

APPUNTI DI OTTICA GEOMETRICA

1) Introduzione

L'ottica geometrica puo' essere considerata un metodo per la costruzione di immagini date da sistemi ottici quali lenti e specchi. Essa costituisce una teoria approssimata, quindi con definiti limiti di validita', per la trattazione dei fenomeni luminosi. Le assunzioni che stanno alla base dell'ottica geometrica sono le seguenti:

1. In un mezzo omogeneo la luce si propaga lungo **linee rette** (*raggi luminosi*). Si suppone quindi che la presenza di fenomeni diffrattivi sia trascurabile
2. I raggi luminosi sono tra loro **indipendenti**. Si suppone quindi che i fenomeni di interferenza siano trascurabili.
3. Al passaggio tra due mezzi trasparenti diversi, i raggi luminosi che vengono trasmessi dal primo al secondo mezzo subiscono un fenomeno di **rifrazione** secondo la legge di Snell (Fig. 2):

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad (1)$$

dove i e r sono gli angoli che il raggio incidente e quello rifratto formano con la normale alla superficie di interfaccia tra i due mezzi. Inoltre, il raggio incidente, quello rifratto e la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi stanno sullo stesso piano. Sia i che r sono compresi tra 0 e $\pi/2$. n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione assoluti dei due mezzi. L'indice di rifrazione e' il rapporto c/v fra la velocita' della luce nel vuoto c e la velocita' della luce nel mezzo v , ed e' sempre quindi maggiore o uguale a 1; e' una caratteristica del mezzo ma dipende anche dalla lunghezza d'onda della luce. L'indice di rifrazione del vuoto e' ovviamente $n_0 = 1$. Si definisce indice di rifrazione relativo il rapporto fra gli indici di rifrazione assoluti: $n_{21} = n_2/n_1$ per cui la legge di Snell puo' anche essere scritta come:

$$\sin i = n_{21} \sin r \quad (2)$$

4. I raggi luminosi che vengono riflessi dalla superficie di separazione tra due mezzi diversi (Fig. 1) hanno una direzione di propagazione data dalla legge

$$i = -r \quad (3)$$

In altri termini, l'angolo di **riflessione** e' uguale in modulo all'angolo di incidenza. Inoltre, raggio incidente, raggio riflesso e normale alla superficie di separazione tra i due mezzi stanno sullo stesso piano.

5. Nella trattazione dei sistemi ottici si assumera' generalmente che gli angoli di incidenza e di rifrazione siano piccoli, in modo da soddisfare l'approssimazione $\tan \alpha \sim \sin \alpha \sim \alpha$. Questa approssimazione va sotto il nome di **approssimazione di Gauss**.

6. **L'indice di rifrazione verra' d'ora in poi trattato come un parametro costante caratteristico del mezzo. Questa assunzione e' corretta qualora si consideri radiazione monocromatica (come si fara' nel seguito), ma si ricordi che l'indice di rifrazione e' anche, come si e' detto, funzione della lunghezza d'onda della luce**

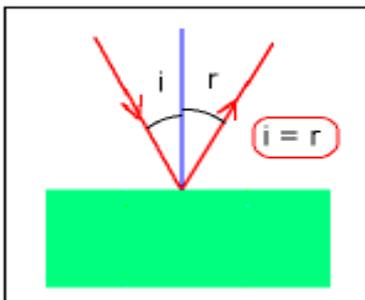


Fig. 1: riflessione

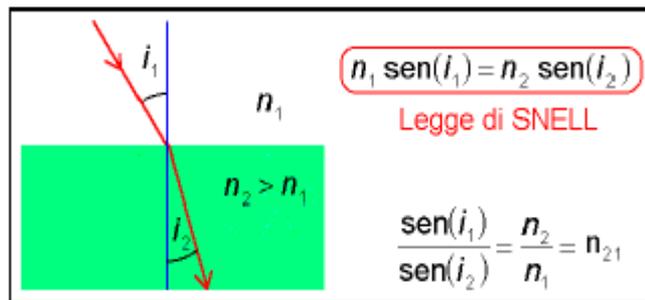


Fig.2: rifrazione

2) Definizioni

I raggi luminosi emessi da una sorgente puntiforme costituiscono un fascio *omocentrico* in quanto passano tutti per il medesimo punto. Se il mezzo in cui la sorgente si trova è omogeneo e isotropo, il fronte luminoso è una superficie sferica che si espande con la velocità di propagazione della luce in quel mezzo: si parla in questo caso di superficie d'onda sferica.

A seguito di rifrazione o di riflessione su di una superficie, un'onda sferica si trasforma in un fronte d'onda che, in generale, non è più sferico. I raggi associati a questo fronte d'onda costituiscono un fascio che prende il nome di fascio *astigmatico* in quanto i raggi non hanno un punto in comune. Nel caso in cui, invece, l'onda rifratta (o riflessa) sia ancora sferica, esiste un punto per il quale passano tutti i raggi rifratti (o riflessi). Tale punto è detto *immagine* della sorgente puntiforme. L'immagine può essere *reale* se per essa passano effettivamente i raggi rifratti (o riflessi), *virtuale* se per essa passano i prolungamenti dei raggi rifratti (o riflessi).

3) Riflessione totale

Esaminando l'equazione (2) è evidente che r cresce al crescere di i . Quando $n_1 > n_2$, per esempio da acqua ($n_1 = 1,33$) ad aria ($n_2 \sim 1$), si ha che $r > i$. r non può superare $\pi/2$ e quindi esiste un limite per i :

$$i_{lim} = \lim_{(r \rightarrow \pi/2)} i = \arcsen(n_{21})$$

Questo significa che se $i > i_{lim}$ non esiste alcun valore di r in grado di soddisfare la (2); in altre parole esiste un angolo limite di incidenza al di là del quale non si ha raggio rifratto.

In generale, al passaggio tra due mezzi trasparenti, la luce viene in parte trasmessa e in parte riflessa. Se l'indice di rifrazione assoluto del secondo mezzo è maggiore di quello del primo, la luce viene interamente riflessa per angoli di incidenza superiori a i_{lim} .

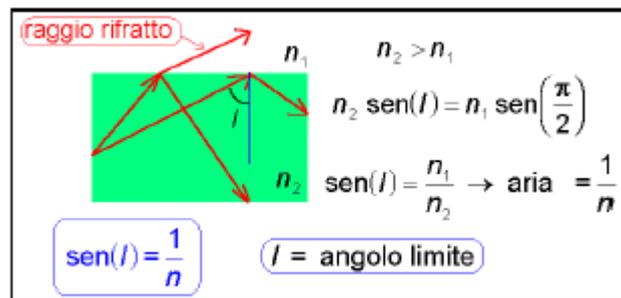


Fig. 3: Riflessione totale

4) Specchio piano:

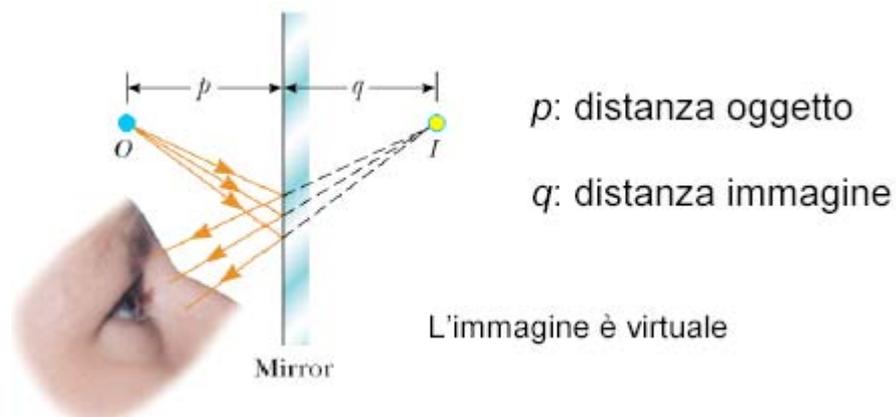


Fig. 4: Specchio piano

In Fig. 4 e' rappresentato uno specchio piano. I raggi che escono da una sorgente puntiforme O vengono riflessi dallo specchio e divergono. I loro prolungamenti convergono nel punto I che e' l'*immagine virtuale* di O. Si puo' dimostrare facilmente che le distanze di oggetto e immagine dallo specchio sono uguali in modulo. Infatti, con riferimento alla Fig. 5, $h = p \tan \theta = h' = q \tan \theta$ da cui: $p = q$

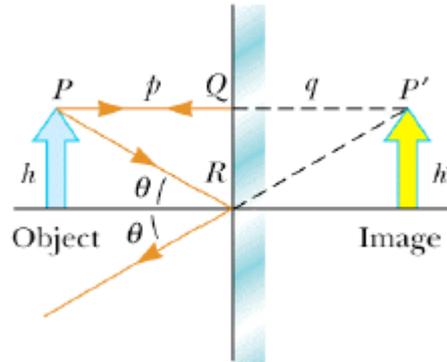


Fig. 5: costruzione dell'immagine in uno specchio piano

5) **Sorgente puntiforme in un mezzo rifrangente**

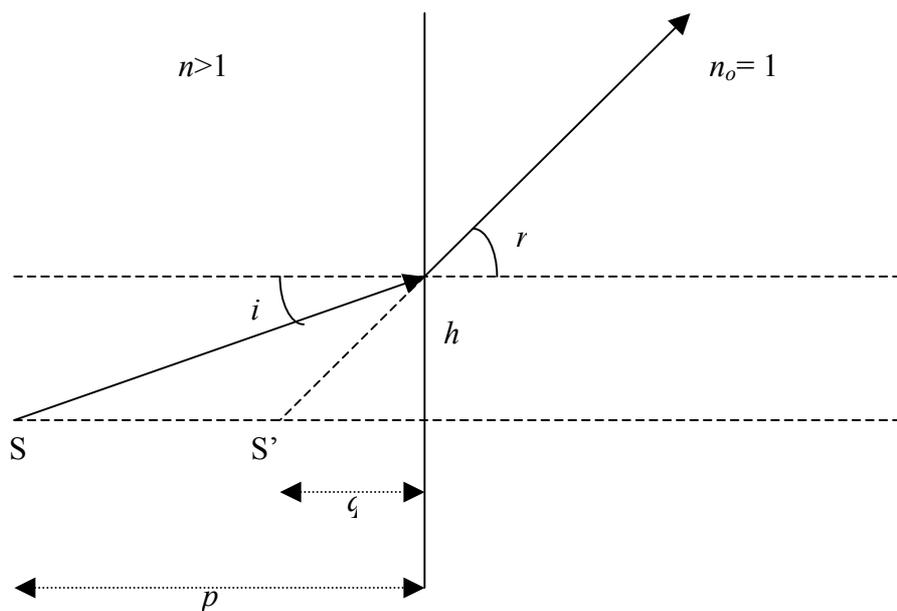


Fig.6: Sorgente puntiforme in un mezzo rifrangente

In Fig. 6 e' schematizzata una sorgente puntiforme S posta in un mezzo rifrangente ($n > 1$) omogeneo e isotropo, limitato da una superficie piana indefinita. Supponiamo che il mezzo posto al di la' della superficie di interfaccia sia aria, ovvero abbia indice di rifrazione $n_o \sim 1$. Anche in questo caso ci proponiamo di trovare a quale distanza q si trovi l'intersezione S' del prolungamento di un raggio rifratto generico con la normale al piano di interfaccia condotta per il punto S. Dalla figura si vede che, per un generico angolo di incidenza i valgono le seguenti relazioni:

$$h/q = \tan r \qquad h/p = \tan i$$

Dividendo la seconda per la prima si ottiene:

$$p/q = \tan i / \tan r = \sin i / \sin r \cdot \cos r / \cos i$$

Facendo uso del fatto che $n \cdot \sin i = n_o \sin r = \sin r$ si ha infine:

$$q = p / n \cdot \cos r / \cos i$$

La quantità a secondo membro dipende dall'angolo di incidenza, quindi la posizione del punto S' varia al variare dell'angolo i . Il fascio che emerge dal mezzo rifrangente non è pertanto omocentrico ed alla sorgente puntiforme S (oggetto) non corrisponde un'immagine puntiforme.

Se ci limitiamo invece a considerare raggi parassiali, tali da soddisfare l'approssimazione di Gauss $\tan i \sim \sin i \sim i$, allora abbiamo per q :

$$q = p \cdot \tan i / \tan r \approx p \cdot \sin i / \sin r = p / n$$

In approssimazione di Gauss la posizione di S' è univocamente definita: S' è allora l'immagine virtuale della sorgente S .

Si noti che $q < p$: la sorgente S appare ad un osservatore posto al di fuori del mezzo rifrangente più prossima alla superficie di interfaccia di quanto non sia in realtà.

6) Il prisma

In Fig. 7 è rappresentata la sezione retta di un prisma costituito di materiale trasparente (per esempio vetro o plexiglass), di indice di rifrazione $n > 1$, posto in aria. Supponiamo che la sezione del prisma sia un triangolo isoscele con angolo al vertice α noto. Facendo esplicito riferimento ai simboli adottati in Fig. 8, consideriamo un raggio luminoso, appartenente al piano della figura, che incide la superficie del prisma nel punto B con angolo di incidenza i . Esso subisce una prima rifrazione in B passando dall'aria al vetro ed una seconda rifrazione in C passando dal vetro all'aria.

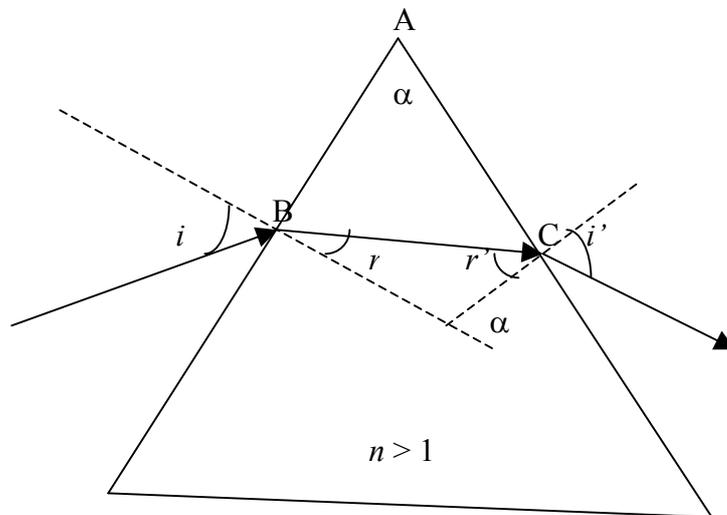


Fig. 8: Prisma

Per la legge di Snell valgono le seguenti relazioni: $\sin i / \sin r = n$ $\sin r' / \sin i' = 1/n$

Inoltre si ha $\alpha = r + r'$.

Vogliamo dimostrare che l'indice di rifrazione n del materiale di cui è fatto il prisma può essere ricavato dalla misura dell'angolo di incidenza che corrisponde a un angolo di rifrazione (all'uscita della seconda faccia) di $\pi/2$. Infatti, quando $i' = \pi/2$ (e quindi r' è l'angolo limite)

$$\sin r'_{lim} = 1/n = \sin(\alpha - r)$$

$$\sin \alpha \cos r - \cos \alpha \sin r = 1/n$$

Sostituendo:

$$n = 1/\sin \alpha (1 + \sin^2 i + 2 \sin i \cos \alpha)^{1/2}$$

7) Il diottro sferico

Un diottro sferico è un sistema ottico costituito da due mezzi omogenei (di indice di rifrazione n_1 e n_2 diversi), trasparenti e isotropi, separati da una superficie sferica di raggio R . La retta passante per la sorgente O e per il centro C della superficie sferica è detta *asse ottico* del diottro

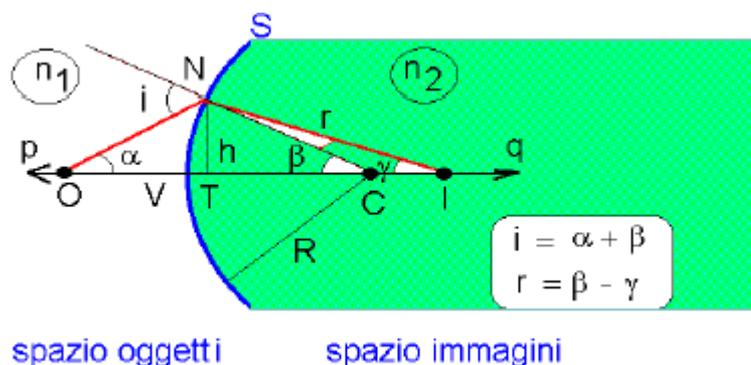


Fig. 9: Diottro sferico convesso

Come si vede in Fig. 9, l'asse ottico interseca la superficie sferica nel punto V . Questo punto è preso come riferimento per la misura delle distanze, con la seguente **convenzione**:

- p (distanza dell'oggetto dal diottro): > 0 (oggetto reale) per oggetti che si trovano, rispetto alla superficie di separazione del diottro, dalla parte da cui arriva la luce (*spazio di incidenza o spazio oggetti*); < 0 (oggetto virtuale) per oggetti che si trovano, rispetto alla superficie di separazione del diottro, dalla parte opposta a quella da cui arriva la luce (*spazio di trasmissione o spazio immagini*)
- q (distanza dell'immagine dal diottro): > 0 (immagine reale) per immagini nello spazio di trasmissione ("dietro" la superficie di separazione); < 0 (immagine virtuale) per immagini nello spazio di incidenza ("davanti" alla superficie di separazione)
- raggio di curvatura R : > 0 se il centro della superficie sferica è nello spazio di trasmissione (diottro convesso: è il caso della Fig. 9); < 0 se il centro della superficie sferica è nello spazio di incidenza (diottro concavo)

Occorre a questo punto verificare se un diottro sferico fornisce un'immagine puntiforme di una sorgente puntiforme. Facciamo riferimento alla Fig. 9, in cui è rappresentato un diottro sferico convesso, con il centro di curvatura nel punto C e indici di rifrazione dei due mezzi tali per cui $n_1 < n_2$. Consideriamo un generico raggio luminoso emesso dalla sorgente O con angolo α rispetto all'asse ottico; esso viene rifratto nel punto N e il raggio rifratto interseca l'asse ottico nel punto I . Se I fosse l'immagine di O allora la posizione di I rispetto a V dovrebbe essere indipendente dall'angolo di emissione α . Per la verifica, applichiamo il teorema dei seni ai triangoli OCN e NCI :

$$\frac{\text{sen } i}{p + R} = \frac{\text{sen } \beta}{ON} \quad \frac{\text{sen } r}{q - R} = \frac{\text{sen } \beta}{NI}$$

eliminando $\text{sen } \beta$ dalle due espressioni si ha:

$$\frac{\text{sen } i}{p + R} ON = \frac{\text{sen } r}{q - R} NI$$

$$\frac{ON}{NI} = \frac{\text{senr } p + R}{\text{seni } q - R} = \frac{n_1 p + R}{n_2 q - R} \quad (4)$$

In generale il rapporto a primo membro della (4) non e' costante al variare dell'angolo α e pertanto anche q e' funzione di α , dato che tutte le altre quantita' che intervengono a secondo membro hanno valore fisso.

Si puo' concludere, quindi, che un diottro sferico trasforma in generale un fascio omocentrico in un fascio astigmatico.

Introduciamo ora l'approssimazione gaussiana di raggi parassiali e verifichiamo che, in questa ipotesi, il diottro sferico fornisce un'immagine puntiforme di un oggetto puntiforme. Considereremo valide, nel seguito, le seguenti relazioni:

$$\tan \alpha \cong \text{sen} \alpha \cong \alpha \Rightarrow p = OV \cong ON$$

$$\tan \gamma \cong \text{sen} \gamma \cong \gamma \Rightarrow q = VI \cong NI$$

Sostituendo nella (4) si ha la relazione:

$$\frac{p}{q} = \frac{n_1 p + R}{n_2 q - R} \quad (5)$$

che puo' essere riscritta nella forma:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (6)$$

L'equazione (6) ci fornisce una relazione tra la posizione p della sorgente e la posizione q dell'immagine indipendentemente dal valore di α : si puo' quindi concludere che in approssimazione di Gauss il diottro trasforma fasci omocentrici in fasci rifratti omocentrici. L'equazione (6) del diottro e' detta anche equazione di Cartesio e i punti di coordinate p e q che la soddisfano sono detti *punti coniugati* rispetto al diottro.

8) Fuochi

Se la posizione p della sorgente tende all'infinito, l'immagine si trova in un punto, posto a distanza f_2 dal diottro detto **secondo fuoco**; mentre se l'immagine si forma a distanza infinita, l'oggetto si trova in un punto, detto **primo fuoco**, a distanza f_1 dal diottro: i raggi uscenti da f_1 si rifrangono parallelamente all'asse ottico. Dalla (6) si vede che:

$$f_2 = \lim_{(p \rightarrow \infty)} q = R \frac{n_2}{n_2 - n_1} \quad (7)$$

$$f_1 = \lim_{(q \rightarrow \infty)} p = R \frac{n_1}{n_2 - n_1} \quad (7')$$

A partire dalle definizioni (7) e (7') per i fuochi, l'equazione di Cartesio si puo' scrivere come:

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1 \quad (8)$$

Dalla (8) si vede che se l'oggetto e' posto tra il primo punto focale e l'infinito, esso fornisce un'immagine reale, mentre fornisce un'immagine virtuale quando e' posta tra la superficie del diottro e il primo fuoco.

9) Diottro concavo

Abbiamo ricavato l'equazione di Cartesio (6) trattando esplicitamente il caso di un diottro convesso. E' opportuno ricavare l'equazione di un diottro concavo come quello rappresentato in Fig. 10. In questo caso l'immagine I e' data dall'intersezione dei prolungamenti dei raggi rifratti: e' pertanto virtuale e la sua coordinata q ha, per convenzione, segno negativo.

Vogliamo trovare una relazione tra p e q in approssimazione di Gauss; assumiamo quindi valide le seguenti relazioni: $p = OV \cong ON$ $|q| = VI \cong NI$ $n_1 \cdot i \cong n_2 \cdot R$

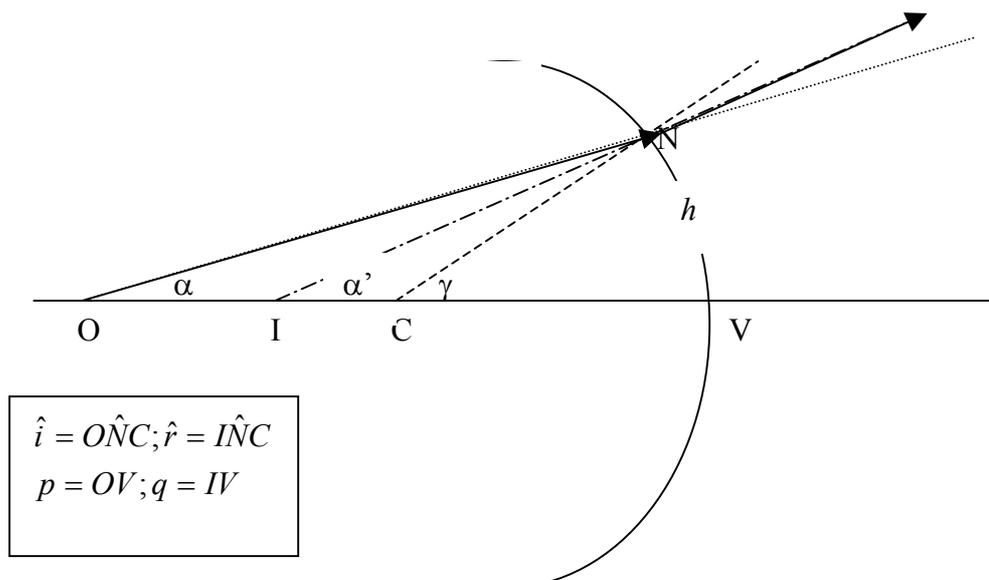


Fig. 10: diottro sferico concavo

Osservando i triangoli OCN e ICN, si vede che $\alpha + i = \gamma$ e che $\alpha' + r = \gamma$. Inoltre:

$$\alpha' \cong \frac{h}{|q|} \quad \alpha \cong \frac{h}{p} \quad \gamma \cong \frac{h}{|R|}$$

Ricavando i ed r e sostituendo nella legge di Snell si ha:

$$n_1(\gamma - \alpha) = n_2(\gamma - \alpha') \quad n_1 \left(\frac{h}{|R|} - \frac{h}{p} \right) = n_2 \left(\frac{h}{|R|} - \frac{h}{q} \right)$$

Dividendo per h , si ottiene una formula molto simile alla (6) trovata per il diottro convesso:

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{|q|} = \frac{n_2 - n_1}{|R|} \quad (9)$$

che differisce dalla (6) per il segno dei termini contenenti q e R .

Tenendo conto della convenzione dei segni (vedi piu' sopra) le due equazioni coincidono. Con questa convenzione e' cioe' possibile utilizzare la sola relazione (6) per descrivere sia diottri convessi che concavi.

Dalle definizioni (7) e (7') dei punti focali, si ricava che i segni di f_1 e f_2 sono uguali. Si ha infatti:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (10)$$

Se i fuochi sono positivi, i raggi provenienti da una sorgente posta all'infinito vengono rifratti in modo che convergano tutti nel secondo punto focale; per questa ragione un diottro con distanze focali positive e' detto convergente. Al contrario, se le distanze focali sono negative, i raggi provenienti da una sorgente posta all'infinito vengono dispersi dopo la rifrazione in modo che solo i loro prolungamenti si intersechino nel secondo fuoco: percio' un tale dispositivo e' detto divergente. Se $n_2 > n_1$ i fuochi sono positivi per diottri convessi ($R > 0$), mentre sono negativi per i diottri concavi ($R < 0$).

10) Specchio sferico

La legge della riflessione $i = -r$ si puo' ottenere da quella di Snell per la rifrazione ponendo $n_2 = -n_1$. In questo modo la trattazione della formazione di immagini da uno specchio sferico si effettua in totale analogia con il caso del diottro sferico: anche gli specchi sferici danno immagini puntiformi

di sorgenti puntiformi solo se la condizione di piccoli angoli e' rispettata. Le convenzioni sui segni adottate per i diottri continuano a valere per gli specchi. Se nella (6) poniamo $n_1 = -n_2$ e dividiamo ambo i membri per n_1 , otteniamo l'equazione dello specchio sferico:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} \quad (11)$$

Per quanto riguarda la posizione dei fuochi, si ha (facendo tendere rispettivamente q e p all'infinito)

$$\begin{aligned} f_2 &= R/2 \\ f_1 &= -R/2 \\ \Rightarrow f_2 / f_1 &= -1 \end{aligned} \quad (12)$$

Nel caso di uno **specchio convesso** ($R > 0$) il primo fuoco e' negativo: dato che non e' possibile porre una sorgente reale al di la' della superficie dello specchio, non e' possibile avere un'immagine all'infinito di una sorgente puntiforme. Uno specchio convesso e' divergente in quanto il secondo fuoco e' positivo: l'immagine di un punto all'infinito si forma al di la' dello specchio ed e' pertanto virtuale (al contrario di quanto accade per un diottro). Se lo **specchio e' concavo**, il secondo fuoco e' negativo, quindi i raggi provenienti dall'infinito vengono concentrati in un'immagine reale (*specchio ustorio*). Il primo fuoco e' positivo e la sua posizione coincide fisicamente con quella del secondo fuoco: una sorgente posta nel fuoco da' origine a raggi riflessi paralleli all'asse ottico che formano un'immagine reale all'infinito.

11) Sistemi ottici centrati: definizioni

Un sistema di due o piu' diottri sferici, aventi i centri di curvatura sulla stessa retta (*asse ottico*) costituisce un sistema ottico centrato.

Come esempi di sistemi ottici centrati si possono citare le lenti ed i sistemi di lenti, purché i centri delle superfici sferiche di separazione tra mezzi diversi giacciono sullo stesso asse. Notare che, per rispettare questa ipotesi, le eventuali superfici di separazione piane devono essere perpendicolari all'asse.

Tutta la trattazione che segue viene fatta in approssimazione di Gauss, e cioe':

- calotte piccole in confronto al raggio delle sfere
- raggi incidenti ad angolo piccolo ($\sin \alpha \approx \alpha$)

12) Lente

La lente e' un sistema diottrico in cui il primo e l'ultimo mezzo sono uguali (generalmente aria, $n \approx 1$) e il mezzo intermedio (vetro ottico, $n > 1$) e' limitato da due superfici sferiche (una puo' anche essere piana).

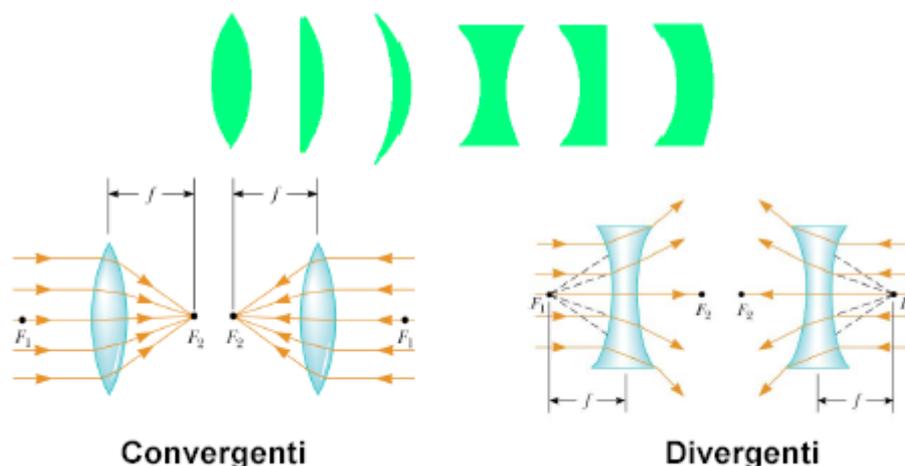


Fig. 11: vari tipi di lenti

In Fig. 11 sono schematicamente disegnati vari tipi di lenti. In alto, da sinistra: lente biconvessa, lente piano-convessa, menisco convergente; lente biconcava, lente piano-concava e menisco divergente.

Per calcolare a che distanza una lente convergente come quella di Fig. 12 forma l'immagine di un oggetto O, occorre tenere conto che la lente e' l'insieme di due diottri sferici: L'immagine I₁ data dal primo diottro (di raggio R₁) sara' l'oggetto (virtuale) del secondo; inoltre nel primo diottro si passa da aria a vetro, mentre nel secondo si passa da vetro ad aria. L'immagine finale e' I₂

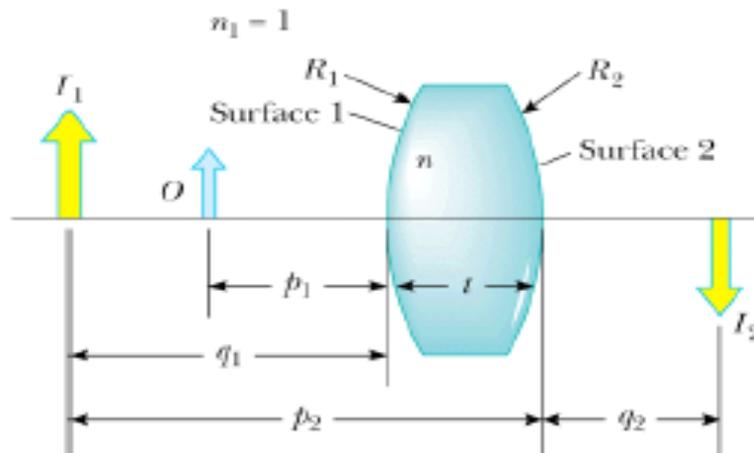


Figura 12: Lente biconvessa

Primo diottro:
$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{R_1} \quad (13) \quad \text{con } q_1 < 0$$

Secondo diottro:
$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{-R_2} \quad (14)$$

Essendo $p_2 = t - q_1$, nell'ipotesi che t sia trascurabile e quindi $p_2 \approx -q_1$ la (14) diventa:

$$-\frac{n}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{-R_2} \quad (15)$$

Sommando la (13) e la (15) otteniamo
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Se la lente ha spessore t trascurabile, p_1 e' la distanza dell'oggetto dalla lente, mentre q_2 e' la distanza dell'immagine dalla lente. Possiamo quindi scrivere l'equazione della lente sottile:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (16)$$

L'equazione (16) contiene tutte quantita' positive, ed e' stata ottenuta per una lente biconvessa, con oggetto e immagine reale. Facciamo quindi la seguente **convenzione dei segni per la lente**:

- per le distanze dell'oggetto e dell'immagine: stessa convenzione che per il diottro
- per i raggi di curvatura delle due superfici: curvatura positiva se la superficie e' convessa (curvatura verso l'esterno, lente "panciuta"), curvatura negativa se la superficie e' concava.

13) Fuochi della lente

f_2 (secondo fuoco) si trova ponendo $p = \infty$:
$$\frac{1}{f_2} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

f_1 (primo fuoco) si trova ponendo $q = \infty$: $\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

Da queste equazioni si deduce che $f_1 = f_2 = f$.

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (17)$$

Otteniamo quindi la **formula fondamentale delle lenti sottili (formula di Huygens)**:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (18)$$

Potere diottrico o potere rifrangente: e' l'inverso della distanza focale espressa in metri. L'unita' di misura e' la **diottria**, cioe' il potere rifrangente di una lente con distanza focale di un metro:

$$P(\text{diottrie}) = 1 / f(\text{metri})$$

Punto oggetto e punto immagine si dicono **punti coniugati**. Se il punto oggetto si muove su un piano, il punto immagine si muove su un altro piano: i due piani si dicono coniugati.

I punti di un **piano focale** (piano perpendicolare all'asse ottico passante per un fuoco) hanno per coniugati punti all'infinito. Per questo tutti i raggi uscenti da un punto del piano focale hanno come immagine raggi tra loro paralleli.

14) Lenti convergenti e lenti divergenti

- **Lenti convergenti**: i raggi paralleli all'asse passano per F_2 nello spazio di trasmissione (a destra della lente) in cui le immagini sono reali. Per queste lenti $f > 0$. Si possono avere lenti convergenti in diverse configurazioni (vedi Fig. 11):

lente biconvessa	$R_1 > 0$	$R_2 > 0$	$\Rightarrow f > 0$
lente piano convessa	$R_1 > 0$	$R_2 = \infty$	$\Rightarrow f > 0$
menisco convergente	$R_1 > 0$	$R_2 < 0$ con $R_1 < R_2 $	$\Rightarrow f > 0$

- **Lenti divergenti**: i raggi paralleli all'asse divergono: i loro **prolungamenti** si incontrano in F_2 nello spazio di incidenza (a sinistra della lente) in cui le immagini sono virtuali. Per le lenti divergenti $f < 0$. Anche le lenti divergenti si possono avere in diverse configurazioni (Fig. 11):

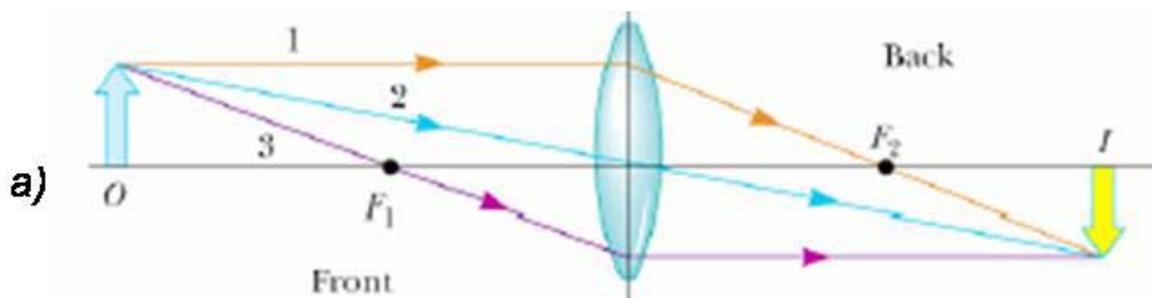
lente biconcava	$R_1 < 0$	$R_2 < 0$	$\Rightarrow f < 0$
lente piano concava	$R_1 < 0$	$R_2 = \infty$	$\Rightarrow f < 0$
menisco divergente	$R_1 > 0$	$R_2 < 0$ con $R_1 > R_2 $	$\Rightarrow f < 0$

15) Centro ottico

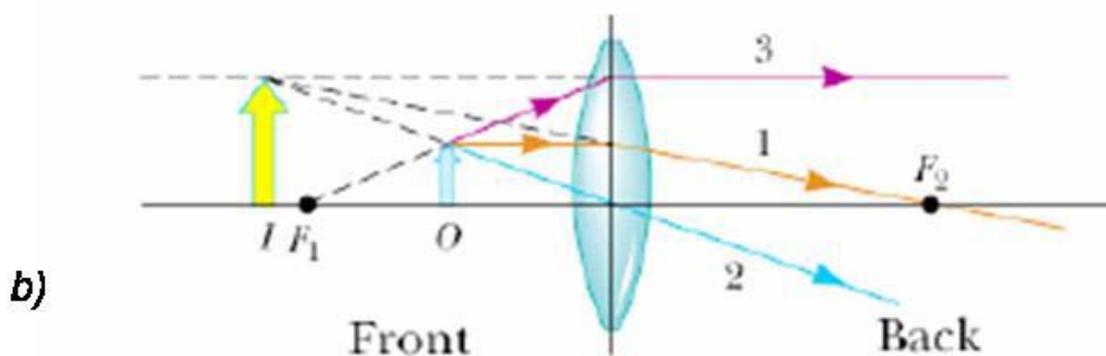
In una lente posso sempre trovare due punti in cui le tangenti alla superficie della lente sono parallele. Congiungiamo questi due punti e chiamiamo O il punto di intersezione con l'asse ottico. Essendo parallele le tangenti, saranno paralleli anche i raggi e quindi anche il raggio entrante e quello uscente. O e' il **centro ottico**: i raggi passanti per O non vengono deviati ma solo spostati. Si puo' dimostrare facilmente che O e' indipendente dalla direzione del raggio incidente ma dipende solo dalla lente. Per lenti sottili si puo' ritenere che il centro ottico sia l'incontro della lente con l'asse, e che i raggi passanti per esso non vengano ne' deviati ne' spostati.

16) Costruzione grafica delle immagini

Per costruire l'immagine di un oggetto si possono usare tre raggi (vedi Fig. 13): quello parallelo all'asse ottico che ha come immagine il raggio passante per il secondo fuoco (1), quello che passa per il centro ottico, che non viene deviato (2) e quello passante per il primo fuoco che ha come immagine il raggio parallelo all'asse ottico (3). Con la stessa lente l'immagine e' reale o virtuale a seconda della posizione dell'oggetto.



L'immagine è reale e rovesciata



L'immagine è dritta e virtuale

Fig. 13: costruzione dell'immagine in una lente convergente

17) Ingrandimento

Detta h_2 la dimensione trasversale dell'immagine I e detta h_1 la dimensione trasversale dell'oggetto O , si definisce ingrandimento trasversale il rapporto $\mathfrak{S} = h_2 / h_1$. Osservando in figura 13 a) i triangoli formati dal raggio (2), dall'asse ottico e rispettivamente dall'oggetto e dall'immagine, si può vedere facilmente che

$$\mathfrak{S} = h_2 / h_1 = q / p$$

Osservando invece i triangoli formati nello spazio di incidenza dal raggio (3) $\frac{h_2}{h_1} = \frac{f}{p - f}$

mentre dai triangoli formati nello spazio di trasmissione dal raggio (1): $\frac{h_2}{h_1} = \frac{q - f}{f}$

18) Discussione delle immagini

- Lenti convergenti:

Uguagliando la prima e la terza delle relazioni che abbiamo appena ricavato, possiamo scrivere:
 $\frac{q}{p} = \frac{f}{p-f}$ da cui $q = \frac{pf}{p-f} = \frac{f}{1-f/p}$. Possiamo quindi concludere che $q > 0$ se $p > f$ e $q < 0$ se $p < f$

Inoltre, essendo l'ingrandimento $\mathfrak{I} = \frac{f}{p-f} = \frac{1}{(p/f)-1}$ si ha che

$\mathfrak{I} > 1$ (immagine reale e ingrandimento > 1) se $1 < p/f < 2$ cioè se $f < p < 2f$

$\mathfrak{I} < 0$ (immagine virtuale) se $p < f$

• Lenti divergenti ($f = -|f|$):

In questo caso $q = -\frac{|f|}{1+|f|/p} \Rightarrow q$ e' sempre < 0 qualunque sia il valore di p . L'immagine e' sempre virtuale e l'ingrandimento \mathfrak{I} e' sempre negativo e con modulo < 1 . Infatti in questo caso

$$q = -\frac{1}{\frac{p}{|f|} + 1}$$

19) Lenti spesse

Quando lo spessore della lente non e' trascurabile si parla di *lente spessa*. Per trovare la relazione tra posizione dell'oggetto e posizione dell'immagine occorre tornare alle equaz. (13) e (14) con t (spessore della lente) non trascurabile. L'idea e' cercare due punti (F_1 e F_2) analoghi ai fuochi della lente sottile, corrispondenti ai punti all'infinito dell'asse ottico. Se si mette l'oggetto in F_1 distante p_o dal primo diottro l'immagine si forma all'infinito (i raggi che escono sono paralleli all'asse ottico) mentre se si pone l'oggetto all'infinito l'immagine si forma in F_2 distante q_o dal secondo diottro. Per determinare p_o e q_o si cerca il valore di p_1 per $q_2 = \infty$ e il valore di q_2 per $p_1 = \infty$.

Si ottiene:

$$p_o = \frac{R_1}{n-1} \cdot \frac{(n-1)t + nR_2}{(n-1)t + n(R_2 + R_1)} \quad q_o = \frac{R_2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)t + nR_1}{(n-1)t + n(R_2 + R_1)} \quad (19)$$

I valori di p_o e q_o (nella Fig. 14 rispettivamente F_1V_1 e V_2F_2) sono in generale diversi, a meno che non sia $t = 0$ oppure $R_2 = -R_1$ (lente simmetrica). In figura $t = V_1V_2$.

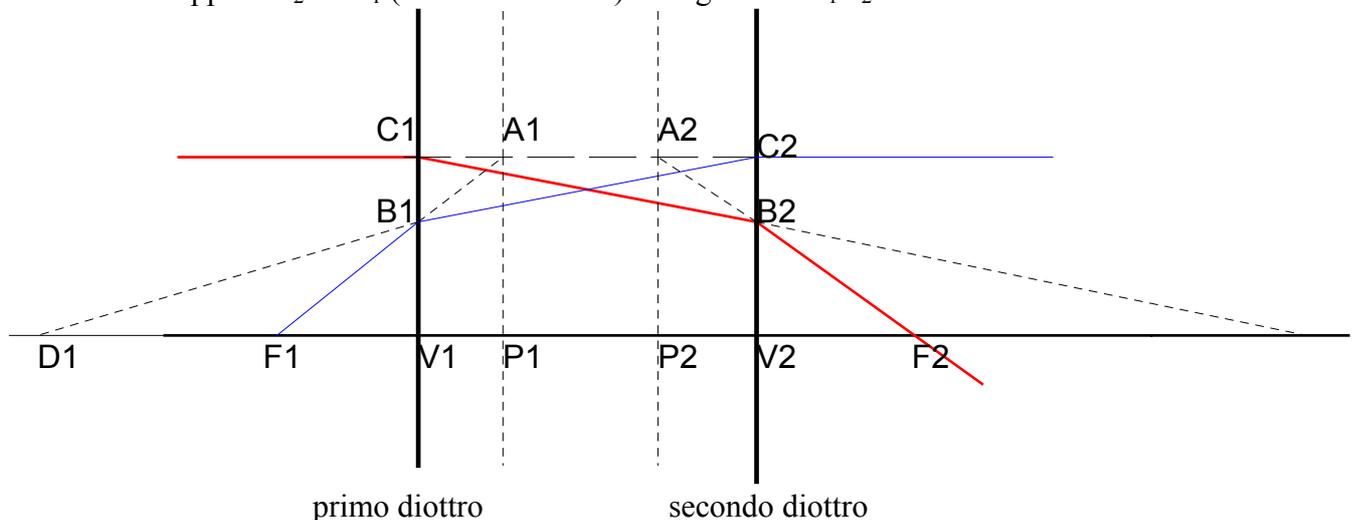


Fig. 14: schema di una lente spessa

Lo schema dei raggi passanti per i punti che abbiamo definito fuochi e' rappresentato in Fig. 14: in rosso il raggio parallelo all'asse ottico che incrocia l'asse ottico in F_2 , in blu il raggio che esce parallelo arrivando da F_1 .

Dall'esame dei triangoli simili $F_1B_1V_1$, $F_1A_1P_1$ e $D_1B_1V_1$, $D_1C_2V_2$ ricaviamo:

$$\frac{B_1V_1}{A_1P_1} = \frac{F_1V_1}{F_1P_1} = \frac{p_o}{f_1} \quad \frac{B_1V_1}{C_2V_2} = \frac{D_1V_1}{D_1V_2} = -\frac{q_1}{p_2} \quad \text{avendo definito } f_1 \text{ la distanza del primo fuoco dal}$$

punto P_1 e indicato con q_1 la distanza dell'immagine virtuale di F_1 data dal primo diottro. Questa immagine virtuale funge da oggetto per il secondo diottro, da cui dista $p_2 = t + q_1$

Siccome $A_1P_1 = C_2V_2$ si trova:

$$f_1 = -\frac{p_2}{q_1} \cdot p_o = -\frac{t + q_1}{q_1} p_o$$

D'altra parte l'equazione del primo diottro con l'oggetto in F_1 e' $\frac{1}{p_o} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{R_1}$; da questa si ricava q_1 e lo si sostituisce nell'espressione di f_1 insieme con la prima delle (19) ottenendo:

$$f_1 = -\frac{n}{n-1} \cdot \frac{R_1 R_2}{(n-1)t + n(R_2 + R_1)} \quad (20)$$

Se si ripete la procedura per il secondo fuoco F_2 si trova lo stesso risultato per la distanza $f_2 = P_2F_2$. Si conclude che esistono due punti P_1 e P_2 tali che rispetto ad essi le distanze dei fuochi sono uguali. La quantita' $f = f_1 = f_2 = P_1F_1 = P_2F_2$ si chiama *distanza focale* della lente spessa.

Anche qui adottiamo per i segni dei raggi di curvatura della lente la convenzione delle lenti sottili: i raggi di curvatura sono positivi se la "pancia" e' verso l'esterno (superfici convesse).

I punti A_1 e A_2 hanno la seguente proprieta': se consideriamo A_1 l'oggetto, troviamo che l'immagine e' A_2 . Infatti il punto A_1 e' stato ottenuto come incrocio del raggio uscente da F_1 e della sua immagine (raggio parallelo all'asse ottico). Il punto A_2 e' stato ottenuto come incrocio di questo raggio parallelo all'asse ottico e della sua immagine, che deve passare per F_2 . A_1 e A_2 , essendo punti in cui convergono rispettivamente raggi oggetto e relativi raggi immagine sono quindi punti coniugati. Il percorso effettivo all'interno della lente e' certamente diverso, ma la costruzione e' sempre possibile. Essa mostra che alle due deviazioni reali sulle superfici diottriche si puo' sostituire una sola deviazione equivalente: in A_1 per il raggio parallelo uscente e in A_2 per il raggio parallelo entrante.

Poiche' nella approssimazione di Gauss i diottri sono aplanatici, tutti i punti del piano passante per A_1 e ortogonale all'asse hanno l'immagine nel piano passante per A_2 e ortogonale all'asse. Questi due piani sono detti **piani principali** della lente e i punti P_1 e P_2 , intersezioni con l'asse, **punti principali**. Le proprieta' piu' importanti (gia' enunciate) sono le seguenti: i fuochi della lente, che non hanno in generale la stessa distanza dalle superfici esterne (o dal centro) della lente, hanno invece la stessa distanza dai piani principali e i due piani principali sono l'uno l'immagine dell'altro, con ingrandimento trasversale = 1. In una lente sottile i piani principali coincidono.

20) Sistemi composti da due lenti sottili

Si tratta di trovare una lente ideale (spessa) che sostituita alle due lenti produca gli stessi effetti. Siano quindi date due lenti sottili, di distanza focale rispettivamente f_1 e f_2 e distanti fra loro h : vogliamo trovare la distanza focale e la posizione della "lente equivalente".

Le equazioni del sistema completo sono:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \quad p_2 = h - q_1$$

Ponendo $q_2 = \infty$ si trova la distanza p_o dalla prima lente del primo fuoco F_1 (fuoco anteriore), mentre ponendo $p_1 = \infty$ si ha la distanza q_o dalla seconda lente del secondo fuoco (fuoco posteriore):

$$p_o = \frac{f_1(h-f_2)}{h-f_1-f_2} \quad q_o = \frac{f_2(h-f_1)}{h-f_1-f_2}$$

Con una costruzione analoga a quella della figura (14), in cui invece dei due diottri abbiamo le due lenti sottili, possiamo scrivere:

$$f = \frac{q_1 q_o}{p_2} = \frac{q_1 q_o}{q_1 - h}$$

Abbiamo considerato il caso di raggio incidente parallelo, e quindi $p_1 = \infty$. Dalla equazione della prima lente abbiamo quindi $q_1 = f_1$ mentre q_o e' dato dalla relazione che abbiamo appena trovato. Otteniamo in conclusione che la distanza focale della lente equivalente e':

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - h} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{h}{f_1 f_2} \quad (21)$$

Se le lenti sono a contatto $h = 0$ e

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (22)$$

Calcolata la focale e noti p_o e q_o si possono determinare le posizioni dei piani principali. E' interessante discutere per le varie possibili combinazioni di due lenti se la lente equivalente sara' convergente o divergente:

• **Sistema di due lenti convergenti ($f_1 > 0$, $f_2 > 0$)**

convergente ($f > 0$) se $(f_1 + f_2 - h) > 0$ cioe' se $(f_1 + f_2) > h$

telescopico ($f = \infty$) se $(f_1 + f_2 - h) = 0$ cioe' se $(f_1 + f_2) = h$

divergente ($f < 0$) se $(f_1 + f_2 - h) < 0$ cioe' se $(f_1 + f_2) < h$

• **Sistema di due lenti divergenti ($f_1 < 0$, $f_2 < 0$)**

$(f_1 + f_2 - h)$ e' sempre minore di zero, e il risultato e' quindi una lente divergente. $(f_1 + f_2 - h)$ non puo' nemmeno mai annullarsi.

• **Sistema di una lente convergente e una lente divergente ($f_1 > 0$, $f_2 < 0$)**

convergente ($f > 0$) se $f_1 - |f_2| - h < 0$ cioe' se $f_1 < (|f_2| + h)$

telescopico ($f = \infty$) se $f_1 - |f_2| - h = 0$ cioe' se $f_1 = (|f_2| + h)$

divergente ($f < 0$) se $f_1 - |f_2| - h > 0$ cioe' se $f_1 > (|f_2| + h)$

Se le lenti sono a contatto, il sistema e' convergente, telescopico o divergente a seconda che f_1 sia maggiore, uguale o minore di $|f_2|$.

Si definisce accoppiamento pancreatico il sistema di due lenti non a contatto, in cui le distanze focali sono uguali in valore assoluto ma di segno opposto: $f_1 = |f_2|$. In questo caso $f = f_1^2 / h$ e $p = f_1 = |f_2| = costante$. Se rimane fissa la seconda lente, e viene spostata solo la prima, la lente equivalente varia la distanza focale ma non la posizione.

21) Sistema diottrico centrato generico

Per definizione un sistema diottrico centrato generico e' una successione di mezzi di indice di rifrazione diverso, in cui le superfici di separazione sono o superfici sferiche con centro sull'asse ottico o piani perpendicolari ad esso.

Definiamo *secondo fuoco* del sistema diottrico centrato il punto F_2 dell'asse ottico per cui passano i raggi che arrivano paralleli all'asse. Definiamo *primo fuoco* il punto F_1 tale che i raggi uscenti da esso si rifrangono parallelamente all'asse.

Come per la lente spessa si individuano i *piani principali* e i *punti principali*, con le stesse proprieta' viste per la lente spessa.

22) Proprieta' dei sistemi ottici in approssimazione di Gauss

Abbiamo visto che i sistemi ottici, in approssimazione di Gauss, possiedono alcune importanti proprieta' che possiamo cosi' riassumere:

- *astigmatismo* (stigma = punto): i raggi provenienti da un oggetto puntiforme emergono dal sistema in modo che essi o i loro prolungamenti convergono in un punto, detto immagine. I punti oggetto ed immagine si dicono coniugati e giacciono in un piano con l'asse ottico
- *aplanetismo*: a raggi provenienti dai punti di un piano corrispondono raggi emergenti che convergono a loro volta in punti situati in un piano; se il primo piano e' perpendicolare all'asse ottico, anche il secondo lo e' e si dice che e' coniugato al primo
- *ortoscopia*: fissati due piani coniugati normali all'asse, il rapporto tra le distanze dall'asse di due punti coniugati qualsiasi e' costante. Questa proprieta' si ricava direttamente dalla relazione che definisce l'ingrandimento trasversale.

23) Aberrazioni

Le proprieta' descritte nel paragrafo precedente valgono solo approssimativamente per i sistemi ottici reali. Il discostamento dalle predizioni fornite dall'ottica gaussiana puo' essere asintoticamente ridotto ma mai eliminato. Le deviazioni dal comportamento gaussiano prendono il nome di *aberrazioni ottiche*. Lo studio e la classificazione delle aberrazioni e' di primaria importanza per la costruzione di sistemi ottici. Elenchiamo qui alcuni tipi di aberrazione che derivano dai limiti della teoria di Gauss:

- *Aberrazione di sfericita'*. Riguarda immagini dovute ad oggetti puntiformi appartenenti all'asse ottico. I raggi parassiali convergono nel punto immagine come previsto dalla teoria di Gauss, mentre i raggi di apertura maggiore convergono in punti sull'asse ottico diversi, a una distanza dal punto immagine teorico che e' funzione dell'angolo di apertura. In conseguenza di questo fatto, se si pone uno schermo nella posizione nominale dell'immagine, essa non appare come un punto ma come un disco circolare. Se si muove lo schermo lungo l'asse ottico si trova una posizione per la quale il raggio di tale disco risulta minimo. Questo tipo di aberrazione si riduce diminuendo l'apertura della lente con un diaframma.
- *Coma*. Il coma e' analogo all'aberrazione di sfericita', ma riguarda oggetti puntiformi posti al di fuori dell'asse ottico. In questo caso l'immagine non e' un disco, ma ha una forma che ricorda quella di una cometa (dove il nome) in quanto la simmetria circolare esistente nel caso di oggetto sull'asse ottico viene a mancare
- *Astigmatismo*. Riguarda come il coma immagini di sorgenti poste al di fuori dell'asse e concerne la formazione dell'immagine in direzione parallela all'asse. Spostando lungo l'asse uno schermo ortogonale all'asse della lente si osserva che i raggi emessi da un punto al di fuori dell'asse prima si incontrano nei punti di un segmento verticale, poi stanno su un disco e successivamente nei punti di un segmento orizzontale
- *Curvatura di campo*. Un sistema ottico possiede piani coniugati solo in approssimazione di Gauss: a punti oggetto giacenti su un piano non corrispondono in generale immagini che stanno su un piano. Questo fenomeno e' tanto piu' importante quanto piu' ci si allontana dall'asse ottico. La curvatura di campo causa perdita di definizione ai bordi dell'immagine di un oggetto esteso
- *Distorsioni*. L'ingrandimento e' in generale funzione della distanza dall'asse ottico: l'immagine di un oggetto esteso risulta quindi distorta
- *Aberrazione cromatica*. Questo tipo di aberrazione e' dovuto al fatto che l'indice di rifrazione varia al variare della lunghezza d'onda della luce e che, in generale, non si lavora con luce monocromatica. Dato che la lunghezza focale di una lente e' funzione dell'indice di rifrazione, si osserva che una lente forma una serie di immagini diverse per distanza e dimensione, in ragione della composizione cromatica della lente incidente.

Nella costruzione di strumenti ottici si applicano delle correzioni attraverso sistemi di lenti e lenti composte, per ridurre l'importanza delle aberrazioni almeno per certi valori delle dimensioni

dell'oggetto e della distanza dell'oggetto dal sistema ottico. Fenomeni che non sono di pertinenza dell'ottica geometrica, quali la diffrazione, intervengono in modo che puo' essere importante nella costruzione di sistemi ottici: ad esempio, la risoluzione di un telescopio e' limitata da fenomeni di diffrazione.