. \quad (5.70)$$

La contrazione $\underbrace{A_\mu(x) A_\nu(x')}$ verrà discussa in seguito.

5.8 Teorema di Wick

Per generalizzare la (5.56) al caso di un prodotto di più di due operatori, introduciamo la definizione di prodotto normale generalizzato:

$$N[\underbrace{A B C \dots K L M \dots}] = (-1)^P \underbrace{A L} \underbrace{C M} N[B \dots K \dots], \quad (5.71)$$

dove P è il numero di scambi di operatori fermionici effettuato per estrarre dal prodotto normale gli operatori contratti. Ad esempio,

$$N[\underbrace{\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)A_\mu(x_4)\psi_\delta(x_5)}_{\text{contratti}}] = -\underbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\delta(x_5)}_{\text{contratti}} N[\psi_\alpha(x_1)\psi_\gamma(x_3)A_\mu(x_4)] . \quad (5.72)$$

Per i prodotti di operatori calcolati a tempi diversi, si ha il *teorema di Wick*:

$$\begin{aligned} T[ABC \dots XYZ] &= N[ABC \dots XYZ] \\ &+ N[\underbrace{ABC}_{\text{contratti}} \dots XYZ] + N[\underbrace{ABC}_{\text{contratti}} \dots XYZ] + \dots + N[\underbrace{ABC}_{\text{contratti}} \dots XYZ] \\ &+ N[\underbrace{ABC}_{\text{contratti}} \underbrace{D}_{\text{contratti}} \dots XYZ] + \dots + N[\underbrace{ABC}_{\text{contratti}} \dots \underbrace{W}_{\text{contratti}} \underbrace{XYZ}_{\text{contratti}}] \\ &+ \dots \\ &+ N[\underbrace{ABC}_{\text{contratti}} \underbrace{D}_{\text{contratti}} \dots \underbrace{W}_{\text{contratti}} \underbrace{XYZ}_{\text{contratti}}] + \dots \end{aligned} \quad (5.73)$$

Il teorema di Wick si dimostra per induzione.

Consideriamo ora il caso dei prodotti T-misti che compaiono nella (5.54):

$$T \left[N[\bar{\psi} \not{A} \psi]_{x_1} N[\bar{\psi} \not{A} \psi]_{x_2} \dots N[\bar{\psi} \not{A} \psi]_{x_n} \right] . \quad (5.74)$$

In ciascun prodotto $N[\bar{\psi} \not{A} \psi]_x$ sostituiamo a $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ la variabile $\xi^\mu = (x^0 \pm \epsilon, \vec{x})$, con il segno positivo o negativo a seconda che si tratti di un operatore di creazione o di annichilazione, rispettivamente; quindi si può omettere l'indicazione di prodotto normale ed applicare il teorema di Wick (5.73). È ovvio però che i termini contenenti contrazioni tra operatori appartenenti in origine allo stesso prodotto normale sono nulli; queste contrazioni corrispondono infatti a valori medi nel vuoto di operatori ordinati secondo la definizione di prodotto normale. Passando al limite $\epsilon \rightarrow 0$, si trova quindi

$$T \left[N[\bar{\psi} \not{A} \psi]_{x_1} \dots N[\bar{\psi} \not{A} \psi]_{x_n} \right] = T \left[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} \dots (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_n} \right]_{\substack{\text{(senza contrazioni)} \\ \text{a tempi uguali}}} . \quad (5.75)$$

Capitolo 6

Campo elettromagnetico in formulazione covariante

6.1 Sviluppo di Fourier di A_μ

Nel capitolo 1 il campo elettromagnetico era stato descritto, per semplicità, come campo di radiazione trasversale (vedi l'eq.(1.29)); ciò è possibile quando nel caso libero si sceglie il gauge di Coulomb. Volendo ora trattare il campo elettromagnetico nel caso più generale, lo sviluppiamo in serie di Fourier, includendo anche la componente temporale e quella longitudinale (le quattro componenti sono considerate come operatori hermitiani indipendenti):

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left\{ a_{\vec{k}}^{(\alpha)} \varepsilon_\mu^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + a_{\vec{k}}^{(\alpha)\dagger} \varepsilon_\mu^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right\}_{k_0=\omega} \\ &\equiv A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) \end{aligned} \quad (6.1)$$

con $\omega \equiv |\vec{k}|$. I quadri-vettori di polarizzazione $\varepsilon^{(\alpha)}(\vec{k})$ sono scelti reali e ortogonali. In particolare, il quadri-vettore $\varepsilon^{(0)}$ è scelto nella direzione tempo ($\varepsilon^{(0)} \cdot k = \omega$), i quadri-vettori $\varepsilon^{(1)}$ e $\varepsilon^{(2)}$ sono presi ortogonali a $\vec{k}$ ($\varepsilon^{(1)} \cdot k = \varepsilon^{(2)} \cdot k = 0$), e il quadri-vettore $\varepsilon^{(3)}$ è scelto parallelo a $\vec{k}$ ($\varepsilon^{(3)} \cdot k = -|\vec{k}|$). Prendendo l'asse x^3 nella direzione di $\vec{k}$, ossia $k = (\omega, 0, 0, \omega)$, si ha

$$\underbrace{\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{quadri-vettore temporale}}, \quad \underbrace{\varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{quadri-vettori trasversali}}, \quad \underbrace{\varepsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{quadri-vettore longitudinale}}. \quad (6.2)$$

Le norme dei quadri-vettori di polarizzazione sono quindi

$$\varepsilon^{(0)} \cdot \varepsilon^{(0)} = +1, \quad \varepsilon^{(k)} \cdot \varepsilon^{(k)} = -1, \quad (6.3)$$

ossia

$$\varepsilon^{(\alpha)} \cdot \varepsilon^{(\beta)} = g^{\alpha\beta}. \quad (6.4)$$

I vettori di polarizzazione soddisfano inoltre la proprietà

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_{\mu}^{(\alpha)} \varepsilon_{\nu}^{(\alpha)} g^{\alpha\alpha} = g_{\mu\nu} . \quad (6.5)$$

6.2 Commutatori di A_{μ}

Al capitolo 1 sono dedotte le regole di quantizzazione per gli operatori $a, a^{\dagger}$ limitatamente alle componenti trasversali; queste sono ($\alpha, \beta = 1, 2$)

$$[a_{\vec{k}}^{(\alpha)}, a_{\vec{k}'}^{(\beta)\dagger}] = \delta^{\alpha\beta} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} , \quad (6.6a)$$

$$[a_{\vec{k}}^{(\alpha)}, a_{\vec{k}'}^{(\beta)}] = [a_{\vec{k}}^{(\alpha)\dagger}, a_{\vec{k}'}^{(\beta)\dagger}] = 0 . \quad (6.6b)$$

Questi commutatori possono essere immediatamente generalizzati ad includere anche le componenti longitudinale e temporale, scrivendo ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$)

$$[a_{\vec{k}}^{(\alpha)}, a_{\vec{k}'}^{(\beta)\dagger}] = -g^{\alpha\beta} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} , \quad (6.7a)$$

$$[a_{\vec{k}}^{(\alpha)}, a_{\vec{k}'}^{(\beta)}] = [a_{\vec{k}}^{(\alpha)\dagger}, a_{\vec{k}'}^{(\beta)\dagger}] = 0 . \quad (6.7b)$$

Ricaviamo da queste le proprietà di commutazione del campo A_{μ} . Si ha

$$\begin{aligned} [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \alpha} \sum_{\vec{k}', \alpha'} \frac{1}{\sqrt{2\omega} \sqrt{2\omega'}} \left\{ \varepsilon_{\mu}^{(\alpha)}(\vec{k}) \varepsilon_{\nu}^{(\alpha')}(\vec{k}') e^{-i(k \cdot x - k' \cdot x')} \underbrace{[a_{\vec{k}}^{(\alpha)}, a_{\vec{k}'}^{(\alpha')\dagger}]}_{-\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} g^{\alpha\alpha'}} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{\mu}^{(\alpha)}(\vec{k}) \varepsilon_{\nu}^{(\alpha')}(\vec{k}') e^{i(k \cdot x - k' \cdot x')} \underbrace{[a_{\vec{k}}^{(\alpha)\dagger}, a_{\vec{k}'}^{(\alpha')}] }_{\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} g^{\alpha\alpha'}} \right\}_{k_0=\omega, k'_0=\omega'} \\ &= -\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega} \left\{ \underbrace{\left(\sum_{\alpha} \varepsilon_{\mu}^{(\alpha)} \varepsilon_{\nu}^{(\alpha)} g^{\alpha\alpha} \right)}_{g_{\mu\nu}} \left(e^{-ik \cdot (x-x')} - e^{ik \cdot (x-x')} \right) \right\}_{k_0=\omega} \\ &\xrightarrow{V \rightarrow \infty} -g_{\mu\nu} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} \left\{ e^{-ik \cdot (x-x')} - e^{ik \cdot (x-x')} \right\}_{k_0=\omega} . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ricordando la definizione della funzione $\Delta(x)$ (vedi l'eq.(2.49)), si ha quindi

$$\boxed{[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] = -i g_{\mu\nu} \Delta(x - x')} . \quad (6.9)$$

6.3 Propagatore del fotone

Calcoliamo ora il valore medio nel vuoto del prodotto cronologico

$$\begin{aligned} \underline{A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')} &\equiv \langle 0 | T[A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')] | 0 \rangle \\ &= \theta(x_0 - x'_0) \langle 0 | A_{\mu}^{(+)}(x) A_{\nu}^{(-)}(x') | 0 \rangle + \theta(x'_0 - x_0) \langle 0 | A_{\nu}^{(+)}(x') A_{\mu}^{(-)}(x) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (6.10)$$

Il primo termine può essere valutato come segue:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | A_\mu^{(+)}(x) A_\nu^{(-)}(x') | 0 \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \alpha} \sum_{\vec{k}', \alpha'} \frac{1}{\sqrt{2\omega} \sqrt{2\omega'}} \varepsilon_\mu^{(\alpha)} \varepsilon_\nu^{(\alpha')} e^{-i(k \cdot x - k' \cdot x')} \underbrace{\langle 0 | a_{\vec{k}}^{(\alpha)} a_{\vec{k}'}^{(\alpha')\dagger} | 0 \rangle}_{-\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} g^{\alpha\alpha'}} \Big|_{\substack{k_0=\omega \\ k'_0=\omega'}} \\
&= -\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega} \underbrace{\left(\sum_{\alpha} \varepsilon_\mu^{(\alpha)} \varepsilon_\nu^{(\alpha)} g^{\alpha\alpha} \right)}_{g_{\mu\nu}} e^{-ik \cdot (x-x')} \Big|_{k_0=\omega} \\
&\xrightarrow{V \rightarrow \infty} -g_{\mu\nu} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} e^{-ik \cdot (x-x')} \Big|_{k_0=\omega} . \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Analogamente si ricava

$$\langle 0 | A_\nu^{(+)}(x') A_\mu^{(-)}(x) | 0 \rangle = -g_{\mu\nu} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} e^{ik \cdot (x-x')} \Big|_{k_0=\omega} , \tag{6.12}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T[A_\mu(x) A_\nu(x')] | 0 \rangle &= \tag{6.13} \\
&= -g_{\mu\nu} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} \left[\theta(x_0 - x'_0) e^{-ik \cdot (x-x')} + \theta(x'_0 - x_0) e^{ik \cdot (x-x')} \right]_{k_0=\omega} .
\end{aligned}$$

Utilizzando una procedura analoga a quella impiegata nella sezione 7.1 della Parte prima, si dimostra che la (6.13) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\langle 0 | T[A_\mu(x) A_\nu(x')] | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik \cdot (x-x')} \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} . \tag{6.14}$$

La frazione

$$\frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \tag{6.15}$$

rappresenta quindi il propagatore del fotone nello spazio degli impulsi.

Capitolo 7

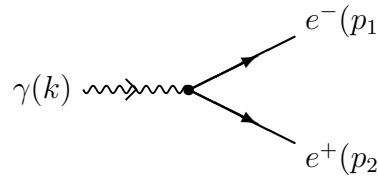
Processi al second'ordine perturbativo

7.1 Termini del second'ordine

L'ampiezza di transizione da uno stato iniziale $|i\rangle$ and uno stato finale $|f\rangle$ è data, in termini dello sviluppo perturbativo (5.54) dell'operatore $\mathcal{S}$, da

$$\begin{aligned} S_{fi} - \delta_{fi} &\equiv \langle f|\mathcal{S}|i\rangle - \langle f|i\rangle \\ &= \langle f|\mathcal{S}^{(1)}|i\rangle + \langle f|\mathcal{S}^{(2)}|i\rangle + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f|\mathcal{S}^{(n)}|i\rangle. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Le ampiezze del prim'ordine perturbativo $S_{fi}^{(1)}$, corrispondenti ai grafici del paragrafo 4.1 sono identicamente nulle, a causa dell'incompatibilità delle condizioni di conservazione energia-impulso nel vertice di interazione con le condizioni di shell di massa per le particelle fisiche. Esaminiamo, per esempio, il processo


$$(7.2)$$

Le relazioni di conservazione di energia-impulso e quelle di shell di massa,

$$k = p_1 + p_2, \quad k^2 = 0, \quad p_1^2 = p_2^2 = m^2, \quad (7.3)$$

scritte nel sistema di riposo dell'elettrone ($\vec{p}_1 = 0$), diventano

$$k^0 = p_1^0 + p_2^0, \quad (7.4a)$$

$$\vec{k} = \vec{p}_2, \quad (7.4b)$$

$$k^0 = |\vec{k}|, \quad (7.4c)$$

$$p_1^0 = m, \quad (7.4d)$$

$$p_2^0 = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m^2} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (7.4e)$$

Queste relazioni sono incompatibili, come si vede sostituendo le ultime due nella prima. Per mantenere la condizione di conservazione di energia–impulso nel vertice di interazione occorre rimuovere la condizione di shell di massa per almeno una delle tre particelle confluenti nel vertice. Questo è quanto avviene in diagrammi con più vertici di interazione, dove le particelle che collegano detti vertici sono particelle *virtuali* (fuori dallo shell di massa).

Discende da quanto visto che l'ampiezza di ordine perturbativo più basso nello sviluppo della (7.1) è quella del second'ordine perturbativo che andiamo ad esaminare in dettaglio.

Tenendo conto del teorema di Wick, il termine $\mathcal{S}^{(2)}$ può essere espresso nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{(2)} &= -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 T \left[N[\bar{\psi} \not{A} \psi]_{x_1} N[\bar{\psi} \not{A} \psi]_{x_2} \right] \\
&= -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \left\{ N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] \right. \\
&\quad + N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] \\
&\quad + N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] \\
&\quad \left. + N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] \right\}. \tag{7.5}
\end{aligned}$$

Notiamo le seguenti caratteristiche dello sviluppo (7.5):

1. Il primo termine rappresenta due fattori disgiunti, con due vertici fondamentali non collegati.
2. I due termini successivi (contenenti ciascuno la contrazione su di una coppia di operatori fermionici) sono uguali tra loro; infatti, se scambiamo tra di loro i due gruppi di operatori e poi scambiamo $x_1 \leftrightarrow x_2$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int d^4x_1 \int d^4x_2 N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] &= \int d^4x_1 \int d^4x_2 N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1}] \\
&= \int d^4x_1 \int d^4x_2 N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}]. \tag{7.6}
\end{aligned}$$

Nella Sezione successiva mostreremo che la loro somma,

$$-e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}], \tag{7.7}$$

contribuisce allo scattering Compton.

7.2 Scattering Compton

Consideriamo lo scattering Compton

$$e^-(p_i, r) + \gamma(k_i, \alpha) \rightarrow e^-(p_f, s) + \gamma(k_f, \beta), \tag{7.8}$$

che è descritto dal diagramma

$$(7.9)$$

Nelle (7.8) e (7.9)

$$p_i = (E_i, \vec{p}_i), \quad p_f = (E_f, \vec{p}_f) \quad (7.10)$$

sono, rispettivamente, i quadri-impulsi dell'elettrone entrante e di quello uscente e

$$k_i = (\omega_i, \vec{k}_i), \quad k_f = (\omega_f, \vec{k}_f) \quad (7.11)$$

sono, rispettivamente, i quadri-impulsi del fotone entrante e di quello uscente. Tutte le particelle sono sul mass-shell:

$$p_i^2 = p_f^2 = m^2, \quad k_i^2 = k_f^2 = 0. \quad (7.12)$$

Nelle (7.8) e (7.9) r, s indicano, rispettivamente, gli stati di polarizzazione dell'elettrone entrante e di quello uscente e α, β indicano, rispettivamente, gli stati di polarizzazione del fotone entrante e di quello uscente.

Gli stati iniziale e finale sono descritti dai vettori di stato

$$|i\rangle = a_{\vec{k}_i}^{(\alpha)\dagger} b_{\vec{p}_i}^{(r)\dagger} |0\rangle \quad (\text{stato iniziale}), \quad (7.13a)$$

$$|f\rangle = a_{\vec{k}_f}^{(\beta)\dagger} b_{\vec{p}_f}^{(s)\dagger} |0\rangle \quad (\text{stato finale}). \quad (7.13b)$$

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che il termine del second'ordine, $\mathcal{S}^{(2)}$, dell'operatore $\mathcal{S}$ dell'elettrodinamica quantistica contiene il termine

$$-e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1}]. \quad (7.14)$$

Questo termine fornisce il contributo all'ordine più basso allo scattering Compton:

$$\langle f | \mathcal{S}^{(2)} | i \rangle = -e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle f | N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1}] | i \rangle. \quad (7.15)$$

Infatti, consideriamo in dettaglio la struttura operatoriale del prodotto normale nella (7.14):

$$\begin{aligned} N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1}] &= N \left\{ \left[\bar{\psi}^{(+)}(x_2) + \underbrace{\bar{\psi}^{(-)}(x_2)}_{\Delta} \right] \gamma^\mu \left[\underbrace{A_\mu^{(+)}(x_2)}_{(b)} + \underbrace{A_\mu^{(-)}(x_2)}_{(a)} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \underbrace{\psi(x_2) \bar{\psi}(x_1)}_{\Delta} \gamma^\nu \left[\underbrace{A_\nu^{(+)}(x_1)}_{(a)} + \underbrace{A_\nu^{(-)}(x_1)}_{(b)} \right] \left[\underbrace{\psi^{(+)}(x_1) + \psi^{(-)}(x_1)}_{\Delta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

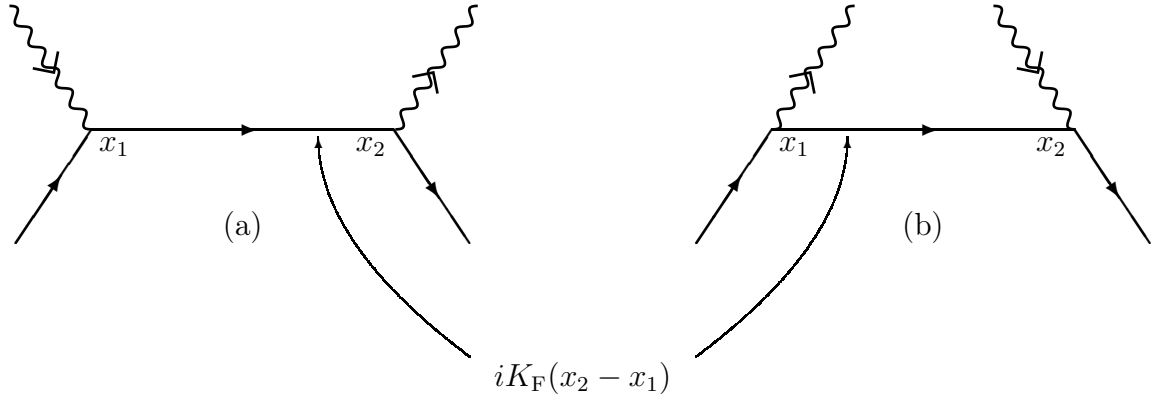


Figura 7.1: Diagrammi rappresentanti i due contributi allo scattering Compton all'ordine perturbativo più basso.

Solo gli operatori $\psi^{(+)}(x_1)$ e $\bar{\psi}^{(-)}(x_2)$, contrassegnati dal segno Δ , contribuiscono a $\langle f | \mathcal{S}^{(2)} | i \rangle$, perchè, utilizzando le (4.12) e le relazioni di anticommutazione (3.19), si ha

$$\begin{aligned}
 \psi^{(+)}(x_1) b_{\vec{p}_i}^{(r)\dagger} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, r'} \sqrt{\frac{m}{E}} u^{(r')}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x_1} b_{\vec{p}}^{(r')} b_{\vec{p}_i}^{(r)\dagger} |0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, r'} \sqrt{\frac{m}{E}} u^{(r')}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x_1} \underbrace{\left\{ b_{\vec{p}}^{(r')}, b_{\vec{p}_i}^{(r)\dagger} \right\}}_{\delta_{r',r} \delta_{\vec{p}, \vec{p}_i}} |0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_i}} u^{(r)}(\vec{p}_i) e^{-ip_i \cdot x_1} |0\rangle,
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

e, analogamente,

$$\langle 0 | b_{\vec{p}_f}^{(s)} \bar{\psi}^{(-)}(x_2) = \langle 0 | \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_f}} \bar{u}^{(s)}(\vec{p}_f) e^{ip_f \cdot x_2}. \tag{7.18}$$

Invece, è immediato verificare che $\bar{\psi}^{(+)}(x_2) b_{\vec{p}_i}^{(r)\dagger} |0\rangle = 0$ e $\langle 0 | b_{\vec{p}_f}^{(s)} \psi^{(-)}(x_1) = 0$.

Per quanto riguarda gli operatori del campo elettromagnetico, esistono due termini che contribuiscono all'ampiezza; questi sono contrassegnati nella (7.16) con (a) e (b). Nel caso (a) l'operatore $A_\nu^{(+)}(x_1)$ distrugge un fotone nel punto x_1 e l'operatore $A_\mu^{(-)}(x_2)$ crea un fotone nel punto x_2 . Nel caso (b) l'operatore $A_\nu^{(+)}(x_2)$ distrugge un fotone nel punto x_2 e l'operatore $A_\mu^{(-)}(x_1)$ crea un fotone nel punto x_1 . Questi due casi sono rappresentati graficamente dai diagrammi nella figura 7.1. Perciò possiamo scrivere $\langle f | \mathcal{S}^{(2)} | i \rangle$ come

$$S_{fi}^{(2)} \equiv \langle f | \mathcal{S}^{(2)} | i \rangle \equiv S_a^{(2)} + S_b^{(2)}, \tag{7.19}$$

con

$$S_a^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle f | N \left\{ \bar{\psi}^{(-)}(x_2) \underbrace{A^{(-)}(x_2) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1)} A^{(+)}(x_1) \psi^{(+)}(x_1) \right\} | i \rangle, \tag{7.20a}$$

$$S_b^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle f | N \left\{ \overline{\psi}^{(-)}(x_2) \not{A}^{(+)}(x_2) \underbrace{\psi(x_2) \overline{\psi}(x_1)} \not{A}^{(-)}(x_1) \psi^{(+)}(x_1) \right\} | i \rangle . \quad (7.20b)$$

Tenendo conto delle (7.13), $S_a^{(2)}$ è dato da

$$\begin{aligned} S_a^{(2)} &= -e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle 0 | a_{\vec{k}_f}^{(\beta)} b_{\vec{p}_f}^{(s)} \left\{ \overline{\psi}^{(-)}(x_2) \not{A}^{(-)}(x_2) i K_F(x_2 - x_1) \right. \\ &\quad \left. \times \not{A}^{(+)}(x_1) \psi^{(+)}(x_1) \right\} a_{\vec{k}_i}^{(\alpha)\dagger} b_{\vec{p}_i}^{(r)\dagger} | 0 \rangle \\ &= -e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_f}} \overline{u}^{(s)}(\vec{p}_f) e^{ip_f \cdot x_2} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_f}} \not{\epsilon}^{(\beta)}(\vec{k}_f) e^{ik_f \cdot x_2} \right] \\ &\quad \times \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-iq \cdot (x_2 - x_1)} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}} \not{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}_i) e^{-ik_i \cdot x_1} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_i}} u^{(r)}(\vec{p}_i) e^{-ip_i \cdot x_1} \right] . \quad (7.21) \end{aligned}$$

Le integrazioni su x_1 e x_2 producono due distribuzioni delta di Dirac che impongono la conservazione dell'energia-impulso in ciascuno dei due vertici:

$$\int d^4x_2 e^{i(p_f + k_f - q) \cdot x_2} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f + k_f - q) , \quad (7.22a)$$

$$\int d^4x_1 e^{-i(p_i + k_i - q) \cdot x_1} = (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - q) . \quad (7.22b)$$

Le due distribuzioni delta di Dirac permettono di calcolare immediatamente l'integrale su q :

$$\int d^4q \delta^4(p_f + k_f - q) \delta^4(p_i + k_i - q) f(q) = f(p_i + k_i) \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) . \quad (7.23)$$

Quindi, la (7.21) diventa

$$\begin{aligned} S_a^{(2)} &= -i e^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{1}{V^2} \left(\frac{m^2}{4 E_i E_f \omega_i \omega_f} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \overline{u}^{(s)}(\vec{p}_f) \not{\epsilon}^{(\beta)}(\vec{k}_f) \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{(p_i + k_i)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}_i) u^{(r)}(\vec{p}_i) . \quad (7.24) \end{aligned}$$

Notiamo che a questo punto ϵ può essere messo uguale a zero, perchè per il denominatore $(p_i + k_i)^2 - m^2$ si ha

$$\begin{aligned} (p_i + k_i)^2 - m^2 &= p_i^2 + 2 p_i \cdot k_i + k_i^2 - m^2 \\ &= 2 p_i \cdot k_i = 2 E_i \omega_i - 2 \vec{p}_i \cdot \vec{k}_i > 0 . \quad (7.25) \end{aligned}$$

Perciò l'elettrone che si propaga dal punto x_1 al punto x_2 non è sul mass-shell, ossia è un *elettrone virtuale*.

Notare la corrispondenza tra i diversi fattori della (7.24) e gli elementi del diagramma nella figura 7.2 (*regole di Feynman*).

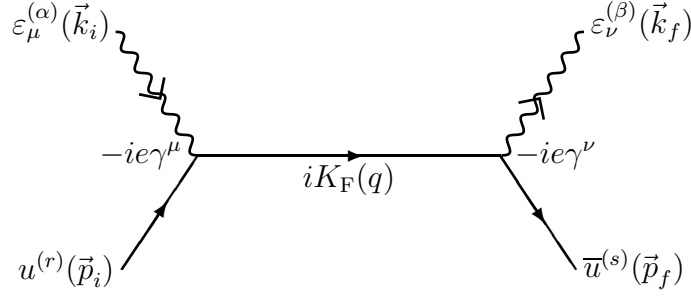


Figura 7.2: Regole di Feynman per il diagramma (a), con $q = p_i + k_i = p_f + k_f$ e $iK_F(q) = \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$.

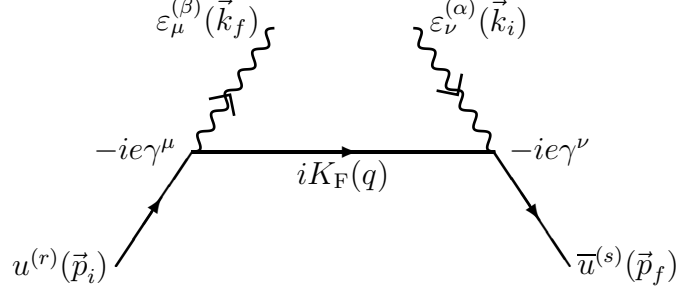


Figura 7.3: Regole di Feynman per il diagramma (b), con $q = p_i - k_f = p_f - k_i$.

Adottando le regole di Feynman, si può subito scrivere l'ampiezza corrispondente al diagramma incrociato (b). Infatti, associando gli opportuni fattori a ciascun elemento del diagramma (b), come illustrato in figura 7.3, si ottiene

$$S_b^{(2)} = -ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{1}{V^2} \left(\frac{m^2}{4E_i E_f \omega_i \omega_f} \right)^{1/2} \times \bar{u}^{(s)}(\vec{p}_f) \not{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}_i) \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \not{\epsilon}^{(\beta)}(\vec{k}_f) u^{(r)}(\vec{p}_i). \quad (7.26)$$

Quindi, l'ampiezza dello scattering Compton al second'ordine perturbativo è

$$S^{(2)} = S_a^{(2)} + S_b^{(2)} = -ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{1}{V^2} \left(\frac{m^2}{4E_i E_f \omega_i \omega_f} \right)^{1/2} \times \bar{u}^{(s)}(\vec{p}_f) \left\{ \not{\epsilon}^{(\beta)}(\vec{k}_f) \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{(p_i + k_i)^2 - m^2} \not{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}_i) + \not{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}_i) \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \not{\epsilon}^{(\beta)}(\vec{k}_f) \right\} u^{(r)}(\vec{p}_i) \equiv -ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{1}{V^2} \left(\frac{m^2}{4E_i E_f \omega_i \omega_f} \right)^{1/2} A. \quad (7.27)$$

► Sezione d'urto differenziale

La probabilità di transizione dallo stato iniziale a quello finale è data da

$$|M|^2 = |\langle f | \mathcal{S} | i \rangle - \langle f | i \rangle|^2$$

$$\begin{aligned} &\simeq |\langle f | \mathcal{S}^{(2)} | i \rangle|^2 \\ &= [(2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f)]^2 \frac{1}{V^4} \frac{e^4 m^2}{4 E_i E_f \omega_i \omega_f} |A|^2. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Il quadrato di $(2\pi)^4 \delta^4(p)$ può essere scritto come

$$[(2\pi)^4 \delta^4(p)]^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p) \int d^4x e^{ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^4(p) \underbrace{\int d^4x}_{VT}, \quad (7.29)$$

dove T è l'intervallo di tempo in cui avviene il processo. Quindi, la probabilità di transizione per unità di tempo e unità di volume è

$$w = \frac{|M|^2}{VT} = (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{1}{V^4} \frac{e^4 m^2}{4 E_i E_f \omega_i \omega_f} |A|^2. \quad (7.30)$$

Se vogliamo calcolare la probabilità di transizione per uno stato finale con impulsi negli intervalli $(\vec{p}_f, \vec{p}_f + d\vec{p}_f)$, $(\vec{k}_f, \vec{k}_f + d\vec{k}_f)$, dobbiamo moltiplicare w per il numero di stati, ossia per il fattore

$$\frac{V d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{V d^3k_f}{(2\pi)^3}. \quad (7.31)$$

Quindi, si ottiene

$$dw = (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{d^3p_f d^3k_f}{(2\pi)^6} \frac{1}{V^2} \frac{e^4 m^2}{4 E_i E_f \omega_i \omega_f} |A|^2. \quad (7.32)$$

La *sezione d'urto differenziale* è definita come rapporto tra la probabilità di transizione per centro di scattering e per unità di tempo e l'intensità I del fascio (numero di particelle incidenti per unità di superficie ed unità di tempo). La normalizzazione adottata richiede che vi sia una particella nel volume V ; quindi, la probabilità per centro di scattering e per unità di tempo è $V dw$. L'intensità I del fascio è data da

$$I = v_{\text{rel}} \rho = \frac{v_{\text{rel}}}{V}, \quad (7.33)$$

dove v_{rel} è la velocità relativa delle due particelle nello stato iniziale e ρ è la densità di particelle del fascio. La sezione d'urto differenziale $d\sigma$ è quindi data da

$$d\sigma = \frac{V^2 dw}{v_{\text{rel}}}. \quad (7.34)$$

Dalla (7.32) si ottiene

$$d\sigma = \frac{1}{v_{\text{rel}}} (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{e^4 m^2}{4 E_i E_f \omega_i \omega_f} |A|^2 \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}, \quad (7.35)$$

ossia, utilizzando $\alpha \equiv e^2/4\pi$,

$$\boxed{d\sigma = \frac{\alpha^2 m^2}{v_{\text{rel}}} \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \frac{|A|^2}{E_i E_f \omega_i \omega_f} d^3p_f d^3k_f}. \quad (7.36)$$

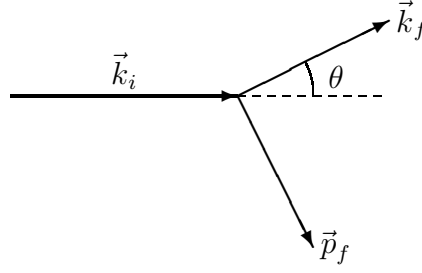


Figura 7.4: Angolo di scattering θ nel sistema del laboratorio.

Nel caso specifico dello scattering Compton si ha $v_{\text{rel}} = c = 1$ (in unità naturali). Volendo ricavare la sezione d'urto differenziale negli angoli di emissione del fotone finale, integriamo la (7.36) su $\vec{p}_f$ e ω_f , utilizzando la relazione

$$d^3k_f = k_f^2 dk_f d\Omega = \omega_f^2 d\omega_f d\Omega, \quad (7.37)$$

con $d\Omega = d\cos\theta d\phi$, dove θ e ϕ sono gli angoli di emissione del fotone finale.

Per l'integrazione su $\vec{p}_f$ si fa uso della $\delta^3(\vec{p}_i + \vec{k}_i - \vec{p}_f - \vec{k}_f)$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 m^2 \int d\omega_f \frac{\omega_f}{E_i E_f \omega_i} \delta(E_i + \omega_i - E_f - \omega_f) |A|^2 \Big|_{\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{k}_i - \vec{k}_f}. \quad (7.38)$$

La sezione d'urto differenziale nel sistema del laboratorio, in cui $\vec{p}_i = 0$ e $E_i = m$, è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 m \int d\omega_f \frac{\omega_f}{E_f \omega_i} \delta(m + \omega_i - E_f - \omega_f) |A|^2 \Big|_{\vec{p}_f = \vec{k}_i - \vec{k}_f}. \quad (7.39)$$

Come illustrato nella figura 7.4, si sceglie θ come l'angolo formato da $\vec{k}_f$ e $\vec{k}_i$. Di conseguenza, ϕ deve essere scelto come l'angolo tra la proiezione di $\vec{k}_f$ sul piano ortogonale a $\vec{k}_i$ e una direzione arbitraria sullo stesso piano. L'integrazione su ω_f va fatta tenendo fissi gli angoli θ e ϕ . Utilizzando la $\delta(m + \omega_i - E_f - \omega_f)$ si ottiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 m \left| \frac{\partial(E_f + \omega_f)}{\partial\omega_f} \right|^{-1} \frac{\omega_f}{E_f \omega_i} |A|^2 \Big|_{\substack{\vec{p}_f = \vec{k}_i - \vec{k}_f \\ \omega_f = m + \omega_i - E_f}}, \quad (7.40)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $E_f = \sqrt{\vec{p}_f^2 + m^2}$ dipende da ω_f a causa della relazione $\vec{p}_f = \vec{k}_i - \vec{k}_f$. Infatti, tenendo conto che $\vec{k}_i^2 = \omega_i^2$ e $\vec{k}_f^2 = \omega_f^2$, si ha

$$E_f = \sqrt{\omega_i^2 + \omega_f^2 - 2\omega_i\omega_f \cos\theta + m^2}. \quad (7.41)$$

Perciò,

$$\left| \frac{\partial(E_f + \omega_f)}{\partial\omega_f} \right|^{-1} = \frac{E_f}{E_f + \omega_f - \omega_i \cos\theta} = \frac{E_f}{m + \omega_i (1 - \cos\theta)} \quad (7.42)$$

e per la sezione d'urto differenziale si ottiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 m \frac{\omega_f}{\omega_i} \frac{|A|^2}{m + \omega_i (1 - \cos\theta)} \Big|_{p_f = p_i + k_i - k_f}. \quad (7.43)$$

Poichè nel sistema del laboratorio le variabili cinematiche indipendenti sono ω_i e l'angolo θ (il processo è simmetrico rispetto all'angolo ϕ), esiste una relazione tra ω_f , ω_i e θ che permette di scrivere la (7.43) in forma più semplice. Per trovarla consideriamo la conservazione del quadri-impulso

$$p_i + k_i = p_f + k_f \implies p_i - k_f = p_f - k_i. \quad (7.44)$$

Quadrando si ottiene

$$m^2 - 2 p_i \cdot k_f = m^2 - 2 p_f \cdot k_i \implies p_i \cdot k_f = p_f \cdot k_i, \quad (7.45)$$

e quindi

$$p_i \cdot k_f = p_f \cdot k_i = (p_i + k_i - k_f) \cdot k_i = p_i \cdot k_i - k_f \cdot k_i. \quad (7.46)$$

Nel sistema del laboratorio, dove $\vec{p}_i = 0$, si ottiene

$$m \omega_f = m \omega_i - \omega_f \omega_i (1 - \cos \theta), \quad (7.47)$$

ossia

$$\omega_f = \frac{m \omega_i}{m + \omega_i (1 - \cos \theta)}. \quad (7.48)$$

Tenendo conto di questa relazione, la (7.43) diventa

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 |A|^2 \Big|_{p_f=p_i+k_i-k_f}}. \quad (7.49)$$

► Ampiezza A

Prendiamo ora in esame l'ampiezza A :

$$A = \bar{u}^{(s)}(\vec{p}_f) \left\{ \not{\epsilon}_f \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{(p_i + k_i)^2 - m^2} \not{\epsilon}_i + \not{\epsilon}_i \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \not{\epsilon}_f \right\} u^{(r)}(\vec{p}_i), \quad (7.50)$$

dove abbiamo usato le definizioni

$$\varepsilon_i \equiv \varepsilon^{(\alpha)}(\vec{k}_i), \quad \varepsilon_f \equiv \varepsilon^{(\beta)}(\vec{k}_f). \quad (7.51)$$

E' conveniente lavorare nel gauge di Coulomb, nel quale il campo elettromagnetico è trasversale, ossia

$$\varepsilon_i = (0, \vec{\epsilon}_{i,T}), \quad \text{con} \quad \vec{\epsilon}_{i,T} \cdot \vec{k}_i = 0, \quad (7.52a)$$

$$\varepsilon_f = (0, \vec{\epsilon}_{f,T}), \quad \text{con} \quad \vec{\epsilon}_{f,T} \cdot \vec{k}_f = 0, \quad (7.52b)$$

per cui

$$\varepsilon_i \cdot k_i = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_f \cdot k_f = 0, \quad (7.53)$$

e valgono le proprietà di anticommutazione

$$\not{k}_i \not{\epsilon}_i + \not{\epsilon}_i \not{k}_i = 0 \quad \text{e} \quad \not{k}_f \not{\epsilon}_f + \not{\epsilon}_f \not{k}_f = 0. \quad (7.54)$$

Inoltre, tenendo conto che $\vec{p}_i = 0$, valgono le proprietà di ortogonalità

$$\varepsilon_i \cdot p_i = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_f \cdot p_i = 0, \quad (7.55)$$

che implicano le ulteriori proprietà di anticommutazione

$$\not{p}_i \not{\varepsilon}_i + \not{\varepsilon}_i \not{p}_i = 0 \quad \text{e} \quad \not{p}_i \not{\varepsilon}_f + \not{\varepsilon}_f \not{p}_i = 0. \quad (7.56)$$

Applicando queste relazioni, si ha

$$\not{p}_i \not{\varepsilon}_i u^{(r)}(\vec{p}_i) = -\not{\varepsilon}_i \not{p}_i u^{(r)}(\vec{p}_i) = -m \not{\varepsilon}_i u^{(r)}(\vec{p}_i), \quad (7.57a)$$

$$\not{p}_i \not{\varepsilon}_f u^{(r)}(\vec{p}_i) = -\not{\varepsilon}_f \not{p}_i u^{(r)}(\vec{p}_i) = -m \not{\varepsilon}_f u^{(r)}(\vec{p}_i). \quad (7.57b)$$

Tenendo inoltre conto che

$$(p_i + k_i)^2 - m^2 = 2 p_i \cdot k_i = 2 m \omega_i, \quad (7.58a)$$

$$(p_i - k_f)^2 - m^2 = -2 p_i \cdot k_f = -2 m \omega_f, \quad (7.58b)$$

per l'ampiezza si ottiene

$$\boxed{A = \frac{1}{2m} \bar{u}^{(s)}(\vec{p}_f) \left\{ \frac{\not{\varepsilon}_f \not{k}_i \not{\varepsilon}_i}{\omega_i} + \frac{\not{\varepsilon}_i \not{k}_f \not{\varepsilon}_f}{\omega_f} \right\} u^{(r)}(\vec{p}_i)}. \quad (7.59)$$

Questa è l'espressione più semplificata possibile per l'ampiezza A . Notiamo che A è invariante per scambio $(\varepsilon_i, k_i) \leftrightarrow (\varepsilon_f, -k_f)$, che corrisponde ad una proprietà generale delle ampiezze di transizione detta *simmetria di crossing*.

Se vogliamo calcolare la sezione d'urto di un processo di scattering Compton nel quale la polarizzazione dell'elettrone iniziale e di quello finale non sono misurate, è necessario modificare la formula (7.49) per la sezione d'urto differenziale includendo una somma sugli stati di polarizzazione dell'elettrone finale e una media su quelli dell'elettrone iniziale, ossia

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 \frac{1}{2} \sum_{r,s} |A|^2 \Big|_{p_f=p_i+k_i-k_f}. \quad (7.60)$$

Per calcolare $\sum_{r,s} |A|^2$, scriviamo l'ampiezza A nella forma

$$A = \bar{u}^{(s)}(\vec{p}_f) \mathcal{O} u^{(r)}(\vec{p}_i), \quad (7.61)$$

con

$$\mathcal{O} \equiv \frac{1}{2m} \left\{ \frac{\not{\varepsilon}_f \not{k}_i \not{\varepsilon}_i}{\omega_i} + \frac{\not{\varepsilon}_i \not{k}_f \not{\varepsilon}_f}{\omega_f} \right\}. \quad (7.62)$$

Quindi

$$\sum_{r,s} |A|^2 = \text{Tr}[\mathcal{O} \Lambda_+(\vec{p}_i) \mathcal{O}' \Lambda_+(\vec{p}_f)], \quad (7.63)$$

dove

$$\mathcal{O}' = \gamma^0 \mathcal{O}^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{\not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{\varepsilon}_f}{\omega_i} + \frac{\not{\varepsilon}_f \not{k}_f \not{\varepsilon}_i}{\omega_f} \right\} \quad (7.64)$$

e

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad (7.65)$$

è il proiettore sugli spinori a energia positiva definito nella (2.65) della Parte prima. Quindi,

$$\sum_{r,s} |A|^2 = \frac{1}{16m^4} \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{\epsilon}_f \not{k}_i \not{\epsilon}_i}{\omega_i} + \frac{\not{\epsilon}_i \not{k}_f \not{\epsilon}_f}{\omega_f} \right) (\not{p}_i + m) \left(\frac{\not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{\epsilon}_f}{\omega_i} + \frac{\not{\epsilon}_f \not{k}_f \not{\epsilon}_i}{\omega_f} \right) (\not{p}_f + m) \right]. \quad (7.66)$$

Tenendo conto delle (7.54), la (7.66) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |A|^2 &= \frac{1}{16m^4} \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i}{\omega_i} + \frac{\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f}{\omega_f} \right) (\not{p}_i + m) \left(\frac{\not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f}{\omega_i} + \frac{\not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i}{\omega_f} \right) (\not{p}_f + m) \right], \\ &= \frac{1}{16m^4} \left(\frac{(\text{Tr})_1}{\omega_i^2} + \frac{(\text{Tr})_2}{\omega_i \omega_f} + \frac{(\text{Tr})_3}{\omega_i \omega_f} + \frac{(\text{Tr})_4}{\omega_f^2} \right), \end{aligned} \quad (7.67)$$

con

$$(\text{Tr})_1 \equiv \text{Tr} [\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f (\not{p}_f + m)], \quad (7.68a)$$

$$(\text{Tr})_2 \equiv \text{Tr} [\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i (\not{p}_f + m)], \quad (7.68b)$$

$$(\text{Tr})_3 \equiv \text{Tr} [\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f (\not{p}_f + m)], \quad (7.68c)$$

$$(\text{Tr})_4 \equiv \text{Tr} [\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i (\not{p}_f + m)]. \quad (7.68d)$$

Consideriamo separatamente le quattro tracce (7.68):

(Tr)₁. Poichè la traccia del prodotto di un numero dispari di matrici γ è nulla, si ha

$$(\text{Tr})_1 = \text{Tr} [\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{p}_f + m^2 \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \underbrace{\not{k}_i \not{k}_i}_{k_i^2=0} \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f], \quad (7.69)$$

Dalla proprietà

$$\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a} = 2 a \cdot b, \quad (7.70)$$

che deriva dalle relazioni di anticommutazione delle matrici γ , si ottiene

$$\not{k}_i \not{p}_i \not{k}_i = (-\not{p}_i \not{k}_i + 2 p_i \cdot k_i) \not{k}_i = -\not{p}_i \underbrace{\not{k}_i \not{k}_i}_{k_i^2=0} + 2 (p_i \cdot k_i) \not{k}_i = 2 (p_i \cdot k_i) \not{k}_i \quad (7.71)$$

e

$$\not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{\epsilon}_i = (-\not{k}_i \not{\epsilon}_i + 2 \underbrace{k_i \cdot \epsilon_i}_0) \not{\epsilon}_i = -\not{k}_i \underbrace{\epsilon_i^2}_{-1} = \not{k}_i. \quad (7.72)$$

Utilizzando queste due relazioni e la formula per la traccia del prodotto di quattro matrici γ ,

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (7.73)$$

(vedi l'Appendice C della Parte prima), si ha

$$\begin{aligned}
(\text{Tr})_1 &= \text{Tr} \left[\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \underbrace{\not{k}_i \not{p}_i \not{k}_i}_{2(p_i \cdot k_i) \not{k}_i} \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{p}_f \right] = 2(p_i \cdot k_i) \text{Tr} \left[\not{\epsilon}_f \underbrace{\not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{\epsilon}_i}_{\not{k}_i} \not{\epsilon}_f \not{p}_f \right] \\
&= 2(p_i \cdot k_i) \text{Tr} \left[\not{\epsilon}_f \not{k}_i \not{\epsilon}_f \not{p}_f \right] \\
&= 8(p_i \cdot k_i) \left[(\epsilon_f \cdot k_i) (\epsilon_f \cdot p_f) - \underbrace{\epsilon_f^2}_{-1} (k_i \cdot p_f) + (\epsilon_f \cdot p_f) (\epsilon_f \cdot k_i) \right] \\
&= 8(p_i \cdot k_i) \left[2(\epsilon_f \cdot k_i) (\epsilon_f \cdot p_f) + (k_i \cdot p_f) \right].
\end{aligned} \tag{7.74}$$

Applicando la relazione $p_f = p_i + k_i - k_f$ derivante dalla conservazione di energia-impulso, si ha

$$\epsilon_f \cdot p_f = \epsilon_f \cdot (p_i + k_i - k_f) = \epsilon_f \cdot k_i, \tag{7.75}$$

dove si è tenuto conto delle (7.53) e (7.55). Utilizzando anche la (7.45), per $(\text{Tr})_1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
(\text{Tr})_1 &= 8(p_i \cdot k_i) \left[2(\epsilon_f \cdot k_i)^2 + (p_i \cdot k_f) \right] \\
&= 8m\omega_i \left[2(\epsilon_f \cdot k_i)^2 + m\omega_f \right].
\end{aligned} \tag{7.76}$$

(Tr)₂. Con metodi analoghi, per $(\text{Tr})_2$ si ottiene

$$\begin{aligned}
(\text{Tr})_2 &= 8(p_i \cdot k_i) (p_i \cdot k_f) \left[2(\epsilon_i \cdot \epsilon_f)^2 - 1 \right] + 8(p_i \cdot k_i) (\epsilon_i \cdot k_f)^2 - 8(p_i \cdot k_f) (\epsilon_f \cdot k_i)^2 \\
&= 8m^2\omega_i\omega_f \left[2(\epsilon_i \cdot \epsilon_f)^2 - 1 \right] + 8m\omega_i (\epsilon_i \cdot k_f)^2 - 8m\omega_f (\epsilon_f \cdot k_i)^2.
\end{aligned} \tag{7.77}$$

(Tr)₃. Questa traccia è uguale a $(\text{Tr})_2$. Infatti, poichè vale la proprietà (vedi l'eq.(C.10) della Parte prima)

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{n-1}} \gamma^{\mu_n}] = \text{Tr}[\gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_{n-1}} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}], \tag{7.78}$$

si ha

$$\begin{aligned}
(\text{Tr})_3 &= \text{Tr} \left[\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f (\not{p}_f + m) \right] \\
&= \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m) \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \right] = (\text{Tr})_2,
\end{aligned} \tag{7.79}$$

(Tr)₄. Questa traccia è uguale a $(\text{Tr})_1$ con gli scambi $\not{\epsilon}_i \leftrightarrow \not{\epsilon}_f$ e $k_i \leftrightarrow -k_f$, che deriva dalla simmetria di crossing. Effettuando questi scambi nella (7.76) si ottiene

$$\begin{aligned}
(\text{Tr})_4 &= -8(p_i \cdot k_f) \left[2(\epsilon_i \cdot k_f)^2 - (p_i \cdot k_i) \right] \\
&= -8m\omega_f \left[2(\epsilon_i \cdot k_f)^2 - m\omega_i \right].
\end{aligned} \tag{7.80}$$

Inserendo le espressioni (7.76), (7.77), (7.79) e (7.80) nella (7.67) si ottiene

$$\sum_{r,s} |A|^2 = \frac{1}{2m^2} \left[\frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} + 4(\epsilon_i \cdot \epsilon_f)^2 - 2 \right]. \tag{7.81}$$

Infine, dalle (7.60) e (7.81) si ottiene la formula di Klein–Nishina

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 \left[\frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} + 4(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f)^2 - 2 \right]} . \quad (7.82)$$

Questa sezione d’urto differenziale descrive il processo di scattering Compton con fotoni polarizzati.

Ricordiamo che ω_f non è una variabile cinematica indipendente, ma dipende da ω_i e θ attraverso la relazione (7.48), ossia

$$\frac{\omega_f}{\omega_i} = \frac{m}{m + \omega_i(1 - \cos \theta)} . \quad (7.83)$$

Per basse energie del fotone incidente, $\omega_i \ll m \simeq 0.5 \text{ MeV}$, si ha $\omega_f/\omega_i \simeq 1$ e vale la formula approssimata

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \underset{\omega_i \ll m}{\simeq} \frac{\alpha^2}{m^2} (\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f)^2 . \quad (7.84)$$

Per ottenere la sezione d’urto differenziale del processo di scattering Compton con fotoni non polarizzati, bisogna sommare la (7.82) sui due stati di polarizzazione del fotone finale e mediare sui due stati di polarizzazione del fotone iniziale. Utilizzando la relazione

$$\sum_{\alpha, \beta} (\varepsilon^{(\alpha)}(k_i) \cdot \varepsilon^{(\beta)}(k_f))^2 = 1 + \cos^2 \theta , \quad (7.85)$$

si ottiene

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 \left[\frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - \sin^2 \theta \right]} . \quad (7.86)$$

Questa è la sezione d’urto differenziale per il processo di scattering Compton con fotoni non polarizzati. Per basse energie del fotone incidente si ottiene la sezione d’urto differenziale classica (non-relativistica) di Thomson

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \underset{\omega_i \ll m}{\simeq} \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) . \quad (7.87)$$

7.3 Altri processi del second’ordine

► Termini con una contrazione fermionica

Dal termine (7.7) con una contrazione $\psi(x_2) \bar{\psi}(x_1)$ si ottengono anche altri processi oltre allo scattering Compton su elettroni; complessivamente si ha

$$\begin{aligned} & N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1}] = \\ & = N \left\{ \left(\bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)} \right)_{x_2} \left(\not{A}^{(+)} + \not{A}^{(-)} \right)_{x_2} \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) \left(\not{A}^{(+)} + \not{A}^{(-)} \right)_{x_1} \left(\psi^{(+)} + \psi^{(-)} \right)_{x_1} \right\} . \end{aligned} \quad (7.88)$$

∇
 $\diamond$
 $\square$

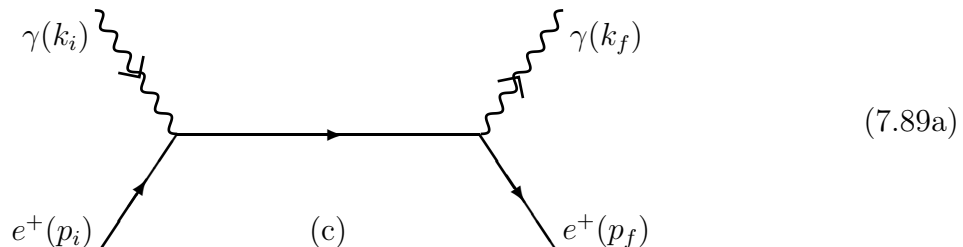
$\begin{matrix} \text{(b)} & \text{(a)} \\ \text{(c)} & \text{(d)} \\ & \text{(e)} \\ \text{(f)} \end{matrix}$

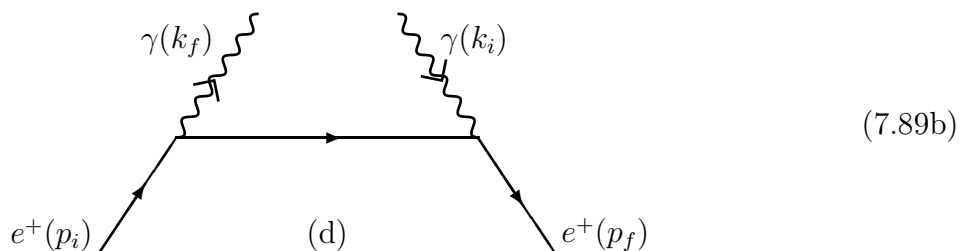
$\begin{matrix} \text{(a)} & \text{(b)} \\ \text{(d)} & \text{(c)} \\ & \text{(e)} \\ \text{(f)} \end{matrix}$

$\begin{matrix} \Delta \\ \nabla \\ \diamond \\ \square \end{matrix}$

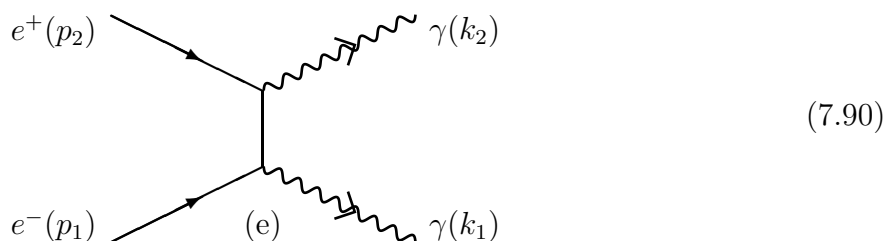
Quindi, oltre allo scattering Compton già considerato abbiamo i seguenti processi (ci limitiamo a quelli con due particelle nello stato iniziale):

- Scattering Compton su e^+ ,

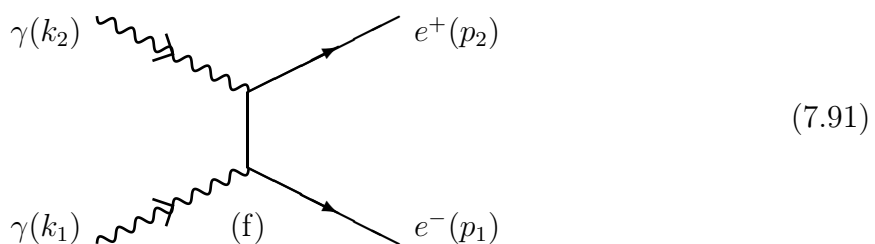




- Annichilazione e^+e^- ,



- Produzione di coppie e^+e^- ,



Oltre a questi diagrammi vi sono quelli di scambio, che compaiono ogni qualvolta nello stato iniziale o in quello finale vi sono due particelle identiche (fotoni o fermioni). Per esempio, l'ampiezza del processo di annichilazione (7.90)

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \gamma(k_1) + \gamma(k_2) \quad (7.92)$$

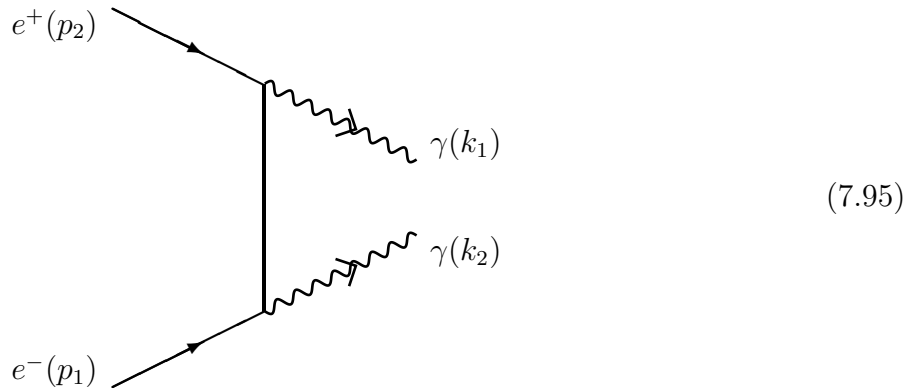
è data da

$$\langle \gamma(k_1), \gamma(k_2) | \mathcal{S}_e^{(2)} | e^-(p_1), e^+(p_2) \rangle. \quad (7.93)$$

In essa gli operatori $A^{(-)}(x_2)$ e $A^{(-)}(x_1)$ agiscono nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(k_1), \gamma(k_2) | \gamma^\mu A_\mu^{(-)}(x_2) \gamma^\nu A_\nu^{(-)}(x_1) = \\ = \langle 0 | \frac{1}{V} \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}} \left[\gamma^\mu \varepsilon_\mu(\vec{k}_1) e^{ik_1 \cdot x_2} \gamma^\nu \varepsilon_\nu(\vec{k}_2) e^{ik_2 \cdot x_1} + \gamma^\mu \varepsilon_\mu(\vec{k}_2) e^{ik_2 \cdot x_2} \gamma^\nu \varepsilon_\nu(\vec{k}_1) e^{ik_1 \cdot x_1} \right]. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Se al primo termine del secondo membro della (7.94) viene associato il diagramma (7.90), al secondo termine sarà associato il diagramma seguente:



Si noti che il segno relativo tra i due termini della (7.94) è positivo, come dev'essere data la natura bosonica dei fotoni (statistica di Bose-Einstein).

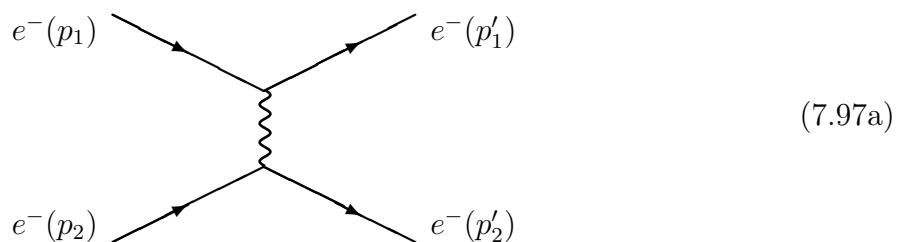
► Termini con contrazione fotonica

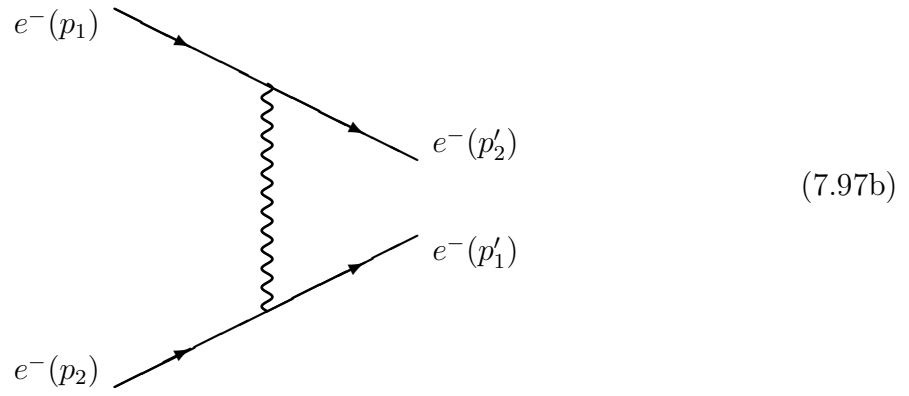
I termini con contrazione del campo fotonico contribuiscono ai processi con quattro fermioni complessivamente tra stato iniziale e stato finale (nessun fotone reale):

$$\begin{aligned} N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_2} (\bar{\psi} A \psi)_{x_1}] = \\ = N \left\{ \left(\bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)} \right)_{x_2} \underbrace{A(x_2) \left(\psi^{(+)} + \psi^{(-)} \right)_{x_2} A(x_1) \left(\psi^{(+)} + \psi^{(-)} \right)_{x_1}}_{\text{contraction}} \right\}. \end{aligned} \quad (7.96)$$

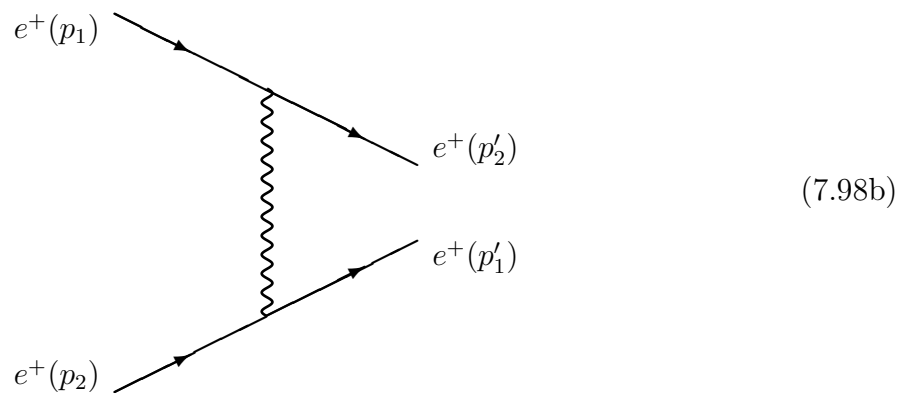
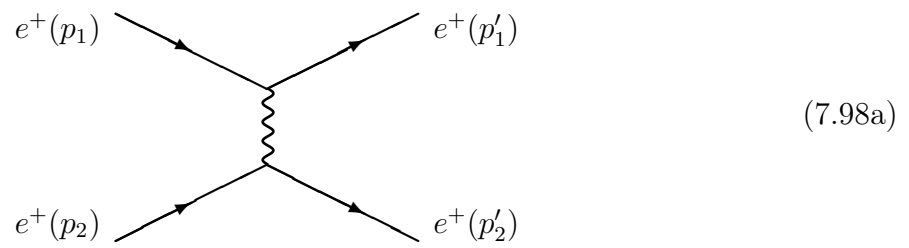
I processi originati da questo termine sono:

- Scattering Møller e^-e^- ,

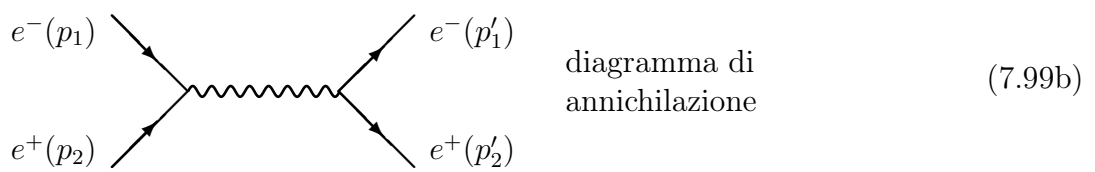
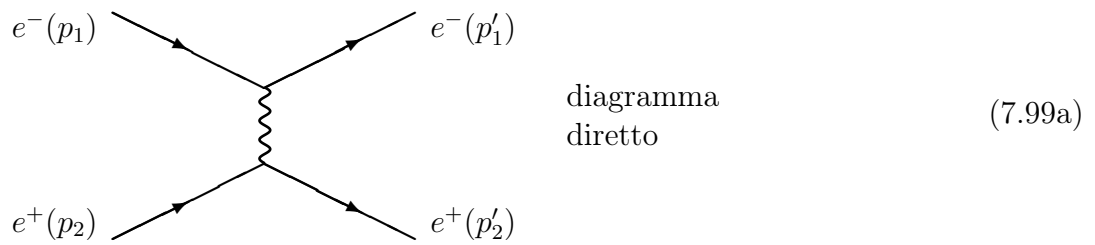




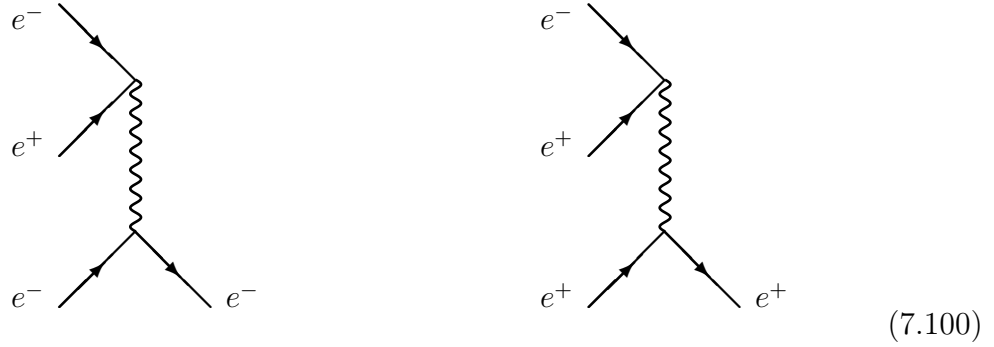
- Scattering Møller e^+e^+ ,



- Scattering Bhabha e^+e^- ,



- Annichilazione di coppie e^+e^- nel campo di un elettrone o di un positrone,

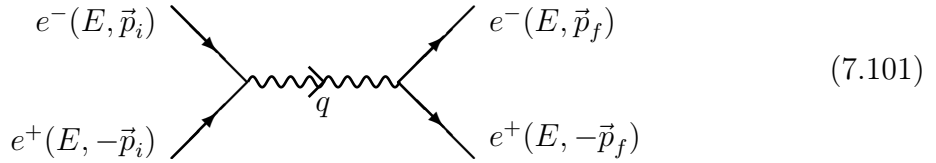


I diagrammi ((7.97b) e (7.98b)) con scambio di fermioni identici nascono da proprietà analoghe a quelle discusse per il campo elettromagnetico (vedi l'eq.(7.94)). Nel caso fermionico però il segno relativo tra ampiezza del diagramma diretto ed ampiezza del diagramma di scambio è negativo, come richiesto dalla statistica di Fermi–Dirac.

► Cinematica dello scattering Bhabha

Per quanto riguarda lo scattering Bhabha, ci limitiamo a mostrare un'importante differenza nella cinematica tra il diagramma diretto e quello di annichilazione.

Consideriamo prima il diagramma di annichilazione (7.99b). Nel sistema del baricentro si ha

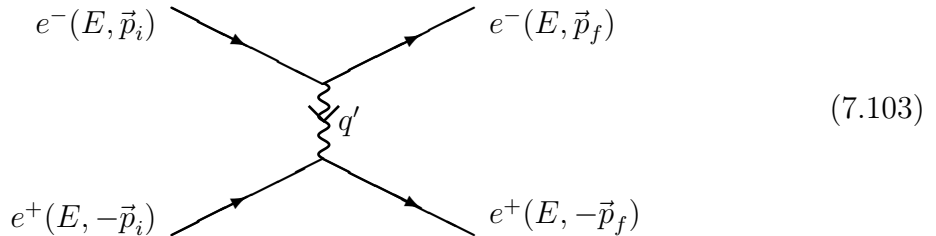


Per il quadri-vettore energia-impulso q del fotone virtuale che si propaga tra i due vertici di interazione si ha

$$q = (2E, \vec{0}) \implies q^2 = (2E)^2 > 0, \quad (7.102)$$

per cui q è un quadri-vettore di tipo tempo.

Consideriamo ora il diagramma diretto (7.99a). Nel sistema del baricentro si ha



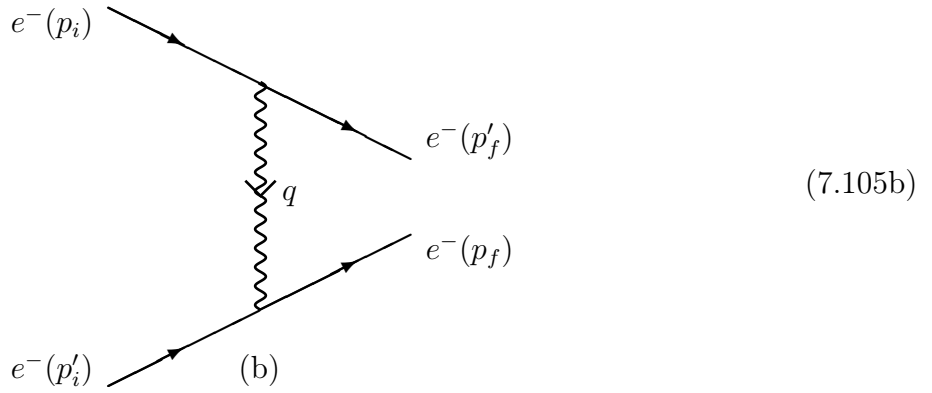
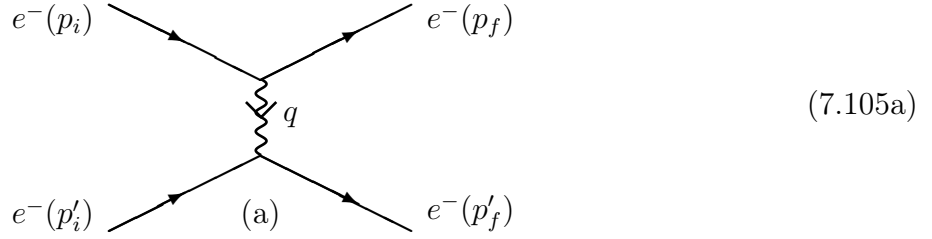
Per il quadri-vettore energia-impulso q' del fotone virtuale si ha

$$q' = (0, \vec{p}_i - \vec{p}_f) \implies q'^2 = -(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 \leq 0, \quad (7.104)$$

per cui q' è un quadri-vettore di tipo spazio.

► Applicazione su propagatore del fotone (scattering Møller)

Consideriamo i due diagrammi (7.97) che rappresentano il contributo al second'ordine perturbativo all'ampiezza dello scattering Møller e^-e^- :



Questi diagrammi sono dovuti al termine perturbativo

$$\int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left[\left(-ie j_\mu(x_1) A^\mu(x_1) \right) \left(-ie j_\nu(x_2) A^\nu(x_2) \right) \right], \quad (7.106)$$

che per il diagramma (a) dà luogo all'ampiezza (viene usata una notazione abbreviata per gli spinori u , omettendo gli indici di spin)

$$\begin{aligned} A_a^{(2)} &\propto \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{ip_f \cdot x_1} \bar{u}_f (-ie \gamma_\mu) u_i e^{-ip_i \cdot x_1} \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} e^{ip'_f \cdot x_2} \bar{u}_{f'} (-ie \gamma_\nu) u_{i'} e^{-ip'_i \cdot x_2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \bar{u}_f (-ie \gamma_\mu) u_i \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} \bar{u}_{f'} (-ie \gamma_\nu) u_{i'} \\ &\quad \times \underbrace{\int d^4x_1 e^{i(p_f - p_i - p) \cdot x_1}}_{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - p)} \underbrace{\int d^4x_2 e^{i(p'_f - p'_i + p) \cdot x_2}}_{(2\pi)^4 \delta^4(p'_f - p'_i + p)} \\ &= (-ie)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_i - p_f)^2} \bar{u}_{f'} \gamma_\nu u_{i'}. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Sommando il contributo del diagramma (b), l'ampiezza totale dello scattering Møller al second'ordine perturbativo è quindi

$$A^{(2)} = A_a^{(2)} + A_b^{(2)} \\ \propto (-ie)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) \left\{ \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_i - p_f)^2} \bar{u}_{f'} \gamma_\nu u_{i'} \right. \\ \left. - \bar{u}_{f'} \gamma_\mu u_i \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_i - p_{f'})^2} \bar{u}_f \gamma_\nu u_{i'} \right\}. \quad (7.108)$$

Il segno negativo è dovuto al diverso ordinamento degli operatori di creazione e distruzione nelle due ampiezze $A_a^{(2)}$ e $A_b^{(2)}$ (compare tutte le volte che si opera uno scambio di fermioni identici).

Nel sistema del baricentro si ha $E_i = E_f = E_{i'} = E_{f'} \equiv E$ e $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = |\vec{p}_{i'}| = |\vec{p}_{f'}| \equiv p$, per cui il quadrato del quadri-impulso trasferito $q = p_i - p_f$ nel diagramma (a) è dato da

$$q^2 = (p_i - p_f)^2 = (E_i - E_f)^2 - (\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 = -(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 \\ = -2p^2(1 - \cos \theta) = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (7.109)$$

dove θ è l'angolo di scattering (cioè l'angolo tra la direzione di p_i e quella di p_f). Poichè l'angolo tra la direzione di p_i e quella di $p_{f'}$ è uguale a $\theta + \pi$, nel caso del diagramma (b) si ottiene

$$q^2 = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (7.110)$$

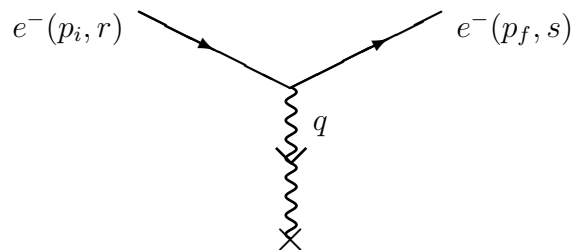
La sezione d'urto differenziale per scattering non polarizzato, nel sistema del baricentro e nel limite non relativistico, è data dalla *formula di Mott*

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2} \frac{1}{16\beta^2} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) \right], \quad (7.111)$$

con $\beta \equiv p/E$. Dalle equazioni (7.108)–(7.110) è chiaro che i denominatori dipendenti da θ nella (7.111) sono dovuti al propagatore del fotone; le prime due frazioni provengono, rispettivamente, da $|A_a^{(2)}|^2$ e $|A_b^{(2)}|^2$, mentre la terza è dovuta all'interferenza delle due ampiezze $A_a^{(2)}$ e $A_b^{(2)}$.

► Diffusione di elettroni da una carica statica

Consideriamo il processo di diffusione Coulombiana di elettroni da un nucleo atomico, rappresentato dal diagramma



$$e^-(p_i, r) \rightarrow e^-(p_f, s) \quad (7.112)$$

Il nucleo atomico può essere approssimato da una distribuzione di carica puntiforme statica, per cui la corrispondente quadri-corrente è

$$j^\nu(x) = (\rho, \vec{j}) = (Z\delta^3(\vec{x}), \vec{0}), \quad (7.113)$$

la cui trasformata di Fourier è

$$\begin{aligned} j^\nu(q) &= \int d^4x e^{-iq \cdot x} j^\nu(x) = \int dt e^{-i(E_i - E_f)t} \int d^3x e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} (Z\delta^3(\vec{x}), \vec{0}) \\ &= 2\pi\delta(E_i - E_f) (Z, \vec{0}) = 2\pi\delta(E_i - E_f) g^{\nu 0} Z. \end{aligned} \quad (7.114)$$

La $\delta(E_i - E_f)$ impone la conservazione dell'energia dell'elettrone, $E_i = E_f \equiv E$, che implica la conservazione del modulo del momento, $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| \equiv p$. Applicando le regole di Feynman, si trova che il contributo del second'ordine perturbativo all'ampiezza del processo è dato da

$$\begin{aligned} A^{(2)} &\propto -(-ie)^2 \bar{u}^{(s)}(p_f) \gamma^\mu u^{(r)}(p_i) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} g^{\nu 0} Z \\ &= iZe^2 \bar{u}^{(s)}(p_f) \gamma^0 u^{(r)}(p_i) \frac{1}{(p_i - p_f)^2}. \end{aligned} \quad (7.115)$$

Il quadrato del quadri-impulso trasferito $q = p_i - p_f$ è dato dalla (7.109) e per la sezione d'urto differenziale nel limite non-relativistico si trova la *formula di Rutherford*

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2}{4m^2\beta^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}}. \quad (7.116)$$

► Termini con più contrazioni

I due termini nella (7.5) con una contrazione fermionica e una fotonica sono uguali ed il loro contributo

$$-e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_2} (\bar{\psi} A \psi)_{x_1}] . \quad (7.117)$$

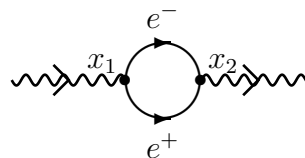
dà luogo ai due diagrammi di self-energia



$$(7.118)$$

Questi diagrammi modificano la massa e la carica del fermione e gli conferiscono proprietà di particella fisica (fermione nudo $\rightarrow$ fermione fisico).

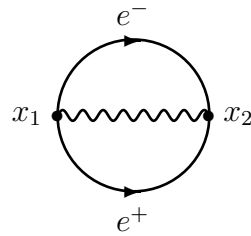
Il termine nella (7.5) con due contrazioni fermioniche può essere rappresentato mediante il diagramma di self-energia del fotone:



$$(7.119)$$

Questo diagramma dà luogo al fenomeno della polarizzazione del vuoto, che verrà diffusamente discusso nel capitolo seguente.

Infine, il termine nella (7.5) con tre contrazioni fornisce il diagramma del vuoto:



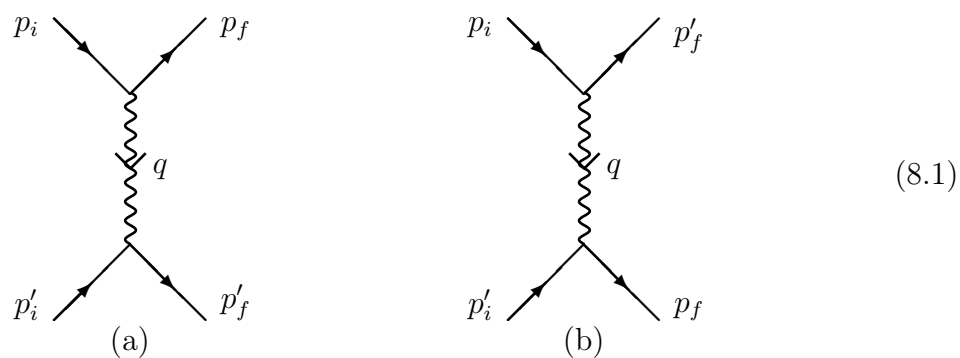
$$(7.120)$$

Capitolo 8

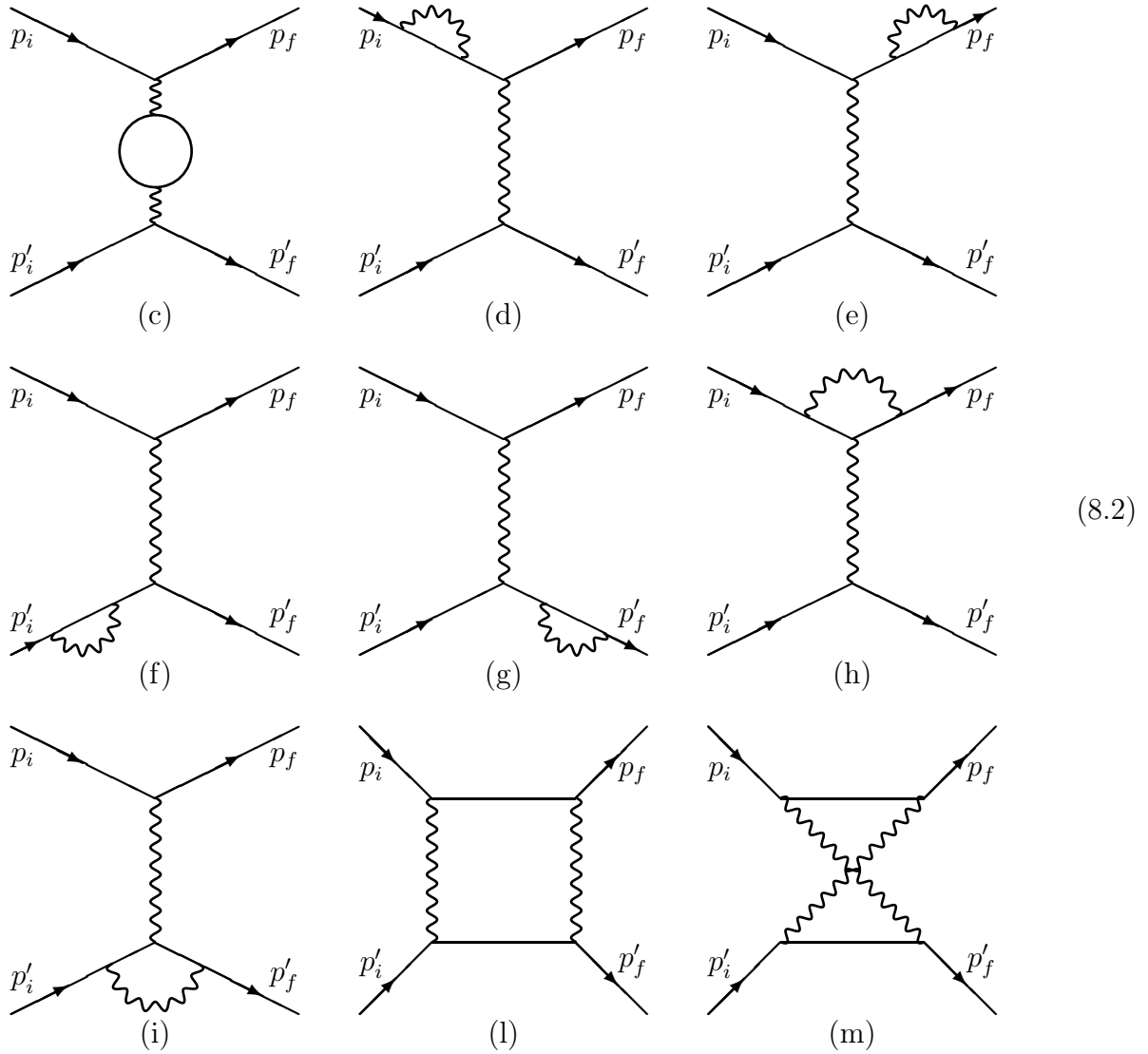
Processi ad ordini perturbativi superiori al secondo (correzioni radiative)

8.1 Scattering Møller e^-e^-

Consideriamo lo scattering Møller e^-e^- . Il contributo al second'ordine perturbativo (e^2) all'ampiezza di questo processo è rappresentato dai diagrammi (7.105):



Il contributo all'ordine e^4 è rappresentato dai seguenti diagrammi:



più i diagrammi incrociati ($p_f \leftrightarrow p'_f$). Esaminiamo in dettaglio, unitamente al diagramma (a) di ordine e^2 (già studiato a pag.II.68), il grafico (c) di ordine e^4 (*polarizzazione del vuoto*). Il diagramma (c) trae la sua origine dal termine perturbativo

$$\int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 \times \quad (8.3)$$

$$\times N \left[\underbrace{(-iej_\mu A^\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_\alpha (-ie\gamma_\rho)_{\alpha\beta} \psi_\beta A^\rho)_{x_2}}_{\text{photon loop}} \underbrace{(\bar{\psi}_\delta (-ie\gamma_\sigma)_{\delta\epsilon} \psi_\epsilon A^\sigma)_{x_3} (-iej_\nu A^\nu)_{x_4}}_{\text{photon loop}} \right],$$

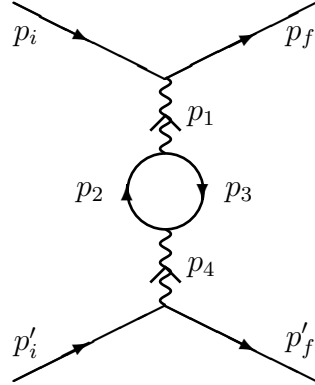
che conduce all'ampiezza

$$A_c^{(4)} \propto \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 e^{ip_f \cdot x_1} \bar{u}_f (-ie\gamma_\mu) u_i e^{-ip_i \cdot x_1} \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 \frac{-ig^{\mu\rho}}{p_1^2} e^{-ip_1 \cdot (x_1 - x_2)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times (-ie\gamma_\rho)_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p_2 \frac{i(\not{p}_2 + m)_{\beta\delta}}{p_2^2 - m^2} e^{-ip_2 \cdot (x_2 - x_3)} \times \\
& \times (-ie\gamma_\sigma)_{\delta\epsilon} (-1) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p_3 \frac{i(\not{p}_3 + m)_{\epsilon\alpha}}{p_3^2 - m^2} e^{-ip_3 \cdot (x_3 - x_2)} \times \\
& \times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p_4 \frac{-ig^{\sigma\nu}}{p_4^2} e^{-ip_4 \cdot (x_3 - x_4)} e^{ip'_f \cdot x_4} \bar{u}_{f'} (-ie\gamma_\nu) u_{i'} e^{-ip'_i \cdot x_4} .
\end{aligned} \tag{8.4}$$

L'assegnazione dei quadri-impulsi è illustrata dal diagramma



$$(8.5)$$

Il fattore (-1) in fronte al secondo propagatore fermionico nell'ampiezza (8.4) è dovuto alla proprietà (5.71) del prodotto N ed alla proprietà (5.68) della contrazione fermionica:

$$N \left[\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_2) \psi_\beta(x_2)}_{\text{contraction}} \underbrace{\bar{\psi}_\delta(x_3) \psi_\epsilon(x_3)}_{\text{contraction}} \right] = - \underbrace{\psi_\beta(x_2) \bar{\psi}_\delta(x_3)}_{\text{contraction}} \underbrace{\psi_\epsilon(x_3) \bar{\psi}_\alpha(x_2)}_{\text{contraction}} . \tag{8.6}$$

Dalle integrazioni su x_1, x_2, x_3, x_4 si ottengono quattro distribuzioni delta di Dirac per la conservazione dell'energia-impulso in ciascun vertice:

$$\int d^4 x_1 e^{i(p_f - p_i - p_1) \cdot x_1} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - p_1) , \tag{8.7a}$$

$$\int d^4 x_2 e^{i(p_1 - p_2 + p_3) \cdot x_2} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 + p_3) , \tag{8.7b}$$

$$\int d^4 x_3 e^{i(p_2 - p_3 - p_4) \cdot x_3} = (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_3 - p_4) , \tag{8.7c}$$

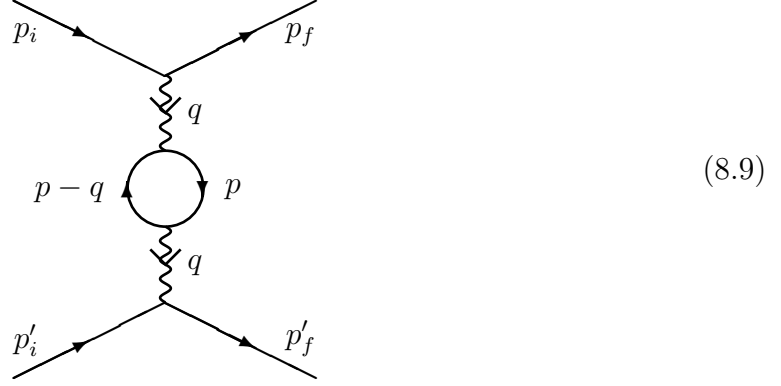
$$\int d^4 x_4 e^{i(p_4 + p'_f - p'_i) \cdot x_4} = (2\pi)^4 \delta^4(p_4 + p'_f - p'_i) . \tag{8.7d}$$

Utilizzando queste delta di Dirac nelle integrazioni su p_1, p_2, p_3, p_4 , si ottiene

$$\begin{aligned}
& \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \delta^4(p_f - p_i - p_1) \delta^4(p_1 - p_2 + p_3) \delta^4(p_2 - p_3 - p_4) \times \\
& \quad \times \delta^4(p_4 + p'_f - p'_i) f(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
& = \int d^4 p_2 \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \delta^4(p_f - p_i - p_2 + p_3) \delta^4(p_2 - p_3 - p_4) \times \\
& \quad \times \delta^4(p_4 + p'_f - p'_i) f(p_1, p_2, p_3, p_4) \Big|_{p_1 = p_f - p_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \delta^4(p_f - p_i - p_4) \delta^4(p_4 + p'_f - p'_i) f(p_1, p_2, p_3, p_4) \Big|_{\substack{p_1=p_f-p_i \\ p_2=p_f-p_i+p_3}} \\
&= \int d^4 p_3 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) f(p_1, p_2, p_3, p_4) \Big|_{\substack{p_4=p_1=p_f-p_i \\ p_2=p_f-p_i+p_3}} .
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Quindi, definendo $p \equiv p_3$ e $q \equiv p_i - p_f$, si ha l'assegnazione dei quadri-impulsi illustrata dal diagramma



Per l'ampiezza $A_c^{(4)}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
A_c^{(4)} &\propto (2\pi)^4 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) \bar{u}_f (-ie\gamma_\mu) u_i \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2} \times \\
&\quad \times (-1) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p (-ie\gamma_\rho)_{\alpha\beta} \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)_{\beta\delta}}{(p-q)^2 - m^2} (-ie\gamma_\sigma)_{\delta\epsilon} \frac{i(\not{p} + m)_{\epsilon\alpha}}{p^2 - m^2} \times \\
&\quad \times \frac{-ig^{\sigma\nu}}{q^2} \bar{u}_{f'} (-ie\gamma_\nu) u_{i'} \\
&= (-ie)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) \times \\
&\quad \times \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \left\{ \frac{-i}{q^2} (-1) e^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{q} + m}{(p-q)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \right] \frac{-i}{q^2} \right\} \bar{u}_{f'} \gamma_\nu u_{i'} .
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Tenendo conto della (7.107), segue che

$$\begin{aligned}
A_a^{(2)} + A_c^{(4)} &\propto (-ie)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) \times \\
&\quad \times \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \left\{ \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} (-1) e^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{q} + m}{(p-q)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \right] \frac{-i}{q^2} \right\} \bar{u}_{f'} \gamma_\nu u_{i'} .
\end{aligned} \tag{8.11}$$

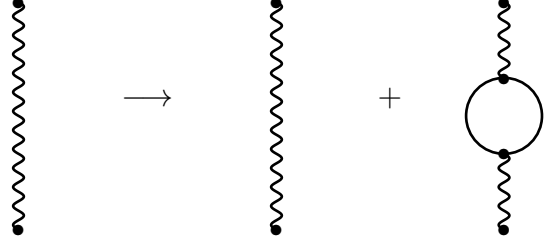
Quindi l'inclusione del diagramma (c) nel calcolo dell'ampiezza Møller equivale a modificare il propagatore del fotone del diagramma (a) nel modo seguente:

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \longrightarrow \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} I^{\mu\nu} \frac{-i}{q^2} , \tag{8.12}$$

dove si è definito

$$I^{\mu\nu} \equiv (-1) e^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{q} + m}{(p-q)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \right] ; \tag{8.13}$$

ossia, diagrammaticamente,



$$(8.14)$$

Notare che questa correzione al propagatore è di ordine α .

Il tensore $I^{\mu\nu}$ è divergente, perchè l'integrale contiene termini del tipo

$$\int dp p^3 \frac{1}{p^2} \quad (p \equiv |\vec{p}|). \quad (8.15)$$

Si può dimostrare che (Bjorken & Drell II, pag.153; Sakurai, pag.273)

$$I^{\mu\nu} = -ig^{\mu\nu} q^2 I(q^2) + A(q^2) q^\mu q^\nu, \quad (8.16)$$

dove

$$I(q^2) = \underbrace{\frac{\alpha}{3\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2}}_{I_1} - \underbrace{\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z (1-z) \log \left[1 - z (1-z) \frac{q^2}{m^2} \right]}_{I_2(q^2)}. \quad (8.17)$$

Il termine proporzionale a $q^\mu q^\nu$ nella (8.16) non dà contributo all'ampiezza, perchè in essa risulta contratto con le correnti conservate j_μ, j_ν (legge di conservazione nello spazio dei quadri-impulsi: $q^\mu j_\mu(q) = 0$). Pertanto il termine proporzionale a $q^\mu q^\nu$ verrà omesso nel seguito:

$$I^{\mu\nu} = -ig^{\mu\nu} q^2 I(q^2). \quad (8.18)$$

Nella (8.17) $I(q^2)$ è scomposto in un termine finito $I_2(q^2)$ ed un integrale logicamente divergente:

$$I_1 = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{M^2}{m^2}. \quad (8.19)$$

Analizziamo

$$I_2(q^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z (1-z) \log \left[1 - z (1-z) \frac{q^2}{m^2} \right] \quad (8.20)$$

nel limite di bassa energia ($-q^2/m^2 \ll 1$):

$$\log \left[1 - z (1-z) \frac{q^2}{m^2} \right] \simeq -z (1-z) \frac{q^2}{m^2}, \quad (8.21)$$

$$I_2(q^2) \simeq \frac{2\alpha}{\pi} \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) \int_0^1 dz z^2 (1-z)^2 = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2}. \quad (8.22)$$

In questa approssimazione si ha (sottintendendo il limite $M \rightarrow \infty$)

$$I(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{M^2}{m^2} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2}. \quad (8.23)$$

Dalle (8.11), (8.18) e (8.23) si ottiene

$$\begin{aligned}
A_a^{(2)} + A_c^{(4)} &\propto (-ie)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \left\{ \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} I^{\mu\nu} \frac{-i}{q^2} \right\} \bar{u}_{f'} \gamma_\nu u_{i'} \\
&= (-ie)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \frac{-i}{q^2} \{1 - I(q^2)\} \bar{u}_{f'} \gamma^\mu u_{i'}. \quad (8.24)
\end{aligned}$$

Perciò la correzione al propagatore del fotone (moltiplicato per e^2) è espressa dal fattore

$$\begin{aligned}
e^2 \{1 - I(q^2) + O(e^4)\} &= e^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} + O(e^4) \right\} \\
&= e^2 \underbrace{\left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{M^2}{m^2} \right)}_{e_R^2} - \frac{e^4}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} + O(e^6) \\
&\equiv e_R^2 - \frac{e_R^4}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} + O(e_R^6), \quad (8.25)
\end{aligned}$$

dove e_R è la carica elettrica *rinormalizzata*. Per l'ampiezza (8.24) si ha

$$A_a^{(2)} + A_c^{(4)} \propto (-ie_R)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \frac{-i}{q^2} \bar{u}_{f'} \gamma_\mu u_{i'} \left(1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} \right). \quad (8.26)$$

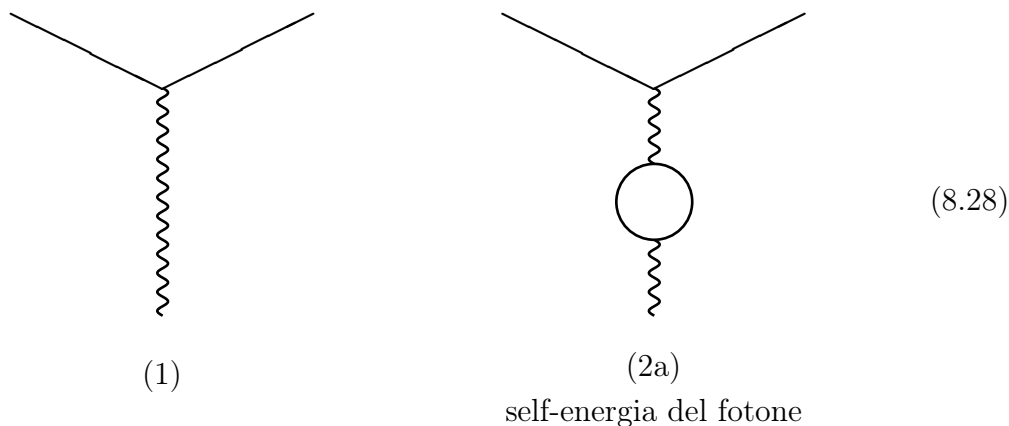
Notiamo che

- La carica elettrica è ridefinita in modo tale da assorbire la divergenza di $I(q^2)$ (*rinormalizzazione della carica*); e_R è la carica elettrica “fisica” misurata in processi di bassa energia: $e_R^2/4\pi \equiv \alpha_R \simeq 1/137$.
- L'ampiezza (8.26) è finita.
- L'effetto prodotto dal termine $-\frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2}$ è misurabile (come verrà mostrato in seguito).

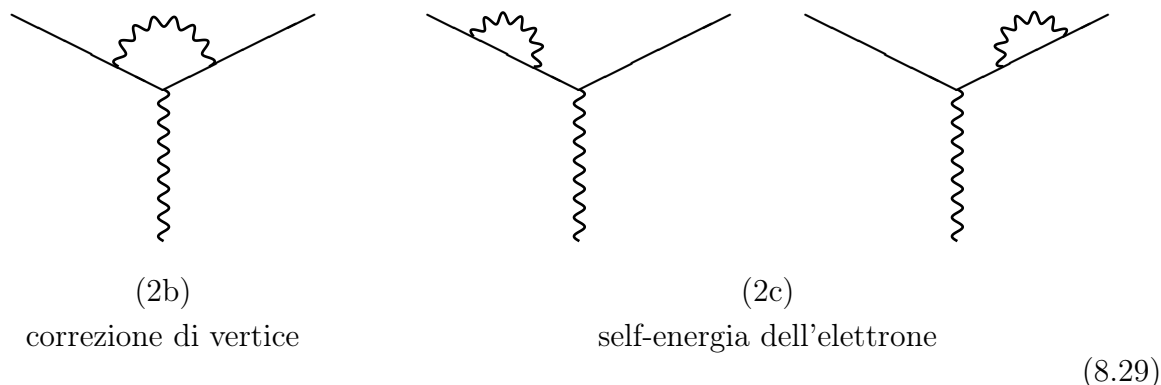
Per comodità di notazione, nel seguito si utilizzerà per la carica fisica (rinormalizzata) la notazione usuale “ e ” (quindi $e \equiv e_R$ e $\alpha \equiv \alpha_R$); la carica “nuda” (da rinormalizzare) verrà indicata con “ e_0 ”. Perciò, in queste notazioni, si ha

$$\boxed{e = e_0 \left(1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \log \frac{M^2}{m^2} \right)^{1/2}}. \quad (8.27)$$

Per esaminare compiutamente il fenomeno della rinormalizzazione della carica, occorrerebbe considerare, oltre ai diagrammi esaminati precedentemente,



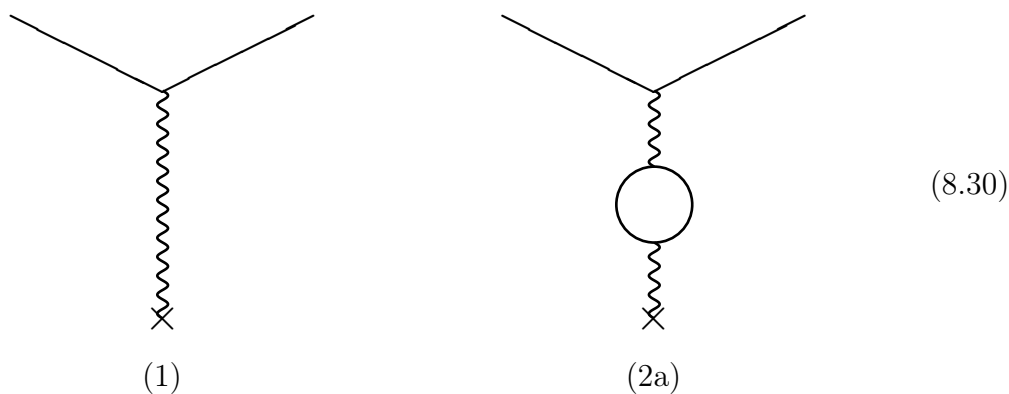
anche gli altri grafici rappresentanti le correzioni all'ordine α :



Risulta però che le modificazioni (infinite) alla carica introdotte dal diagramma (2b) si cancelano esattamente con quelle relative ai diagrammi (2c). Ne segue che la rinormalizzazione della carica è unicamente dovuta al diagramma (2a); essa è quindi data dalla (8.27) ed è indipendente dalla natura della particella (e^- , μ^- , ...).

► Correzioni radiative nell'interazione e^- –nucleo

Consideriamo i due diagrammi



Ponendo nella (8.26) (vedi la (7.114))

$$\bar{u}_{f'} \gamma^\mu u_{i'} \propto Z g^{\mu 0}, \quad (8.31)$$

per l'ampiezza relativa ai due diagrammi (8.30) si ottiene

$$A \propto (-ie)^2 Z (2\pi)^4 \delta^4(p_f + p'_f - p_i - p'_i) \bar{u}_f \gamma_0 u_i \frac{-i}{q^2} \left(1 - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2}\right). \quad (8.32)$$

Quindi, tenendo conto che $q^2 = -\vec{q}^2$ (poichè, come visto a pag.II.70, l'approssimazione statica per il nucleo impone la conservazione dell'energia dell'elettrone), si ha

$$A \propto Z e^2 \frac{1}{q^2} \left(1 - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2}\right) = -\frac{Z e^2}{\vec{q}^2} - \frac{Z e^4}{60\pi^2 m^2}. \quad (8.33)$$

Il potenziale è la trasformata di Fourier dell'ampiezza e quindi

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(-\frac{Z e^2}{\vec{q}^2} - \frac{Z e^4}{60\pi^2 m^2}\right) \\ &= -\frac{Z e^2}{4\pi r} - \frac{Z e^4}{60\pi^2 m^2} \delta^3(\vec{r}), \end{aligned} \quad (8.34)$$

dove si è utilizzato il risultato ($r \equiv |\vec{r}|$)

$$\begin{aligned} \int d^3q \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{\vec{q}^2} &= 2\pi \int_0^\infty d|\vec{q}| \int_{-1}^{+1} d\cos\theta e^{i|\vec{q}|r\cos\theta} \\ &= \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{2\pi^2}{r}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Dalle formule (8.33) e (8.34) discende che:

1. A piccolo momento trasferito, $\frac{\vec{q}^2}{m^2} \ll 1$ (grande parametro d'urto), l'elettrone viene diffuso da un potenziale con l'usuale dipendenza coulombiana $1/r$ dalla distanza.
2. A grande momento trasferito (quando l'elettrone penetra nella zona occupata dalla sorgente) il potenziale manifesta una componente attrattiva aggiuntiva proporzionale a $\delta^3(\vec{r})$.
3. Queste proprietà sono una manifestazione del fenomeno di polarizzazione del vuoto, che provoca a grande distanza un effetto di parziale schermatura della carica sorgente.
4. Nell'atomo di idrogeno il secondo termine della (8.34) provoca un abbassamento dei livelli energetici relativi agli stati S (per i quali $\psi_{n\ell}(0) \neq 0$); il calcolo perturbativo dà il risultato

$$\Delta E_{n\ell} = -\frac{e^4}{60\pi^2 m^2} \int d^3r |\psi_{n\ell}(\vec{r})|^2 \delta^3(\vec{r}) = -\frac{e^4}{60\pi^2 m^2} |\psi_{n\ell}(0)|^2. \quad (8.36)$$

Tenendo conto che

$$|\psi_{n\ell}(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3 n^3} \delta_{\ell 0}, \quad a_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m c} = \frac{1}{\alpha m} \quad (\text{in unità naturali}), \quad (8.37)$$

si ottiene

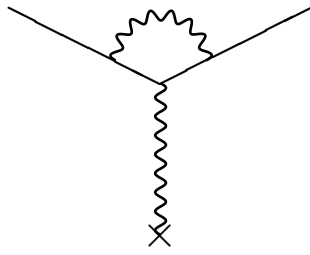
$$\Delta E_{n\ell} = -\frac{4m}{15\pi n^3} \alpha^5 \delta_{\ell 0}. \quad (8.38)$$

Per esempio, per lo stato $2S_{1/2}$ si ha

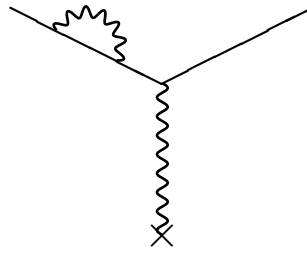
$$\Delta E = -1.12 \times 10^{-13} \text{ MeV} = -27 \text{ MHz} \quad \left(\nu = \frac{E}{2\pi\hbar} \right). \quad (8.39)$$

Questo valore rappresenta quindi il contributo del diagramma di polarizzazione del vuoto alla differenza in energia (*Lamb shift*) tra gli stati $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$.

Altri diagrammi che generano correzioni all'ordine α all'interazione e^- -nucleo sono



(2b)



(2c)

(8.40)

I loro contributi al Lamb shift sono (Itzykson & Zuber, pag.358)

$$\text{diagramma (2b)} : \quad \Delta E = 68 \text{ MHz}, \quad (8.41)$$

$$\text{diagrammi (2c)} : \quad \Delta E = 1011 \text{ MHz}. \quad (8.42)$$

La somma dei contributi dei diagrammi all'ordine α implica una differenza di energia

$$\Delta E = 1052 \text{ MHz} \quad (8.43)$$

tra gli stati $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$. Se si tiene conto di altre correzioni (correzioni radiative agli ordini superiori, effetti dovuti alla dimensione finita del protone, ecc.), il risultato teorico diviene

$$(\Delta E)_{\text{teorico}} = 1057.864 \pm 0.014 \text{ MHz}, \quad (8.44)$$

in ottimo accordo con i dati sperimentali:

$$(\Delta E)_{\text{sperimentale}} = 1057.862 \pm 0.020 \text{ MHz}. \quad (8.45)$$

► Momento magnetico anomalo

I diagrammi (2a)–(2c) forniscono per il rapporto giromagnetico dei leptoni carichi (Sakurai, pag.289)

$$\boxed{g = 2 + \frac{\alpha}{\pi}} \quad (8.46)$$

($g = 2$ è il valore di Dirac). Le correzioni di ordine superiore dipendono dalla massa del leptone.

► Rinormalizzazione della massa

In elettrodinamica quantistica anche la massa è soggetta ad un processo di rinormalizzazione secondo un meccanismo simile a quello della rinormalizzazione della carica. (vedi, per esempio, Mandl & Shaw, pag.190).

Parte III

Elementi di Interazione Debole

A. Bottino e C. Giunti

Capitolo 1

Generalità sull'interazione debole

1.1 Processi deboli

L'interazione debole è responsabile di

- numerosi processi di decadimento; per esempio

- il decadimento del muone

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e, \quad (1.1)$$

- il decadimento di pioni carichi in muoni e neutrini

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad (1.2)$$

- il decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (1.3)$$

- i decadimenti β nucleari

$$\underbrace{\mathcal{N}(Z, N) \rightarrow \mathcal{N}(Z+1, N-1) + e^- + \bar{\nu}_e}_{n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \text{ nel nucleo } \mathcal{N}} \quad (\text{decadimento } \beta^-), \quad (1.4)$$

$$\underbrace{\mathcal{N}(Z, N) \rightarrow \mathcal{N}(Z-1, N+1) + e^+ + \nu_e}_{p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \text{ nel nucleo } \mathcal{N}; \text{ questo processo}} \quad (\text{decadimento } \beta^+); \quad (1.5)$$

è energeticamente impossibile per protoni liberi

- altri processi fisici come

- reazioni indotte da neutrini; ad esempio

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e, \quad (1.6)$$

- cattura μ^- da parte di nuclei

$$\underbrace{\mu^- + \mathcal{N}(Z, N) \rightarrow \mathcal{N}(Z-1, N+1) + \nu_\mu}_{\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu \text{ nel nucleo } \mathcal{N}}; \quad (1.7)$$

- la formazione di un deutone a partire da due protoni (questa reazione inizia il ciclo di fusione principale all'interno del sole)

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e . \quad (1.8)$$

Vediamo ora alcune proprietà fondamentali dei processi deboli.

► Intensità dell'interazione debole

Le vite medie dei processi di decadimento debole sono assai più lunghe di quelle relative a decadimenti di tipo forte ($\tau \sim 10^{-23}$ s; per esempio, $\rho \rightarrow 2\pi$) o di tipo elettromagnetico ($\tau \sim 10^{-16}$ s; per esempio, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$). Per esempio

$$\tau(\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e) = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}, \quad (1.9)$$

$$\tau(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu) = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}. \quad (1.10)$$

Tenuto conto che la vita media è inversamente proporzionale alla larghezza di decadimento Γ ($\tau = \hbar/\Gamma$) e che questa è data dal modulo quadro dell'ampiezza di decadimento, integrata sugli stati finali, se ne deduce che nei processi di bassa energia l'interazione debole si manifesta con un'intensità assai più tenue di quelle dell'interazione forte e dell'interazione elettromagnetica. È quindi evidente che nei processi di bassa energia l'interazione debole ha un ruolo importante solo quando, per la natura delle particelle che vi partecipano o per le particolari leggi di conservazione, le interazioni forti ed elettromagnetiche non intervengono.

► Conservazione dei numeri leptonici

Nei processi deboli sopra indicati i leptoni compaiono associati a due a due nei doppietti, o famiglie, (ν_e, e^-) , (ν_μ, μ^-) , (ν_τ, τ^-) e nei loro coniugati di carica $(\bar{\nu}_e, e^+)$, $(\bar{\nu}_\mu, \mu^+)$, $(\bar{\nu}_\tau, \tau^+)$.

Questa proprietà induce ad associare ai leptoni di ogni doppietto un *numero leptonico*. Ai leptoni sinora osservati vengono associati i numeri leptonici

$$\begin{array}{ll} L_e & \text{(numero leptonico elettronico),} \\ L_\mu & \text{(numero leptonico muonico),} \\ L_\tau & \text{(numero leptonico del tau),} \end{array} \quad (1.11)$$

secondo lo schema descritto nella Tabella 1.1. Si definisce anche il numero leptonico totale

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau . \quad (1.12)$$

I numeri leptonici L_e , L_μ , L_τ sono separatamente conservati nei processi di interazione debole del tipo (1.1)–(1.8). Un esempio significativo di evidenza sperimentale della proprietà $L_e \neq L_\mu$ è fornito dal decadimento del μ^- , che avviene mediante il processo debole (1.1) e non mediante il processo elettromagnetico $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$.

Gli unici processi finora osservati in cui i numeri leptonici non sono conservati sono i processi di oscillazione dei neutrini solari e dei neutrini atmosferici, nei quali si realizzano transizioni del tipo $\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}$ ($\alpha' \neq \alpha$), dove α e α' sono indici di famiglia.

	L_e	L_μ	L_τ
(ν_e, e^-)	+1	0	0
(ν_μ, μ^-)	0	+1	0
(ν_τ, τ^-)	0	0	+1

Tabella 1.1: Assegnazione dei numeri leptonici

► Simmetria di crossing

Per le leggi di conservazione dei numeri leptonici (come per tutte quelle di numeri quantici additivi) è equivalente avere un leptone nello stato iniziale

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \bullet \\ \ell \end{array} \quad (1.13)$$

oppure la sua antiparticella nello stato finale

$$\begin{array}{c} \bullet \longrightarrow \\ \bar{\ell} \end{array} \quad (1.14)$$

Come conseguenza di questa proprietà, numerosi importanti processi deboli sono ricavabili l'uno dall'altro mediante l'operazione di *crossing* cioè lo scambio di una particella dello stato iniziale (finale) con la corrispondente antiparticella nello stato finale (iniziale).

Per esempio, dal processo (1.6)

$$\begin{array}{ccc} \nu_\mu & & \mu^- \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \text{---} \bullet \text{---} & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ e^- & & \nu_e \end{array} \quad (1.15)$$

si può ottenere, per crossing, il decadimento

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{\nu}_\mu \\ & \nearrow & \\ \mu^+ & \longrightarrow \bullet & \longrightarrow \nu_e \\ & \searrow & \\ & & e^+ \end{array} \quad (1.16)$$

che è il coniugato di carica del decadimento (1.1).

1.2 Violazione di leggi di conservazione

Alcune leggi di conservazione soddisfatte dall'interazione forte e da quella elettromagnetica sono invece violate dall'interazione debole.

$K^+ (u\bar{s}), K^0 (d\bar{s})$	$S = +1$
$\Lambda^0 (uds)$	$S = -1$
$\Sigma^+ (uus), \Sigma^0 (uds), \Sigma^- (dds)$	$S = -1$
$\Xi^0 (uss), \Xi^- (dss)$	$S = -2$

Tabella 1.2: Stranezza di alcuni mesoni e barioni

	B	Q	S
u	$1/3$	$2/3$	0
d	$1/3$	$-1/3$	0
s	$1/3$	$-1/3$	-1

Tabella 1.3: Assegnazione dei numeri quantici additivi B (numero barionico), Q (carica elettrica) e S (stranezza) ai quark u , d , s .

► Stranezza

La stranezza S è un numero quantico additivo che viene associato ad alcune particelle adroniche (ad esempio, ai mesoni $K^\pm$, K^0 , $\bar{K}^0$, ... e ai barioni Λ^0 , $\Sigma^\pm$, Σ^0 , Ξ^- , Ξ^0 , ...) per tenere conto del fatto che tali particelle compaiono sempre a coppie nei processi forti ed elettromagnetici a cui esse partecipano. L'assegnazione del valore della stranezza per alcuni mesoni e barioni è descritto nella Tabella 1.2, dove in parentesi è indicato per ciascuna particella il contenuto in termini dei quarks u (up), d (down), s (strange), con i numeri quantici additivi elencati nella Tabella 1.3.

Naturalmente, nell'operazione di coniugazione di carica si ha $S \rightarrow -S$:

$$K^-(S = -1), \quad \bar{K}^0(S = -1), \quad \bar{\Lambda}^0(S = +1), \quad \dots$$

La legge della conservazione della stranezza comporta che mediante l'urto di due adroni non strani non sia possibile produrre una singola particella strana; per esempio,

$$\pi^+ + n \not\rightarrow K^+ + n,$$

mentre un K^+ può essere prodotto congiuntamente ad un'altra particella strana (produzione associata), ad esempio

$$\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0. \quad (1.17)$$

Analogamente, altri processi forti sono, ad esempio,

$$K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0, \quad (1.18)$$

$$K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^+ + K^-. \quad (1.19)$$

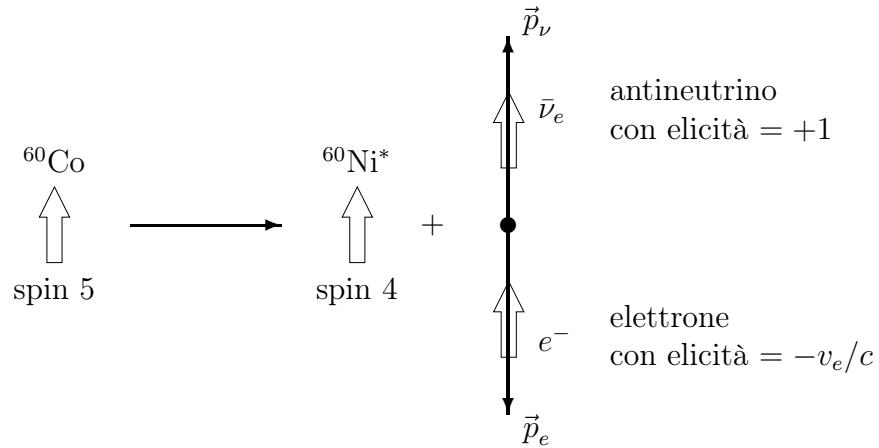


Figura 1.1: Configurazione preferenziale del decadimento (1.22).

Al contrario dei processi forti ed elettromagnetici, i processi deboli possono avvenire con violazione di stranezza. Questa proprietà consente, per esempio, i decadimenti

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (\text{processo semi-leptonico}), \quad (1.20)$$

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad (\text{processo non-leptonico}). \quad (1.21)$$

► Parità

L'interazione debole non conserva la parità, che è invece conservata nelle interazioni forte ed elettromagnetica.

La non-conservazione della parità è stata verificata sperimentalmente in numerosi processi di interazione debole, tra i quali il più famoso è quello relativo alla misurazione dell'asimmetria della distribuzione angolare dei prodotti del decadimento β^-



con nuclei polarizzati di ${}^{60}\text{Co}$ (gli spin nucleari vengono allineati mediante l'applicazione di un campo magnetico esterno). Questo decadimento avviene preferenzialmente con la configurazione descritta nella Figura 1.1, con l'emissione di un elettrone con valore medio di elicità $= -v_e/c$ e di un antineutrino elettronico con elicità $= +1$.

La configurazione descritta nella Figura 1.1 non è invariante per inversione spaziale. Infatti, come descritto nella Figura 1.2, per inversione spaziale i vettori polari degli impulsi cambiano segno, mentre i vettori assiali degli spin restano invariati. La configurazione (B) della Fig.1.2, ottenuta dalla configurazione (A) per inversione spaziale, non viene osservata sperimentalmente. Ciò significa che il processo non è invariante per inversione spaziale e quindi che la parità non è conservata.

Dalle osservazioni sperimentali di numerosi processi di decadimento β si è visto che

- nei decadimenti β^- vengono sempre emessi un elettrone con valore medio dell'elicità $= -v_e/c$ e un antineutrino elettronico con elicità $= +1$;

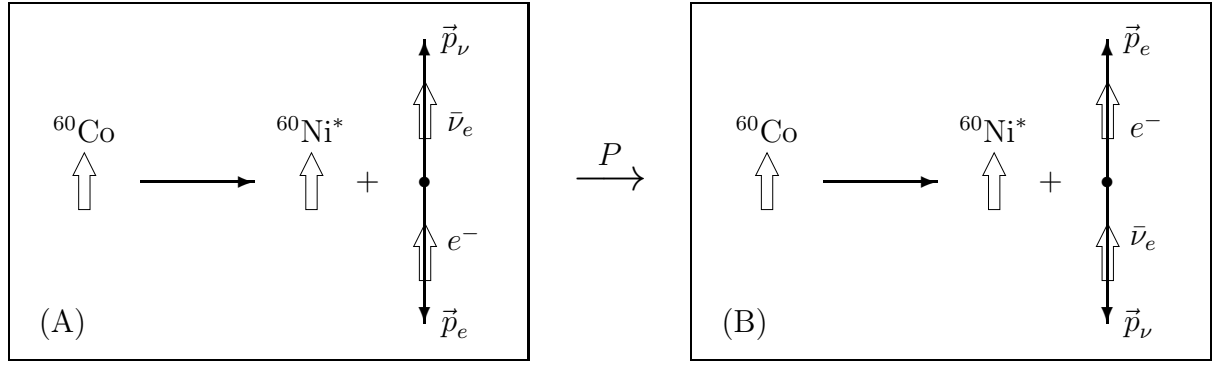


Figura 1.2: Inversione spaziale della configurazione preferenziale del decadimento (1.22).

- nei decadimenti β^+ vengono sempre emessi un positrone con valore medio dell'elicità $+v_e/c$ e un neutrino elettronico con elicità -1 .

Queste proprietà implicano che nei decadimenti β la *violazione della parità è massima* e che l'elettrone e il neutrino partecipano a questi processi con lo spinore (nello spazio degli impulsi)

$$u_L \equiv P_L u \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} u. \quad (1.23)$$

Per verificare questa proprietà, calcoliamo il valore medio dell'elicità dell'elettrone nello stato descritto dallo spinore u_L :

$$\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} \right\rangle_L = \frac{\sum_r u_L^{(r)\dagger}(p_e) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} u_L^{(r)}(p_e)}{\sum_r u_L^{(r)\dagger}(p_e) u_L^{(r)}(p_e)}. \quad (1.24)$$

Calcoliamo il numeratore della (1.24), tenendo conto che $[\vec{\Sigma}, \gamma^5] = 0$,

$$\begin{aligned} \text{numeratore} &= \frac{1}{4} \sum_r u^{(r)\dagger}(p_e) (1 + \gamma^5) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} (1 + \gamma^5) u^{(r)}(p_e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_r u^{(r)\dagger}(p_e) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} (1 + \gamma^5) u^{(r)}(p_e) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} (1 + \gamma^5) \sum_r u^{(r)}(p_e) u^{(r)\dagger}(p_e) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} (1 + \gamma^5) \frac{\not{p}_e + m_e}{2m_e} \gamma^0 \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Essendo $\vec{\Sigma} = -\gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^5$, per il numeratore della (1.24) si ottiene

$$\begin{aligned}
\text{numeratore} &= \frac{1}{4m_e} \frac{p_e^k}{|\vec{p}_e|} \text{Tr}[\Sigma^k (1 + \gamma^5) (\not{p}_e + m_e) \gamma^0] \\
&= \frac{1}{4m_e} \frac{p_e^k}{|\vec{p}_e|} \text{Tr}[(-\gamma^k) (1 + \gamma^5) (\not{p}_e + m_e)] \\
&= -\frac{1}{4m_e} \frac{p_e^k}{|\vec{p}_e|} \left\{ \underbrace{\text{Tr}[\gamma^k \not{p}_e]}_{4p_e^k} - \underbrace{\text{Tr}[\gamma^k \not{p}_e \gamma^5]}_0 \right\} = -\frac{|\vec{p}_e|}{m_e}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Calcoliamo ora il denominatore della (1.24):

$$\begin{aligned}
\text{denominatore} &= \frac{1}{4} \sum_r u^{(r)\dagger}(p_e) (1 + \gamma^5) (1 + \gamma^5) u^{(r)}(p_e) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(1 + \gamma^5) \sum_r u^{(r)}(p_e) u^{(r)\dagger}(p_e) \right] \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(1 + \gamma^5) \frac{\not{p}_e + m_e}{2m_e} \gamma^0 \right] = \frac{1}{4m_e} \text{Tr}[\not{p}_e \gamma^0] = \frac{E_e}{m_e}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Quindi, per il valor medio dell'elicità dell'elettrone si ottiene

$$\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} \right\rangle_L = -\frac{|\vec{p}_e|}{E_e} = -\frac{v_e}{c} \quad (\text{in unità ordinarie}). \tag{1.28}$$

Analogamente, si ottiene che il valore medio dell'elicità in uno stato descritto dallo spinore

$$u_R \equiv P_R u \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} u \tag{1.29}$$

è

$$\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} \right\rangle_R = +\frac{v_e}{c}. \tag{1.30}$$

Questo sarebbe il valore medio dell'elicità dell'elettrone, qualora la configurazione preferenziale del decadimento β^- fosse quella (B) di Fig.1.2, anzichè quella (A).

Se vi fosse conservazione della parità nel decadimento β^- , l'elettrone sarebbe descritto dallo spinore completo $u = u_L + u_R$ ed il valore medio dell'elicità sarebbe nullo. Dal fatto che sperimentalmente si osserva $\left\langle \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} \right\rangle = -\frac{v_e}{c}$ (che è uno dei due valori estremi $\pm v_e/c$), si deduce che nel processo in esame non solo si ha violazione di parità, ma anche che questa violazione è massima.

Capitolo 2

Spinori chirali

2.1 Autofunzioni dell'operatore chiralità

La matrice γ^5 è detta operatore di chiralità. Poichè l'operatore γ^5 è hermitiano esso è diagonalizzabile; dalla proprietà $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$ segue che gli autovalori di γ^5 sono ± 1 . Indichiamo con ψ_L e ψ_R le autofunzioni di γ^5 con autovalori $+1$ e -1 , rispettivamente; ossia,

$$\gamma^5 \psi_L = + \psi_L , \quad (2.1a)$$

$$\gamma^5 \psi_R = - \psi_R . \quad (2.1b)$$

A partire da uno spinore generico ψ è possibile generare le due autofunzioni di γ^5 nel modo seguente:

$$\psi_L \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi , \quad (2.2a)$$

$$\psi_R \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi , \quad (2.2b)$$

come si può immediatamente verificare.

Uno spinore qualsiasi ψ può essere scomposto nella somma

$$\psi = \psi_L + \psi_R . \quad (2.3)$$

Conviene definire due operatori di proiezione di chiralità:

$$P_L \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} , \quad (2.4a)$$

$$P_R \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} , \quad (2.4b)$$

che soddisfano alle proprietà

$$P_L + P_R = \mathbb{1} , \quad (2.5a)$$

$$(P_L)^2 = P_L , \quad (2.5b)$$

$$(P_R)^2 = P_R , \quad (2.5c)$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0 . \quad (2.5d)$$

► **ψ_L e ψ_R in rappresentazione chirale**

La rappresentazione chirale delle matrici γ è definita come la rappresentazione in cui γ^5 è diagonale:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

In questa rappresentazione la forma esplicita degli operatori di proiezione di chiralità è particolarmente semplice:

$$P_L \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7a)$$

$$P_R \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7b)$$

Scrivendo un generico spinore ψ come

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

dove χ_1 e χ_2 sono spinori a due componenti, per le autofunzioni (2.2) dell'operatore chiralità si ha

$$\psi_L = P_L \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9a)$$

$$\psi_R = P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.9b)$$

Conviene quindi usare le definizioni

$$\chi_L \equiv \chi_1, \quad \chi_R \equiv \chi_2, \quad (2.10)$$

per cui

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_R \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

► **Equazioni del moto per ψ_L e ψ_R**

Se ψ è una generica soluzione dell'equazione di Dirac libera, abbiamo

$$\begin{aligned} i \not{\partial} \psi_L &\equiv i \not{\partial} \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \frac{1 - \gamma^5}{2} i \not{\partial} \psi \\ &= \frac{1 - \gamma^5}{2} m \psi \equiv m \psi_R, \end{aligned} \quad (2.13)$$

e analogamente

$$i \not{\partial} \psi_R = m \psi_L. \quad (2.14)$$

Queste sono le due equazioni del moto per ψ_L e ψ_R . Esse sono accoppiate dal termine di massa e si disaccoppiano solo se $m = 0$. Tale proprietà è da mettersi in relazione con il fatto che la chiralità è un buon numero quantico (ossia γ^5 commuta con l'hamiltoniana di Dirac $\mathbb{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$) solo se $m = 0$; infatti,

$$[\gamma^5, \alpha^k] = 0, \quad [\gamma^5, \beta] = 2\gamma^5\beta \neq 0. \quad (2.15)$$

Le proprietà peculiari delle particelle di spin 1/2 con massa nulla derivano dall'invarianza della densità lagrangiana di Dirac per trasformazioni chirali. Definita come trasformazione chirale la trasformazione

$$\psi \rightarrow \gamma_5 \psi, \quad (2.16)$$

la lagrangiana di Dirac si trasforma nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi &\xrightarrow[\psi \rightarrow \gamma_5 \psi]{} \bar{\psi}(-\gamma_5)(i\partial - m)\gamma_5\psi \\ &= \bar{\psi}(i\partial + m)\gamma_5^2\psi = \bar{\psi}(i\partial + m)\psi \\ &= \mathcal{L}_D + 2m\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si ha quindi invarianza per trasformazione di chiralità se e solo se $m = 0$.

Come si è visto, per una particella di spin 1/2 con $m = 0$ le equazioni del moto (2.13) e (2.14) per gli spinori ψ_L e ψ_R sono disaccoppiate. In questo caso è possibile che per la descrizione della particella sia sufficiente solo uno dei due spinori, ψ_L o ψ_R .

2.2 Proprietà di elicità per $m = 0$

L'equazione di Dirac per $m = 0$ può essere scritta come

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}\right)\psi = 0. \quad (2.18)$$

Moltiplicandola a sinistra per $\gamma^5\gamma^0$ si ha

$$-i\gamma^5\gamma^0\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}\psi = i\gamma^5\gamma^0\gamma^0\partial_0\psi,$$

ossia, utilizzando la definizione $\vec{\Sigma} = -\gamma^0\vec{\gamma}\gamma^5$,

$$i\vec{\Sigma} \cdot \vec{\nabla}\psi = \gamma^5 i\partial_0\psi. \quad (2.19)$$

Sostituendo

$$\psi(x) = e^{-ip \cdot x} u(p) \quad (p^0 = +|\vec{p}|), \quad (2.20)$$

si ottiene

$$\boxed{-\underbrace{\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}}_{\text{operatore di elicità}} u(p) = \underbrace{\gamma^5}_{\text{operatore di chiralità}} u(p)}. \quad (2.21)$$

Quindi le autofunzioni dell'operatore di chiralità sono anche autofunzioni dell'operatore elicità, con autovalori di segno opposto per soluzioni ad energia positiva (per soluzioni ad energia negativa, $p^0 = -|\vec{p}|$, gli autovalori sono identici).

2.3 Equazioni di Weyl

Nella rappresentazione chirale si ha

$$\vec{\Sigma} = -\gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^5 = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

e quindi l'eq.(2.19) si scrive

$$\begin{pmatrix} i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & 0 \\ 0 & i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Da questa equazione si ottengono le due equazioni disaccoppiate

$$\boxed{i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_L = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_L}, \quad (2.24a)$$

$$\boxed{-i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_R = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_R}. \quad (2.24b)$$

Queste sono le *equazioni di Weyl* e gli spinori a due componenti χ_L e χ_R , loro soluzioni, sono detti *spinori di Weyl*.

Sostituendo nelle (2.24)

$$\chi_{L,R}(x) = e^{-ip \cdot x} \chi_{L,R}(p), \quad (2.25)$$

si ottiene

$$-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_L(p) = p^0 \chi_L(p), \quad (2.26a)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_R(p) = p^0 \chi_R(p). \quad (2.26b)$$

Queste equazioni implicano che

$$p_0^2 \chi_{L,R}(p) = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \chi_{L,R}(p) = \vec{p}^2 \chi_{L,R}(p), \quad (2.27)$$

da cui segue che $p_0 = \pm |\vec{p}|$. Quindi (vedi la Fig.2.1a)

$$\begin{aligned} \chi_L(p) &\text{ descrive uno stato ad elicit\`a } -1 \text{ (sinistrorsa) per } p_0 = +|\vec{p}|, \\ \chi_L(p) &\text{ descrive uno stato ad elicit\`a } +1 \text{ (destrorsa) per } p_0 = -|\vec{p}|, \end{aligned}$$

mentre (vedi la Fig.2.1b)

$$\begin{aligned} \chi_R(p) &\text{ descrive uno stato ad elicit\`a } +1 \text{ (destrorsa) per } p_0 = +|\vec{p}|, \\ \chi_R(p) &\text{ descrive uno stato ad elicit\`a } -1 \text{ (sinistrorsa) per } p_0 = -|\vec{p}|. \end{aligned}$$

2.4 Neutrini e antineutrini

Per particelle con $m \neq 0$ l'elicit\`a non \`e una grandezza Lorentz-invariante. Infatti, mediante una trasformazione di Lorentz che manda $\vec{p}$ in $-\vec{p}$, si pu\`o cambiare il segno dell'elicit\`a della particella. Questa operazione non \`e possibile per particelle di massa nulla, che si

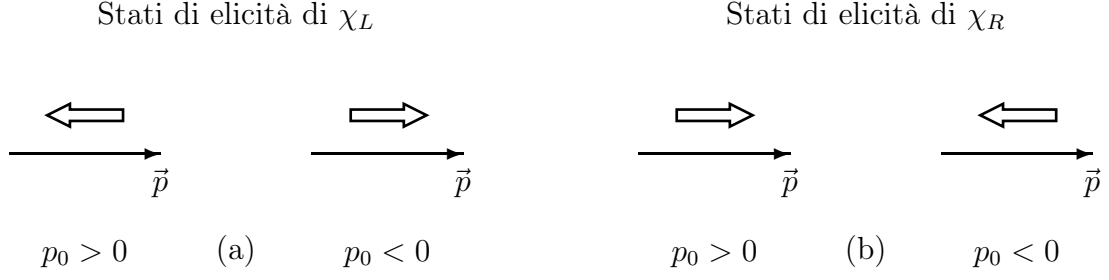


Figura 2.1: Stati di elicità di χ_L e χ_R .

propagano con la velocità della luce; per queste particelle l'elicità è quindi una grandezza Lorentz-invariante.

Se la massa dei neutrini è nulla, allora i neutrini soddisfano alle equazioni di Weyl e possono essere descritti da spinori a due componenti χ_L o χ_R (che, attraverso l'eq.(2.11), sono equivalenti agli spinori a quattro componenti ψ_L e ψ_R). Per stabilire quale di queste soluzioni sia realizzata in natura, occorre fare ricorso ai risultati sperimentali sullo studio dei processi deboli (per esempio, decadimenti β nucleari). Quest'aspetto del problema è stato presentato nel capitolo precedente, dove abbiamo visto che i neutrini, emessi nei processi β^+ unitamente ai positroni, hanno elicità = -1 . Pertanto i neutrini devono essere associati a spinori sinistrorsi χ_L , con i seguenti valori di elicità:

$$\begin{aligned} \nu \text{ con } E > 0 & \implies \text{elicità} = -1 \\ \nu \text{ con } E < 0 & \implies \text{elicità} = +1 \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, in generale, per una particella di Dirac si ha

	energia	impulso	spin	elicità
particella con $E < 0$	$- E $	$\vec{p}$	$\frac{\hbar}{2}\langle\vec{\Sigma}\rangle$	$\left\langle\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{ \vec{p} }\right\rangle$
antiparticella con $E > 0$	$+ E $	$-\vec{p}$	$-\frac{\hbar}{2}\langle\vec{\Sigma}\rangle$	$\left\langle\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{ \vec{p} }\right\rangle$

Ne segue che, se si associa ad un neutrino con energia $E > 0$ un valore di elicità -1 , allora occorre associare ad un antineutrino ($\bar{\nu}$) con energia $E > 0$ un valore di elicità $+1$.

Quindi ν e $\bar{\nu}$, oltre ad essere differenziati da valori opposti di numero leptonico, sono anche caratterizzati da valori opposti di elicità (e di chiralità).

2.5 Operazioni C , P , T sulle equazioni di Weyl

Studiamo ora le proprietà di trasformazione delle equazioni di Weyl per le trasformazioni discrete C , P , T .

► Inversione spaziale

La trasformazione dello spinore $\psi(x)$ per l'operazione di inversione spaziale $x = (t, \vec{x}) \xrightarrow{P} x' = (t, -\vec{x})$ è data da

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi'(x') = \gamma^0 \psi(x), \quad (2.28)$$

dove è stato ommesso un possibile fattore di fase η_P . Scrivendo la (2.28) in rappresentazione chirale, si ha

$$\begin{pmatrix} \chi_L(x) \\ \chi_R(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} \chi'_L(x') \\ \chi'_R(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L(x) \\ \chi_R(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_R(x) \\ \chi_L(x) \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

e quindi, per inversione spaziale,

$$\chi_L(x) \xleftrightarrow{P} \chi_R(x). \quad (2.30)$$

Questa proprietà di trasformazione può essere immediatamente verificata mediante le configurazioni illustrate in Fig.2.1, tenendo conto che l'impulso è un vettore polare e lo spin un vettore assiale.

Per l'operazione di inversione spaziale le due equazioni di Weyl (2.24) si trasformano l'una nell'altra. Per esempio, la (2.24a),

$$i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_L(x) = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_L(x). \quad (2.31)$$

diventa

$$i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}' \chi'_L(x') = i \frac{\partial}{\partial t} \chi'_L(x'). \quad (2.32)$$

Poichè

$$\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}, \quad \chi'_L(x') = \chi_R(x), \quad (2.33)$$

si ottiene

$$-i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_R(x) = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_R(x), \quad (2.34)$$

che coincide con la (2.24b). Analogamente, per trasformazione P la (2.24b) si trasforma nella (2.24a).

Quindi, le singole equazioni di Weyl non sono invarianti per l'operatore P , ma si trasformano l'una nell'altra.

► Coniugazione di carica

La trasformazione dello spinore $\psi(x)$ per l'operazione di coniugazione di carica è data da

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^c = \mathcal{C} \bar{\psi}, \quad (2.35)$$

dove è stato ommesso un possibile fattore di fase η_C . Nella rappresentazione chirale

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

e, scrivendo $\psi(x)$ nella forma (2.12), per $\tilde{\psi}$ si ha

$$\tilde{\psi} = \tilde{\gamma}^0 \psi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L^* \\ \chi_R^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_R^* \\ \chi_L^* \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

per cui

$$\psi^c = \mathcal{C} \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_R^* \\ \chi_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 \chi_R^* \\ -i\sigma^2 \chi_L^* \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Combinando le operazioni di coniugazione di carica e inversione spaziale si ottiene

$$\psi \xrightarrow{P} \psi^P(x^P) = \gamma^0 \psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_R(x) \\ \chi_L(x) \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\psi(x) \xrightarrow{CP} \mathcal{C} \widetilde{\psi^P}(x^P) = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \chi_L^*(x) \\ \chi_R^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 \chi_L^*(x) \\ -i\sigma^2 \chi_R^*(x) \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Le equazioni di Weyl sono invarianti per l'operazione CP . Per esempio, per CP la (2.31) assume la forma (2.32) con

$$\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}, \quad \chi_L'(x') = \text{costante} \times \sigma^2 \chi_L^*(x), \quad (2.41)$$

cioè

$$-i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \sigma^2 \chi_L^*(x) = i \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 \chi_L^*(x).$$

Moltiplicando a sinistra per σ^2 ,

$$-i \underbrace{(\sigma^2 \vec{\sigma} \sigma^2)}_{-\vec{\sigma}^*} \cdot \vec{\nabla} \chi_L^*(x) = i \underbrace{(\sigma^2)^2}_1 \frac{\partial}{\partial t} \chi_L^*(x),$$

e prendendo il complesso coniugato si ottiene

$$i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_L(x) = i \frac{\partial}{\partial t} \chi_L(x), \quad (2.42)$$

che coincide con la (2.31).

Quindi le equazioni di Weyl non sono invarianti per le singole trasformazioni discrete P e C , ma lo sono per l'operazione congiunta CP .

► Inversione temporale

Le equazioni di Weyl sono invarianti per inversione temporale. Infatti, la trasformazione dello spinore $\psi(x)$ per l'operazione di inversione temporale $x = (t, \vec{x}) \xrightarrow{T} x' = (-t, \vec{x})$ è data da

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi'(x') = \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\psi}(x), \quad (2.43)$$

con $\mathcal{B} = \gamma^0 \gamma^5 \mathcal{C}$. Nella rappresentazione chirale si ha

$$\mathcal{B} = \gamma^0 \gamma^5 \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & i\tilde{\sigma}^2 \\ i\tilde{\sigma}^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\psi'(x') = \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\psi}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_R^* \\ \chi_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \chi_L^* \\ -i\sigma^2 \chi_R^* \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Per inversione temporale l'equazione di Weyl (2.31) assume la forma

$$i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi'_L(x') = i \frac{\partial}{\partial t'} \chi'_L(x'). \quad (2.47)$$

con

$$\frac{\partial}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad \chi'_L(x') = \text{costante} \times \sigma^2 \chi_L^*(x), \quad (2.48)$$

Perciò, seguendo lo stesso procedimento adottato nel caso dell'operazione CP , si dimostra che l'Eq.(2.47) è equivalente alla (2.31).

Le proprietà di invarianza delle equazioni di Weyl per trasformazioni CP e T sono in accordo con il teorema CPT , che asserisce l'invarianza delle leggi fisiche per la trasformazione CPT .

2.6 Covarianti bilineari con spinori chirali

Studiamo le proprietà dei covarianti bilineari con spinori chirali, ossia delle espressioni del tipo

$$\bar{\psi}_{L,R} \Gamma^a \psi_{L,R}, \quad (2.49)$$

dove le matrici Γ^a sono le 16 matrici 4×4 definite nel Paragrafo 1.2.2 della Parte prima.

Raggruppiamo le Γ^a in 2 classi a seconda delle loro proprietà di commutazione con γ_5 :

1) $\Gamma^a = \mathbb{1}, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}$, che hanno le seguenti proprietà di commutazione:

$$[\gamma_5, \Gamma^a] = 0, \quad [P_L, \Gamma^a] = [P_R, \Gamma^a] = 0. \quad (2.50)$$

2) $\Gamma^a = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5$, con le seguenti proprietà:

$$\{\gamma_5, \Gamma^a\} = 0, \quad P_L \Gamma^a = \Gamma^a P_R, \quad P_R \Gamma^a = \Gamma^a P_L. \quad (2.51)$$

Da queste proprietà e da

$$\overline{\psi_L} = \left[\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi \right]^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5), \quad (2.52)$$

segue che

$$\bar{\psi}_L \Gamma^a \psi_L = \bar{\psi} P_R \Gamma^a P_L \psi = \begin{cases} \bar{\psi} \Gamma^a P_R P_L \psi = 0 \\ \bar{\psi} \Gamma^a P_L^2 \psi \neq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (\Gamma^a = \mathbb{1}, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}), \\ (\Gamma^a = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5). \end{matrix} \quad (2.53)$$

Le stesse proprietà valgono per i covarianti $\bar{\psi}_R \Gamma^a \psi_R$. Per i covarianti bilineari misti L - R , si ha invece

$$\bar{\psi}_L \Gamma^a \psi_R = \bar{\psi} P_R \Gamma^a P_R \psi = \begin{cases} \bar{\psi} \Gamma^a P_R^2 \psi \neq 0 \\ \bar{\psi} \Gamma^a P_L P_R \psi = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (\Gamma^a = \mathbb{1}, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}), \\ (\Gamma^a = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5). \end{matrix} \quad (2.54)$$

e proprietà analoghe per $\bar{\psi}_R \Gamma^a \psi_L$.

Si notino in particolare i seguenti risultati:

$$\Gamma^a = \mathbb{1} : \quad \overline{\psi}_L \psi_R \neq 0, \quad \overline{\psi}_R \psi_L \neq 0, \quad \overline{\psi}_L \psi_L = \overline{\psi}_R \psi_R = 0; \quad (2.55)$$

$$\Gamma^a = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5 : \quad \overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \neq 0, \quad \overline{\psi}_L \gamma^\mu \gamma_5 \psi_L \neq 0. \quad (2.56)$$

Ne segue che per particelle descritte da spinori chirali ψ_L (per esempio il neutrino) è possibile scrivere correnti vettoriali ed assiali, mentre l'invariante $\overline{\psi}_L \psi_L$, che viene naturale collegare con un termine di massa della lagrangiana, è identicamente nullo.

2.7 Spinori di Majorana

Per spinore di Majorana si intende uno spinore a quattro componenti autoconiugato di carica:

$$\psi^M = (\psi^M)^c. \quad (2.57)$$

Determiniamo la forma di ψ^M . Dato un generico spinore

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

il suo coniugato di carica è (con una particolare scelta del fattore di fase)

$$\psi^c = \begin{pmatrix} \sigma^2 \chi_R^* \\ -\sigma^2 \chi_L^* \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

La condizione $\psi = \psi^c$ è quindi equivalente a

$$\begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \chi_R^* \\ -\sigma^2 \chi_L^* \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

ossia

$$\chi_R = -\sigma^2 \chi_L^* \quad (\text{che implica } \chi_L = \sigma^2 \chi_R^*). \quad (2.61)$$

Quindi uno spinore di Majorana può essere scritto nella forma

$$\psi^M = \begin{pmatrix} \chi_L \\ -\sigma^2 \chi_L^* \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

È chiaro che gli spinori di Majorana, come gli spinori di Weyl, hanno metà gradi di libertà rispetto agli spinori di Dirac.

Capitolo 3

Processi deboli con correnti cariche

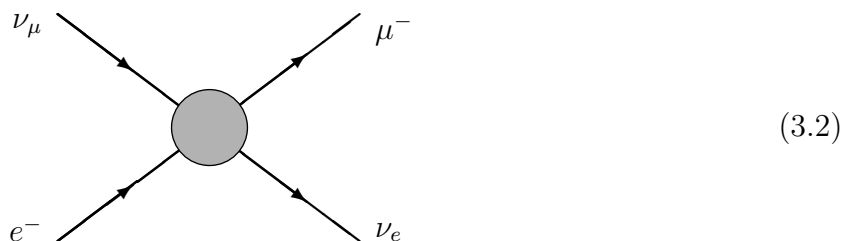
3.1 Ampiezze con scambio di W

Nella prospettiva di una trattazione unificata delle interazioni fondamentali, assumiamo che l'interazione debole tra particelle elementari si realizzi con un meccanismo simile a quello dell'interazione elettromagnetica. Così come due cariche elettriche interagiscono tra loro mediante scambio di fotoni (quanti del campo elettromagnetico, con spin 1), ipotizziamo che l'interazione debole tra coppie di fermioni avvenga tramite lo scambio di un bosone intermedio W con spin 1.

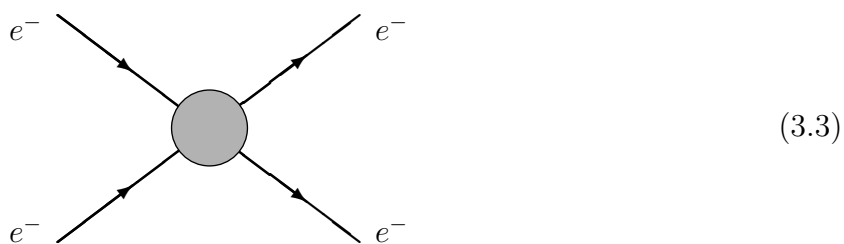
Prendiamo in esame, per esempio, il processo debole

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e, \quad (3.1)$$

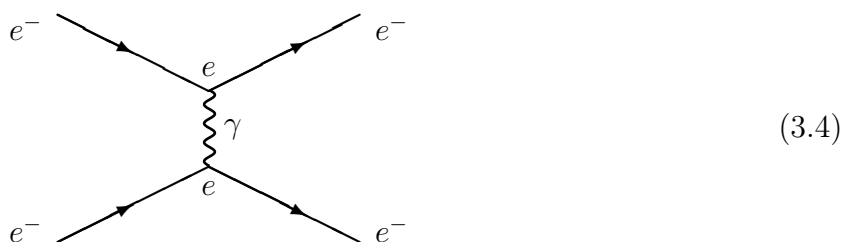
che è schematizzato dal diagramma



E consideriamo l'analogia con il processo elettromagnetico $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$,



che all'ordine perturbativo più basso è schematizzato dal diagramma di Feynman

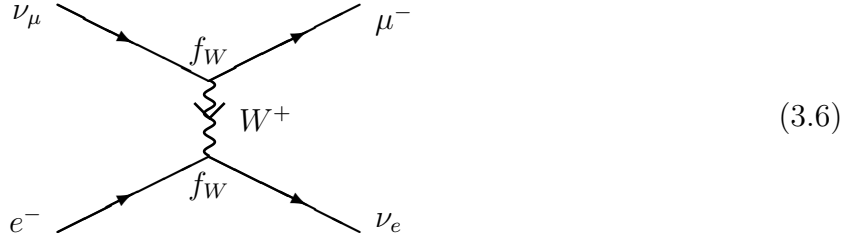


la cui ampiezza è proporzionale a¹

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{em}} &= e \langle e_f^- | j_\alpha^{\text{em}}(0) | e_i^- \rangle G_{(\gamma)}^{\alpha\beta} e \langle e_{f'}^- | j_\beta^{\text{em}}(0) | e_{i'}^- \rangle \\ &= e \bar{u}_f \gamma_\alpha u_i \frac{-i g^{\alpha\beta}}{q^2} e \bar{u}_{f'} \gamma_\beta u_{i'}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

dove $G_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ è il propagatore del fotone, con quadri-impulso q .

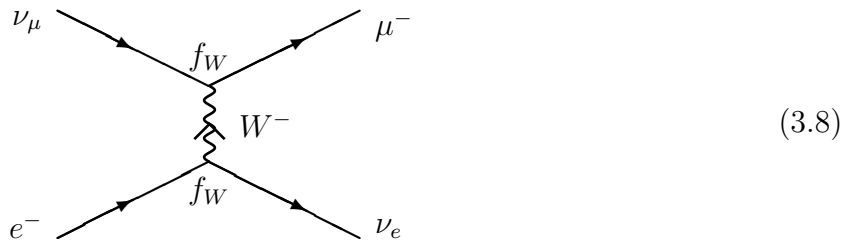
Assumiamo che il processo (3.2) avvenga, all'ordine perturbativo più basso, mediante il diagramma



con ampiezza proporzionale a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{deb}} &= f_W \langle \mu^- | j_\alpha^{W\dagger}(0) | \nu_\mu \rangle G_{(W)}^{\alpha\beta} f_W \langle \nu_e | j_\beta^W(0) | e^- \rangle \\ &= 2 f_W [\bar{u}_{\nu_\mu L} \Gamma_\alpha u_{\mu L}]^\dagger G_{(W)}^{\alpha\beta} 2 f_W \bar{u}_{\nu_e L} \Gamma_\beta u_{eL},\end{aligned}\quad (3.7)$$

dove $G_{(W)}^{\alpha\beta}$ è il propagatore del bosone W e f_W è la costante di accoppiamento debole, analoga alla carica elettrica elementare e (il fattore arbitrario 2 è introdotto solo per semplificare le formule che seguiranno). La quadri-corrente j_α^W è detta *corrente debole carica* perchè induce transizioni tra stati con cariche elettriche diverse (ad esempio, $e^- \rightarrow \nu_e$ e $\mu^- \rightarrow \nu_\mu$, mentre $j_\alpha^{W\dagger}$ induce le transizioni inverse $\nu_e \rightarrow e^-$ e $\nu_\mu \rightarrow \mu^-$). Per tenere conto della conservazione della carica elettrica, è necessario che il bosone W che si propaga dal vertice ν_μ - μ^- al vertice e^- - ν_e abbia carica elettrica $+|e|$, da cui segue la notazione W^+ . L'antiparticella del W^+ ha carica elettrica $-|e|$ e viene chiamata W^- . Il diagramma (3.6) è equivalente al diagramma



Nello scrivere l'elemento di matrice della corrente debole carica per la transizione $e^- \rightarrow \nu_e$ come

$$\langle \nu_e | j_\beta^W(0) | e^- \rangle = 2 \bar{u}_{\nu_e L} \Gamma_\beta u_{eL} = \frac{1}{2} \bar{u}_{\nu_e} (1 - \gamma_5) \Gamma_\beta (1 + \gamma_5) u_e \quad (3.9)$$

si è tenuto conto dell'osservazione sperimentale che nelle interazioni deboli la violazione della parità è massima e i leptoni partecipano alle interazioni deboli con lo spinore sinistrorso (1.23).

¹Questa relazione e le seguenti valgono a meno di un fattore di normalizzazione per gli spinori.

Per determinare la struttura della matrice 4×4 Γ_β , osserviamo che la sua espressione più generale è data dalla combinazione lineare $\Gamma_\beta = a \gamma_\beta + b \gamma_\beta \gamma_5$. Infatti altri eventuali termini del tipo $\mathbb{1} q_\beta$, $\gamma_5 q_\beta$, $\sigma_{\beta\alpha} q_\alpha$ (dove q è il quadri-momento trasferito), inseriti nell'espressione (3.9), darebbero contributi nulli a causa delle proprietà $(1 - \gamma_5)\mathbb{1}(1 + \gamma_5) = 0$, $(1 - \gamma_5)\gamma_5(1 + \gamma_5) = 0$, $(1 - \gamma_5)\sigma^{\mu\nu}(1 + \gamma_5) = 0$. Inoltre, dalla proprietà

$$(a \gamma_\beta + b \gamma_\beta \gamma_5) (1 + \gamma_5) = (a + b) \gamma_\beta (1 + \gamma_5) \quad (3.10)$$

segue che, a meno di una costante moltiplicativa che può essere assorbita nella costante f_W della formula (3.7), possiamo semplicemente porre $\Gamma_\beta = \gamma_\beta$. Perciò scriviamo l'elemento di matrice (3.9) come

$$\langle \nu_e | j_\beta^W(0) | e^- \rangle = 2 \bar{u}_{\nu_e L} \gamma_\beta u_{eL} = \bar{u}_{\nu_e} \gamma_\beta (1 + \gamma_5) u_e \quad (3.11)$$

Questa espressione della corrente debole è detta di forma $V - A$ ed implica la *massima violazione della parità*.

Analogamente, l'elemento di matrice della corrente debole carica per una transizione $\mu^- \rightarrow \nu_\mu$ è dato da

$$\langle \nu_\mu | j_\alpha^W(0) | \mu^- \rangle = 2 \bar{u}_{\nu_\mu L} \gamma_\alpha u_{\mu L} = \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_\mu \quad (3.12)$$

Prendendo l'hermitiano coniugato e tenendo conto che $\gamma_0 \gamma_\alpha^\dagger \gamma_0 = \gamma_\alpha$ e $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, si ottiene

$$\langle \mu^- | j_\alpha^{W\dagger}(0) | \nu_\mu \rangle = \bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_{\nu_\mu} = 2 \bar{u}_{\mu L} \gamma_\alpha u_{\nu_\mu L}. \quad (3.13)$$

Quindi, possiamo scrivere l'ampiezza debole (3.7) come

$$\mathcal{M}_{\text{deb}} = f_W^2 \bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_{\nu_\mu} G_{(W)}^{\alpha\beta} \bar{u}_{\nu_e} \gamma_\beta (1 + \gamma_5) u_e. \quad (3.14)$$

È possibile ricavare questa ampiezza a partire dalla lagrangiana di interazione

$$\boxed{\mathcal{L}_{W,\ell}(x) = f_W j_\alpha^W(x) W^\alpha(x) + \text{h.c.}}, \quad (3.15)$$

dove $j_\alpha^W(x)$ è la corrente debole carica

$$\boxed{j_\alpha^W = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_e + \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_\mu + \bar{\psi}_{\nu_\tau} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_\tau}, \quad (3.16)$$

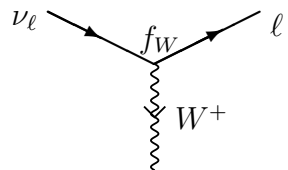
e $W^\alpha(x)$ è l'operatore di campo del bosone W . L'operatore coniugato hermitiano della corrente j_α^W è

$$j_\alpha^{W\dagger} = \bar{\psi}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_\mu} + \bar{\psi}_\tau \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_\tau}, \quad (3.17)$$

come si deduce dalla proprietà

$$\begin{aligned} \left[\bar{\psi}_1 \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_2 \right]^\dagger &= \bar{\psi}_2 \gamma_0 (1 + \gamma_5) \gamma_\alpha^\dagger \gamma_0 \psi_1 \\ &= \bar{\psi}_2 (1 - \gamma_5) \gamma_\alpha \psi_1 \\ &= \bar{\psi}_2 \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

La lagrangiana di interazione $\mathcal{L}_{W,\ell}(x)$ genera gli accoppiamenti trilineari schematizzati dal diagramma



$$(3.19)$$

3.2 Il bosone intermedio W

Per determinare completamente l'ampiezza $\mathcal{M}_{\text{deb}}$ occorre conoscere la forma analitica del propagatore $G_{(W)}^{\alpha\beta}$ del bosone W . A differenza del caso elettromagnetico, in cui la massa del fotone è nulla ($m_\gamma = 0$), per l'interazione debole si deve avere $m_W \neq 0$. Ciò discende dalla relazione tra raggio d'azione della forza e massa del quanto scambiato.

Se l'interazione tra particelle si realizza attraverso lo scambio di un quanto di massa m , affinché nel processo vi sia conservazione dell'energia, occorre che l'emissione del quanto da parte di una particella (con conseguente creazione di un'energia $\Delta E \sim mc^2$) ed il suo successivo riassorbimento da parte di una seconda particella avvengano in un intervallo di tempo Δt consentito dal principio di indeterminazione energia-tempo, ossia $\Delta t \sim h/mc^2$. Il quanto virtuale si propaga quindi su una distanza

$$\ell \sim c\Delta t \sim h/mc, \quad (3.20)$$

ossia il raggio d'azione dell'interazione tra le due particelle è inversamente proporzionale alla massa del quanto scambiato tra di esse.

Mentre al raggio d'azione infinito dell'interazione elettromagnetica corrisponde la massa nulla del fotone, al raggio d'azione finito dell'interazione debole corrisponde una massa non nulla per il bosone intermedio W .

Introduciamo un campo (carico) non-hermitiano $W^\alpha(x)$ di spin 1 e di massa m_W . L'equazione di campo per $W^\alpha(x)$ può essere dedotta da quella del campo elettromagnetico con la sostituzione $\square \rightarrow \square + m_W^2$, ossia

$$(\square + m_W^2) W^\alpha - \partial^\alpha (\partial_\beta W^\beta) = 0 \quad (\text{Equazione di Proca}). \quad (3.21)$$

La corrispondente densità lagrangiana è:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^{W\dagger} F^{W\alpha\beta} + \frac{1}{2} m_W^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha, \quad (3.22)$$

con

$$F_{\alpha\beta}^W \equiv \partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha. \quad (3.23)$$

Notiamo che, a causa della presenza del termine di massa $m_W^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha$, la lagrangiana (3.22) non è invariante per trasformazioni di gauge $W_\alpha(x) \rightarrow W'_\alpha(x) = W_\alpha(x) + \partial_\alpha \chi(x)$.

Prendendo la divergenza dell'eq.(3.21), si ottiene

$$m_W^2 \partial_\beta W^\beta = 0. \quad (3.24)$$

Quindi, se $m_W \neq 0$, si ha $\partial_\beta W^\beta = 0$ e l'equazione di Proca diventa

$$\boxed{(\square + m_W^2) W^\alpha(x) = 0}. \quad (3.25)$$

Queste sono quattro equazioni di Klein-Gordon disaccoppiate a cui devono soddisfare le quattro componenti del campo vettoriale W^α , con il vincolo aggiuntivo

$$\boxed{\partial_\alpha W^\alpha(x) = 0}. \quad (3.26)$$

Quindi, per particelle vettoriali massive questo vincolo riduce il numero di componenti indipendenti da quattro a tre.

► Sviluppo di Fourier per il campo $W^\alpha(x)$

Lo sviluppo di Fourier dell'operatore di campo $W^\alpha(x)$, che deve soddisfare alle (3.25) e (3.26), è dato da

$$W_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \sum_{r=1}^3 \left\{ a_{\vec{k}}^{(r)} \varepsilon_\alpha^{(r)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + b_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \varepsilon_\alpha^{(r)}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right\} \Bigg|_{\omega=\sqrt{\vec{k}^2+m_W^2}} \quad (3.27)$$

$$\equiv W_\alpha^{(+)}(x) + W_\alpha^{(-)}(x).$$

Gli operatori $a_{\vec{k}}^{(r)}$ distruggono bosoni W^+ e gli operatori $b_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ creano bosoni W^- . Gli operatori bosonici di creazione e distruzione soddisfano alle regole di commutazione

$$\left[a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}'}^{(s)\dagger} \right] = \left[b_{\vec{k}}^{(r)}, b_{\vec{k}'}^{(s)\dagger} \right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{rs}, \quad (3.28)$$

mentre tutti gli altri commutatori sono nulli.

I quadri-vettori $\varepsilon^{(r)}(\vec{k})$ (con $r = 1, 2, 3$) formano un insieme completo di vettori di polarizzazione ortonormali:

$$\varepsilon^{(r)}(\vec{k}) \cdot \varepsilon^{(s)}(\vec{k}) = -\delta_{rs}. \quad (3.29)$$

A causa del vincolo (3.26), i tre quadri-vettori $\varepsilon^{(r)}(\vec{k})$ devono essere ortogonali al quadri-impulso della particella:

$$k \cdot \varepsilon^{(r)}(\vec{k}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.30)$$

Dalle condizioni (3.29) e (3.30) segue la relazione di completezza

$$\underbrace{\sum_{r=1}^3 \varepsilon_\alpha^{(r)}(\vec{k}) \varepsilon_\beta^{(r)}(\vec{k})}_{\equiv T_{\alpha\beta}} = -g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{m_W^2}. \quad (3.31)$$

Infatti, la forma più generale per il tensore $T_{\alpha\beta}$ è data da

$$T_{\alpha\beta} = A g_{\alpha\beta} + B k_\alpha k_\beta, \quad (3.32)$$

dove A e B sono due scalari che possono dipendere da $k^2 = m_W^2$. Dalla condizione (3.30) discende che

$$0 = k^\alpha T_{\alpha\beta} = A k_\beta + B m_W^2 k_\beta \quad \implies \quad B = -\frac{A}{m_W^2}. \quad (3.33)$$

Dalla (3.29) segue che

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{(s)\alpha}(\vec{k}) T_{\alpha\beta} &= \sum_{r=1}^3 \varepsilon^{(s)\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_\alpha^{(r)}(\vec{k}) \varepsilon_\beta^{(r)}(\vec{k}) = -\varepsilon_\beta^{(s)}(\vec{k}) \\ \varepsilon^{(s)\alpha}(\vec{k}) (A g_{\alpha\beta} + B k_\alpha k_\beta) &= A \varepsilon_\beta^{(s)}(\vec{k}) \end{aligned} \right\} \implies A = -1. \quad (3.34)$$

Quindi, si ottiene la relazione di completezza (3.31).

► Propagatore del bosone W

Il propagatore $G_{(W)}^{\alpha\beta}(x, x')$ del bosone W è dato da

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(W)}(x, x') &= \langle 0 | T \left[W_\alpha(x) W_\beta^\dagger(x') \right] | 0 \rangle \\ &= \vartheta(x_0 - x'_0) \langle 0 | W_\alpha^{(+)}(x) W_\beta^{\dagger(-)}(x') | 0 \rangle + \vartheta(x'_0 - x_0) \langle 0 | W_\beta^{\dagger(+)}(x') W_\alpha^{(-)}(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Utilizzando la (3.27), le regole di commutazione (3.28) e la proprietà (3.31), si ottiene

$$\begin{aligned} \langle 0 | W_\alpha^{(+)}(x) W_\beta^{\dagger(-)}(x') | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, r} \sum_{\vec{k}', s} \frac{1}{\sqrt{2\omega} \sqrt{2\omega'}} \varepsilon_\alpha^{(r)}(\vec{k}) \varepsilon_\beta^{(s)}(\vec{k}') e^{-i(k \cdot x - k' \cdot x')} \underbrace{\langle 0 | a_{\vec{k}}^{(r)} a_{\vec{k}'}^{(s)\dagger} | 0 \rangle}_{\delta_{rs} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega} \left(\sum_r \varepsilon_\alpha^{(r)}(\vec{k}) \varepsilon_\beta^{(r)}(\vec{k}) \right) e^{-ik \cdot (x - x')} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega} \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{m_W^2} \right) e^{-ik \cdot (x - x')}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Analogamente, si ha

$$\langle 0 | W_\beta^{\dagger(+)}(x') W_\alpha^{(-)}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega} \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{m_W^2} \right) e^{ik \cdot (x - x')}. \quad (3.37)$$

Quindi, passando ad una normalizzazione su tutto lo spazio, si ottiene

$$\begin{aligned} G_{(W)}^{\alpha\beta}(x, x') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2} \right) \left\{ e^{-ik \cdot (x - x')} \vartheta(x_0 - x'_0) \right. \\ &\quad \left. + e^{-ik \cdot (x' - x)} \vartheta(x'_0 - x_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Utilizzando la prescrizione di Feynmann per il calcolo dell'integrale su k^0 nel piano complesso, il propagatore $G_{(W)}^{\alpha\beta}(x, x')$ del bosone W può essere scritto nella forma covariante

$$\boxed{G_{(W)}^{\alpha\beta}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{i \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2} \right)}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x - x')}}. \quad (3.39)$$

Il propagatore $G_{(W)}^{\alpha\beta}(k)$ nello spazio degli impulsi è quindi dato da

$$\boxed{G_{(W)}^{\alpha\beta}(k) = i \frac{-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2}}. \quad (3.40)$$

3.3 Lagrangiana di Fermi

Nei processi di bassa energia ($|q^2|/m_W^2 \ll 1$, q^α è il quadri-momento trasferito) possiamo sostituire al propagatore $G_{(W)}^{\alpha\beta}(q)$ del bosone intermedio W il suo limite

$$\lim_{|q^2|/m_W^2 \rightarrow 0} G_{(W)}^{\alpha\beta}(q) = \frac{i g^{\alpha\beta}}{m_W^2}. \quad (3.41)$$

Per l'ampiezza debole (3.7) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{deb}} &= i \frac{f_W^2}{m_W^2} \langle \mu^- | j_\alpha^{W\dagger}(0) | \nu_\mu \rangle \langle \nu_e | j^{W\alpha}(0) | e^- \rangle \\ &= i \frac{f_W^2}{m_W^2} [\bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_{\nu_\mu}] [\bar{u}_{\nu_e} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) u_e]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Questa ampiezza può anche essere ottenuta (all'ordine più basso dello sviluppo perturbativo) dalla lagrangiana efficace, detta *lagrangiana di Fermi*,

$$\boxed{\mathcal{L}_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_\mu}] [\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \psi_e]}, \quad (3.43)$$

dove G_F è la *costante di Fermi*, legata alla costante di accoppiamento debole f_W e alla massa del bosone intermedio W dalla relazione

$$\boxed{\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{f_W^2}{m_W^2}}. \quad (3.44)$$

Infatti, utilizzando la (3.43), per l'ampiezza del processo $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$, al prim'ordine in G_F , si ottiene (P è l'operatore quadri-impulso)

$$\begin{aligned} \langle \mu^-, \nu_e | \int d^4x \mathcal{H}_F(x) | \nu_\mu, e^- \rangle &= - \langle \mu^-, \nu_e | \int d^4x \mathcal{L}_F(x) | \nu_\mu, e^- \rangle \\ &= - \langle \mu^-, \nu_e | \int d^4x e^{iP \cdot x} \mathcal{L}_F(0) e^{-iP \cdot x} | \nu_\mu, e^- \rangle \\ &= - \int d^4x e^{i(p_\mu + p_{\nu_e} - p_{\nu_\mu} - p_e) \cdot x} \langle \mu^-, \nu_e | \mathcal{L}_F(0) | \nu_\mu, e^- \rangle \\ &= - (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu + p_{\nu_e} - p_{\nu_\mu} - p_e) \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_{\nu_\mu}] [\bar{u}_{\nu_e} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) u_e]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

La relazione (3.44) è schematizzata dai diagrammi in Fig.3.1.

La lagrangiana di Fermi (3.43) può essere generalizzata nella forma

$$\boxed{\mathcal{L}_F(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\alpha^W(x) j^{W\alpha\dagger}(x)}, \quad (3.46)$$

in modo da includere la descrizione di tutti i processi deboli leptonici. La quadri-corrente $j_\alpha^W(x)$ è quella definita in eq.(3.16).

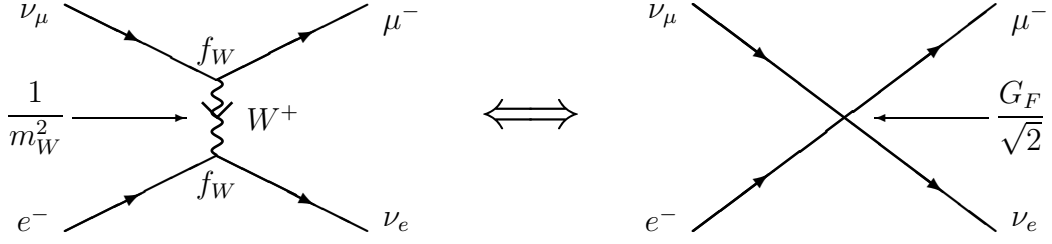


Figura 3.1: Illustrazione diagrammatica della relazione (3.44).

Come esempio dell'applicazione della lagrangiana di Fermi (3.46), consideriamo il decadimento del μ^- ,

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e, \quad (3.47)$$

per il quale si ottiene l'ampiezza

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\mu &= \langle \nu_\mu, e^-, \bar{\nu}_e | \mathcal{L}_F(0) | \mu^- \rangle \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle \nu_\mu, e^-, \bar{\nu}_e | \left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}(0) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_\mu(0) \right] \left[\bar{\psi}_e(0) \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}(0) \right] | \mu^- \rangle \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_\mu \right] \left[\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) v_{\nu_e} \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Da questa ampiezza è possibile calcolare la larghezza di decadimento $\Gamma_\mu \equiv 1/\tau_\mu$ mediante la formula²

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \frac{1}{2m_\mu} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_{\nu_e}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_{\nu_\mu}}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu - p_e - p_{\nu_e} - p_{\nu_\mu}) \\ &\quad \times \frac{1}{2E_e} \frac{1}{2E_{\nu_e}} \frac{1}{2E_{\nu_\mu}} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_\mu|^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Il risultato è

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3}. \quad (3.50)$$

Dal valore sperimentale della vita media del muone,

$$(\tau_\mu)_{\text{exp}} = 2.197 \times 10^{-6} \text{ s}, \quad (3.51)$$

si ricava

$$\boxed{G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \simeq \frac{10^{-5}}{m_p^2}}, \quad (3.52)$$

dove $m_p \simeq 938 \text{ MeV}$ è la massa del protone.

► Stima di m_W

Se supponiamo che le costanti di accoppiamento f_W ed e dell'interazione debole e di quella elettromagnetica siano dello stesso ordine di grandezza,

$$f_W \sim e, \quad (3.53)$$

²In questa formula gli spinori sono normalizzati in modo che $\overline{u^{(r)}} u^{(s)} = 2m\delta_{rs}$, da cui segue $\Lambda_+(\vec{p}) = \not{p} + m$ (per i dettagli del calcolo vedi, per esempio, Halzen & Martin, pag.261).

allora dalla (3.44) si ha

$$m_W \sim \frac{e}{(G_F/\sqrt{2})^{1/2}} = \left(\frac{4\pi\alpha}{G_F/\sqrt{2}} \right)^{1/2}. \quad (3.54)$$

Quindi, utilizzando il valore sperimentale (3.52), si ottiene

$$m_W \sim 100 \text{ GeV}. \quad (3.55)$$

Dalla (3.20) si ricava, per il raggio d'azione dell'interazione elettrodebole,

$$\ell \sim 10^{-16} \text{ cm}. \quad (3.56)$$

Il valore sperimentale di m_W è $m_W = 80 \text{ GeV}$ e quindi l'ipotesi formulata nella (3.53) è corretta. Ne segue che l'interazione che si esercita a bassa energia ($|q^2| \ll m_W^2$), per esempio, tra ν_μ ed e^- nel processo $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$, risulta debole non a causa dell'esiguità della costante di accoppiamento f_W (che è dell'ordine di grandezza della carica elettrica e), ma perchè il quanto scambiato tra i due leptoni ha massa elevata ($\sim 100 \text{ GeV}$) rispetto a $|q^2|$.

3.4 Correnti deboli (cariche) adroniche

Si chiamano *processi deboli semi-leptonici* quei processi che coinvolgono sia leptoni che adroni negli stati iniziali e/o finali. I processi semi-leptonici di bassa energia possono essere descritti in modo fenomenologico mediante una lagrangiana efficace di Fermi, se si include nella corrente debole carica anche una componente di corrente debole adronica J_α^W :

$$j_\alpha^W \rightarrow j_\alpha^W + J_\alpha^W. \quad (3.57)$$

Per tenere conto dei processi semi-leptonici che conservano la stranezza, come ad esempio il decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (3.58)$$

e di quelli con cambio di stranezza, come ad esempio il decadimento

$$\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (3.59)$$

occorre che la corrente debole adronica J_α^W sia costituita da due parti, $J_\alpha^{\Delta S=0}$ che conserva la stranezza, e $J_\alpha^{\Delta S=1}$ che cambia la stranezza di una unità. I coefficienti della combinazione lineare delle due correnti vengono usualmente parametrizzati mediante un angolo ϑ_C (*angolo di Cabibbo*):

$$J_\alpha^W = \cos \vartheta_C J_\alpha^{\Delta S=0} + \sin \vartheta_C J_\alpha^{\Delta S=1}. \quad (3.60)$$

Per esempio, la corrente debole adronica che interviene nel decadimento del neutrone può essere scritta nel modo seguente:

$$J_\alpha^{\Delta S=0}(n \rightarrow p) = \bar{\psi}_p \gamma_\alpha (g_V + g_A \gamma_5) \psi_n. \quad (3.61)$$

Dai risultati sperimentali si ottiene

$$\cos \vartheta_C = 0.97, \quad g_V = 1, \quad g_A = 1.25. \quad (3.62)$$

Notiamo che

- il valore $g_V = 1$ illustra il carattere di universalità dell'accoppiamento del W con i leptoni e con gli adroni (universalità $\mu\text{-}\beta$);
- $g_A \neq 1$ rappresenta un effetto dovuto all'interazione forte.

Partendo dall'analogia tra i doppietti di leptoni ed i doppietti di quarks

$$\begin{array}{ccc} (\nu_e, e^-) & (\nu_\mu, \mu^-) & (\nu_\tau, \tau^-) \\ (u, d) & (c, s) & (t, b) \end{array} \quad (3.63)$$

la corrente debole adronica può essere scritta direttamente in termini di quarks, con una struttura simile a quella leptonica (3.16). Tenendo conto della proprietà (3.60), si ha (ci limiteremo nel seguito a considerare esplicitamente 2 sole *famiglie* o *generazioni*)

$$\begin{aligned} J_\alpha^W &= \cos \vartheta_C \bar{\psi}_u \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_d + \sin \vartheta_C \bar{\psi}_u \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_s + \dots \\ &= \bar{\psi}_u \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) [\cos \vartheta_C \psi_d + \sin \vartheta_C \psi_s] + \dots \end{aligned} \quad (3.64)$$

Quindi lo stato di quark da associare ad u in un doppietto è $d' = \cos \vartheta_C d + \sin \vartheta_C s$, anzichè semplicemente d . Associando a c lo stato ortogonale a d' si ha, in luogo della struttura (3.63),

$$\begin{array}{cc} (\nu_e, e^-) & (\nu_\mu, \mu^-) \\ (u, d') & (c, s') \end{array} \quad (3.65)$$

dove

$$\psi_{d'} = \cos \vartheta_C \psi_d + \sin \vartheta_C \psi_s, \quad (3.66a)$$

$$\psi_{s'} = -\sin \vartheta_C \psi_d + \cos \vartheta_C \psi_s. \quad (3.66b)$$

Per la corrente debole adronica si ha

$$\begin{aligned} J_\alpha^W &= \bar{\psi}_u \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{d'} + \bar{\psi}_c \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{s'} \\ &= \cos \vartheta_C [\bar{\psi}_u \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_d + \bar{\psi}_c \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_s] \\ &\quad + \sin \vartheta_C [\bar{\psi}_u \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_s - \bar{\psi}_c \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_d]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

In termini di quarks, il decadimento beta del neutrone è rappresentato dal diagramma

$$\left. \begin{array}{c} u \\ d \\ d \end{array} \right\} n \quad \left. \begin{array}{c} u \\ d \\ u \end{array} \right\} p \quad (3.68)$$

$f_W \cos \vartheta_C$

e quello del barione Λ^0 è rappresentato dal diagramma

$$\Lambda^0 \left\{ \begin{array}{l} u \\ d \\ s \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \\ d \\ u \end{array} \right\} p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.69)$$

$f_W \sin \vartheta_C$

La densità lagrangiana di interazione che descrive i processi deboli con correnti cariche tramite l'accoppiamento delle correnti con il campo del bosone intermedio W è

$$\boxed{\mathcal{L}_W(x) = f_W [j_\alpha^W(x) + J_\alpha^W(x)] W^\alpha(x) + \text{h.c.}}, \quad (3.70)$$

dove $j_\alpha^W(x)$ è la corrente debole leptonica (3.16) e $J_\alpha^W(x)$ è la corrente debole adronica (3.67).

Capitolo 4

Processi deboli con correnti neutre

Tutti i processi deboli esaminati precedentemente sono descritti dalla densità lagrangiana (3.70) di accoppiamento della corrente debole $[j_\alpha^W(x) + J_\alpha^W(x)]$ con il campo vettoriale carico W^α .

Altri processi deboli sono invece dovuti all'accoppiamento di una corrente debole *neutra* $[j_\alpha^Z(x) + J_\alpha^Z(x)]$ con un campo vettoriale neutro Z^α , con densità lagrangiana di interazione

$$\mathcal{L}_Z(x) = f_Z [j_\alpha^Z(x) + J_\alpha^Z(x)] Z^\alpha(x). \quad (4.1)$$

Indichiamo con $j_\alpha^Z(x)$ la corrente debole neutra leptonica e con $J_\alpha^Z(x)$ quella adronica. Questa densità lagrangiana determina quindi vertici di interazione del tipo

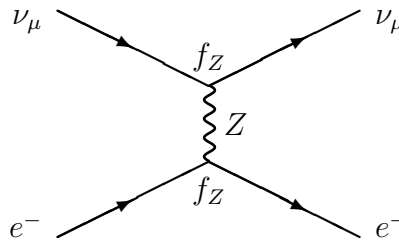


$$(4.2)$$

Le proprietà del campo $Z^\alpha(x)$ sono analoghe a quelle del campo $W^\alpha(x)$, salvo il fatto che $Z^\alpha(x)$, essendo neutro, è un campo hermitiano. Il suo propagatore nello spazio degli impulsi è

$$G_{(Z)}^{\alpha\beta}(k) = i \frac{-g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{m_Z^2}}{k^2 - m_Z^2}. \quad (4.3)$$

Le ampiezze dei processi deboli che avvengono tramite scambio del bosone Z si calcolano utilizzando regole di Feynman analoghe a quelle viste precedentemente. Un esempio è dato dal processo



$$(4.4)$$

4.1 Limite di bassa energia

Anche nel caso di processi deboli con scambio del bosone Z è utile considerare il limite di bassa energia, che trova la sua applicazione quando $|q^2|/m_Z^2 \ll 1$ (q^μ è il quadri-momento trasferito). Procedendo come per i processi con scambio di $W^\pm$, si perviene ad una densità lagrangiana efficace (alla Fermi)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F^0(x) &= \frac{f_Z^2}{m_Z^2} [j_\alpha^Z(x) + J_\alpha^Z(x)] [j^{Z\alpha}(x) + J^{Z\alpha}(x)] \\ &\equiv 2\rho \frac{G_F}{\sqrt{2}} [j_\alpha^Z(x) + J_\alpha^Z(x)] [j^{Z\alpha}(x) + J^{Z\alpha}(x)] .\end{aligned}\quad (4.5)$$

Abbiamo scritto la costante efficace di accoppiamento f_Z^2/m_Z^2 in termini di quella di Fermi, $f_Z^2/m_Z^2 \equiv 2\rho G_F/\sqrt{2}$, avendo cioè definito un parametro ρ tale che

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{f_Z^2/m_Z^2}{f_W^2/m_W^2} . \quad (4.6)$$

4.2 Struttura delle correnti deboli neutre

In base alle proprietà generali dei covarianti bilineari, le correnti $j_\alpha^Z(x)$ e $J_\alpha^Z(x)$ possono essere scritte come combinazioni lineari di correnti vettoriali e di correnti assiali: $\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi$, $\bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_5\psi$.

Cominciamo ad analizzare la corrente debole neutra leptonica $j_\alpha^Z(x)$. Questa corrente prenderà un contributo da ciascun doppietto leptonico della Tabella 1.1, ossia

$$j_\alpha^Z(x) = \sum_\ell [j_\alpha^{Z,\nu_\ell}(x) + j_\alpha^{Z,\ell}(x)] . \quad (4.7)$$

In base alle proprietà dei covarianti bilineari possiamo scrivere

$$\begin{aligned}j_\alpha^{Z,\nu_\ell} &= g_V^{\nu_\ell} \bar{\psi}_{\nu_\ell} \gamma_\alpha \psi_{\nu_\ell} + g_A^{\nu_\ell} \bar{\psi}_{\nu_\ell} \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_{\nu_\ell} \\ &= g_L^{\nu_\ell} \bar{\psi}_{\nu_\ell} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_\ell} + g_R^{\nu_\ell} \bar{\psi}_{\nu_\ell} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\ell} ,\end{aligned}\quad (4.8)$$

con

$$g_V^{\nu_\ell} = g_L^{\nu_\ell} + g_R^{\nu_\ell} , \quad g_A^{\nu_\ell} = g_L^{\nu_\ell} - g_R^{\nu_\ell} . \quad (4.9)$$

Nella seconda riga della (4.8) la corrente j_α^{Z,ν_ℓ} è stata espressa come una combinazione lineare di *correnti chirali*.

Analogamente, per le correnti deboli neutre dei leptoni carichi scriviamo

$$\begin{aligned}j_\alpha^{Z,\ell} &= g_V^\ell \bar{\psi}_\ell \gamma_\alpha \psi_\ell + g_A^\ell \bar{\psi}_\ell \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\ell \\ &= g_L^\ell \bar{\psi}_\ell \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_\ell + g_R^\ell \bar{\psi}_\ell \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_\ell .\end{aligned}\quad (4.10)$$

Estendiamo questo formalismo alle correnti deboli neutre adroniche, utilizzando i campi dei quarks u_i ($u_i = u, c, t$, per $i = 1, 2, 3$) e d_i ($d_i = d, s, b$, per $i = 1, 2, 3$). Abbiamo

$$J_\alpha^Z(x) = \sum_{i=1,2,3} J_\alpha^{Z,i}(x) , \quad (4.11)$$

con

$$\begin{aligned}
J_{\alpha}^{Z,i}(x) &= U_V \bar{\psi}_{u_i} \gamma_{\alpha} \psi_{u_i} + U_A \bar{\psi}_{u_i} \gamma_{\alpha} \gamma_5 \psi_{u_i} \\
&\quad + D_V \bar{\psi}_{d_i} \gamma_{\alpha} \psi_{d_i} + D_A \bar{\psi}_{d_i} \gamma_{\alpha} \gamma_5 \psi_{d_i} \\
&= U_L \bar{\psi}_{u_i} \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) \psi_{u_i} + U_R \bar{\psi}_{u_i} \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) \psi_{u_i} \\
&\quad + D_L \bar{\psi}_{d_i} \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) \psi_{d_i} + D_R \bar{\psi}_{d_i} \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) \psi_{d_i} .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Si noti che, anche definendo le correnti neutre nella base ruotata alla Cabibbo d'_i ($d'_i = d', s', b'$, per $i = 1, 2, 3$), non vi sono comunque termini di corrente neutra che inducano transizioni da una famiglia all'altra (ossia cambiamenti di sapore). Dimostriamo questa proprietà in un formalismo semplificato con due sole famiglie:

$$\begin{aligned}
\psi_{d'} &= \cos \vartheta_C \psi_d + \sin \vartheta_C \psi_s , \\
\psi_{s'} &= -\sin \vartheta_C \psi_d + \cos \vartheta_C \psi_s .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Per esempio, per la corrente vettoriale si ha

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_{d'} \gamma_{\alpha} \psi_{d'} + \bar{\psi}_{s'} \gamma_{\alpha} \psi_{s'} &= (\cos \vartheta_C \bar{\psi}_d + \sin \vartheta_C \bar{\psi}_s) \gamma_{\alpha} (\cos \vartheta_C \psi_d + \sin \vartheta_C \psi_s) \\
&\quad + (-\sin \vartheta_C \bar{\psi}_d + \cos \vartheta_C \bar{\psi}_s) \gamma_{\alpha} (-\sin \vartheta_C \psi_d + \cos \vartheta_C \psi_s) \\
&= \bar{\psi}_d \gamma_{\alpha} \psi_d + \bar{\psi}_s \gamma_{\alpha} \psi_s .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Questa proprietà è detta *meccanismo GIM* (da Glashow, Iliopoulos e Maiani).

► Modello di unificazione elettrodebole

Nel *Modello Standard* di Glashow, Salam e Weinberg si ha una trattazione unificata delle interazioni elettromagnetica e debole, basata sulla proprietà di invarianza di gauge.

Il Modello Standard costituisce un modello minimale di unificazione che, tenendo conto delle proprietà fenomenologiche dei processi elettromagnetici e dei processi deboli con sole correnti cariche, implica:

- 1) l'esistenza di processi deboli con scambio di Z ,
- 2) la determinazione delle costanti di accoppiamento e dei coefficienti di struttura delle correnti deboli neutre a partire da un unico parametro libero della teoria.

Scegliendo come parametro libero il cosiddetto *angolo di Weinberg* ϑ_W , si ha¹

$$g_L^{\nu\ell} = \frac{1}{2}, \quad g_R^{\nu\ell} = 0, \tag{4.15a}$$

$$g_L^{\ell} = -\frac{1}{2} + \sin^2 \vartheta_W, \quad g_R^{\ell} = \sin^2 \vartheta_W, \tag{4.15b}$$

$$U_L = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta_W, \quad U_R = -\frac{2}{3} \sin^2 \vartheta_W, \tag{4.15c}$$

$$D_L = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \vartheta_W, \quad D_R = \frac{1}{3} \sin^2 \vartheta_W, \tag{4.15d}$$

$$\rho = 1. \tag{4.15e}$$

¹Si veda, per esempio, Halzen & Martin, cap.13.

Il successo del Modello Standard è dovuto non solo alla verifica sperimentale dell'esistenza di processi deboli con correnti neutre, predetta dal modello, ma anche al fatto che tutte le grandezze fisiche misurate sono in perfetto accordo con le previsioni quantitative del modello. Il valore di best fit per il parametro libero $\sin^2 \vartheta_W$ è

$$\sin^2 \vartheta_W = 0.23. \quad (4.16)$$

Appendice A

Classificazione delle particelle

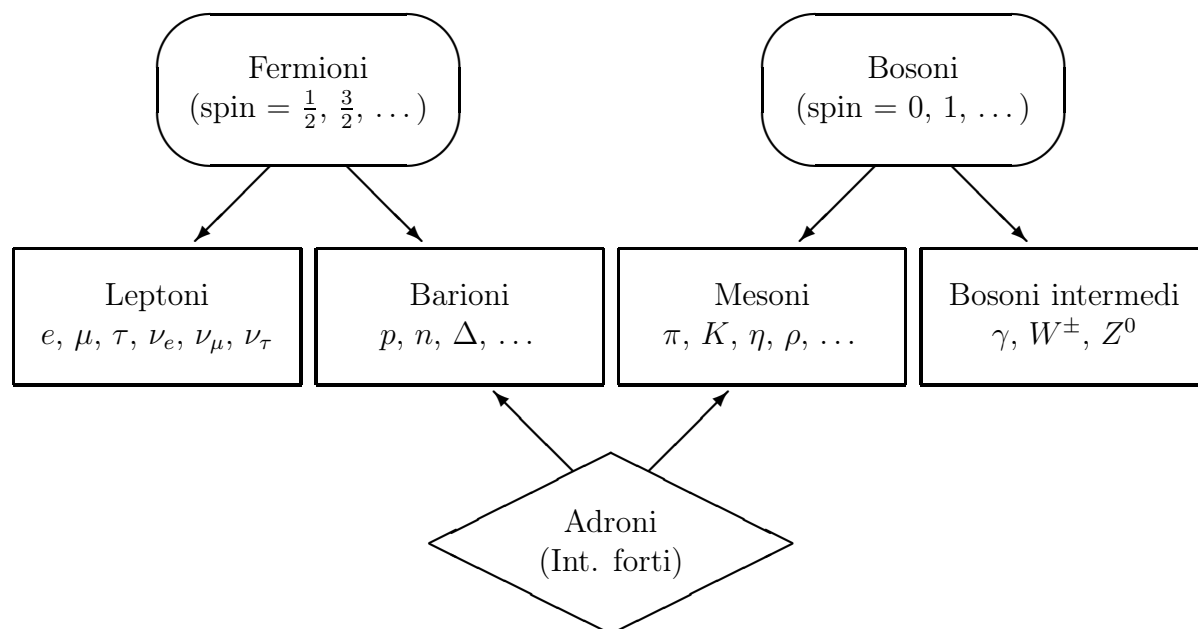


Figura A.1: Schema dei tipi di particelle.

	Massa (MeV)	Tipo	J^P	I	S	τ (sec)
γ	0	BI	1^-	0	0	∞
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	L	$1/2$	0	0	∞
e	0.511	L	$1/2$	0	0	∞
μ	105.66	L	$1/2$	0	0	2.2×10^{-6}
π^0 $\pi^\pm$	134.98 139.57	M	0^-	1	0	8×10^{-17} 2.6×10^{-8}
K^0, K^+ $K^-, \bar{K}^0$	493.7 ($K^\pm$) 497.7 (K^0)	M	0^-	$1/2$ $1/2$	$+1$ -1	1.2×10^{-8} ($K^\pm$) 8.9×10^{-11} (K_S^0) 5.2×10^{-8} (K_L^0)
η	547	M	0^-	0	0	6×10^{-19}
ρ^-, ρ^0, ρ^+	768	M	1^-	1	0	4×10^{-24}
ω	782	M	1^-	0	0	8×10^{-23}
p n	938.27 939.56	B	$1/2^+$	$1/2$	0	∞ 887
ϕ	1020	M	1^-	0	0	1.5×10^{-22}
Λ^0	1116	B	$1/2^+$	0	-1	2.6×10^{-10}
Σ^+ Σ^0 Σ^-	1189 1192 1197	B	$1/2^+$	1	-1	8.0×10^{-11} 7×10^{-20} 1.5×10^{-10}
$\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++}$	1232	B	$3/2^+$	$3/2$	0	5×10^{-24}
Ξ^0 Ξ^-	1315 1321	B	$1/2^+$	$1/2$	-2	2.9×10^{-10} 1.6×10^{-10}
Ω^-	1672	B	$3/2^+$	0	-3	8.2×10^{-11}
τ	1777	L	$1/2$	0	0	3×10^{-13}
$W^\pm$ Z^0	80.3×10^3 91.19×10^3	BI	1	0	0	3.2×10^{-25} 2.6×10^{-25}

Tabella A.1: Lista delle particelle più leggere in ordine di massa crescente (seconda colonna). Il tipo della particella è indicato nella terza colonna con BI per i bosoni intermedi, L per i leptoni, M per i mesoni e B per i barioni. Nella quarta colonna sono dati lo spin J e la parità P , che non è definita per i leptoni, nella notazione condensata J^P . Nella quinta e sesta colonna sono dati l'isospin I e la stranezza S . Nella settima colonna è dato il tempo di vita medio τ .