

Valutazione della pressione / 1



- Ciascuno stato occupa nello spazio delle fasi un volume $(2\pi\hbar)^3$
- Per un volume V , il numero di stati disponibili con momento compreso tra p e $p + dp$ è $\frac{4\pi p^2 dp V}{(2\pi)^3}$ (con $c = \hbar = 1$)
- Il numero di quark nel volume V che hanno effettivamente momento tra p e $p + dp$ è dato dalla statistica di Fermi–Dirac

$$dN_q = \frac{g_q V 4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + e^{(p-\mu_q)/T}} \right]$$

dove μ_q è il potenziale chimico e $g_q = N_c N_s N_f$ rappresenta il grado di degenerazione dei quark

Le espressioni per la densità di Fermi–Dirac e Bose-Einstein verranno dimostrate più avanti

Valutazione della pressione / 2

- La presenza di antiquark corrisponde all'assenza di quark negli stati ad energia negativa.
- La densità di antiquark è per ipotesi uguale a quella dei quark. Essa vale:

$$n_{\bar{q}} = \frac{g_q 4\pi}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 p_0^2 dp_0 \left[1 - \frac{1}{1 + e^{(p_0 - \mu_q)/T}} \right]$$

$$= \frac{g_q 4\pi}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 p_0^2 dp_0 \left[\frac{e^{(p_0 - \mu_q)/T}}{1 + e^{(p_0 - \mu_q)/T}} \right]$$

$$= \frac{g_q 4\pi}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 p_0^2 dp_0 \left[\frac{1}{1 + e^{-(p_0 - \mu_q)/T}} \right]$$

$$p_0 \rightarrow p = -p_0$$

$$n_{\bar{q}} = \frac{g_q 4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} p^2 dp \left[\frac{1}{1 + e^{(p + \mu_q)/T}} \right]$$

$$n_{\bar{q}} = n_q \Rightarrow \mu_q = 0$$

Valutazione della pressione / 3

Ponendo a zero il potenziale chimico, abbiamo per l'energia media dei quark

$$E_q = \frac{g_q V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{1 + e^{p/T}} \quad \longrightarrow \quad E_q = \frac{g_q V}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{1 + e^z} \quad \text{con } z = \frac{p}{T}$$

$$= \frac{g_q V}{2\pi^2} T^4 \Gamma(4) (1 - 2^{-3}) \zeta(4) = \frac{g_q V}{2\pi^2} T^4 \times 6 \times \frac{7}{8} \times \frac{\pi^4}{90}$$

La pressione degli anti quark è uguale

$$\varepsilon_q = \frac{E_q}{V} = \frac{7}{8} \frac{g_q \pi^2}{30} T^4$$

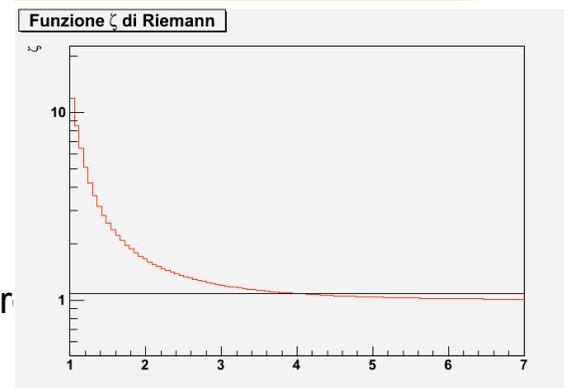


$$P_q = \frac{\varepsilon_q}{3} = \frac{7}{8} \frac{g_q \pi^2}{90} T^4$$

Funzione zeta di Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^x}$$

Fisica Nucleare delle Alte Ener



Intermezzo: densità dei quark

Abbiamo visto che la densità di quark e antiquark vale:

$$n_q = n_{\bar{q}} = \frac{g_q}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp \left[\frac{1}{1 + e^{p/T}} \right]$$

L'integrale è dello stesso tipo di quello valutato per determinare la densità di energia:

$$n_q = n_{\bar{q}} = \frac{g_q}{2\pi^2} T^3 \frac{3}{2} \zeta(3) \xrightarrow{T = 200 \text{ MeV}} n_q = n_{\bar{q}} = 1.71 \text{ fm}^{-3}$$

Valutazione della pressione / 4

- La pressione relativa ai gluoni si valuta in modo analogo a quanto fatto per i quark, utilizzando la statistica di Bose-Einstein

$$E_g = \frac{g_g V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} - 1} \quad \longrightarrow \quad E_g = \frac{g_g V}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1} \quad \text{con } z = \frac{p}{T}$$

$$= \frac{g_g V}{2\pi^2} T^4 \Gamma(4) \zeta(4) = \frac{g_g V}{2\pi^2} T^4 \times 6 \times \frac{\pi^4}{90}$$

$$\varepsilon_g = \frac{E_g}{V} = \frac{g_g \pi^2}{30} T^4 \quad \Rightarrow \quad P_g = \frac{g_g \pi^2}{90} T^4$$

$$P = P_{\bar{q}} + P_q + P_g = \left[\frac{7}{8} (g_q + g_{\bar{q}}) + g_g \right] \frac{\pi^2}{90} T^4$$

Densità dei gluoni

- La densità dei gluoni si valuta in modo analogo a quanto fatto per i quark. Si trova

$$n_g = \frac{g_g}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp \left[\frac{1}{e^{p/T} - 1} \right] = \frac{g_g}{2\pi^2} T^3 \Gamma(3) \zeta(3) = \frac{g_g}{\pi^2} 1.202 T^3$$

- Per un QGP a $T=200 \text{ MeV}$, la densità di gluoni è 2.03 fm^{-3}
- A $T=200 \text{ MeV}$, abbiamo una densità di energia di $2.5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$, 1.7 quark, 1.7 antiquark e 2 gluoni al fm^3

Effetti di bordo

- Abbiamo trattato il QGP come un continuo.
- Il QGP che può essere prodotto in laboratorio ha tuttavia estensione finita
- Ci sarà quindi la pressione della sacca a contrastare quella dei quark e dei gluoni
- Di solito pressione e densità di energia vengono quotati come:

$$\begin{cases} P_{Boundary} = g \frac{\pi^2}{90} T^4 - B \\ \varepsilon_{Boundary} = g \frac{\pi^2}{30} T^4 + B \end{cases}$$

The quantity B , which is added to the energy density, and subtracted from the pressure, summarizes interaction effects which are responsible for a change in the vacuum structure between the low temperature and the high temperature phases. It was introduced first in the “bag model” of hadron structure as a restoring force needed to equilibrate the pressure generated by the kinetic energy of the quarks inside the bag [16]. Roughly, the energy of the bag is

$$J.P. Blaizot, 2001 \quad E(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{C}{R}, \quad (3)$$

Confronto: gas di pioni

- Gas di pioni non interagenti, trattati come bosoni privi di massa
- Numero di gradi libertà $g_\pi = 3$ corrispondenti a π^+ , π^- , π^0
- La densità di energia è data dalla stessa espressione che abbiamo ricavato per i gluoni

$$\varepsilon_\pi = \frac{E_\pi}{V} = \frac{g_\pi \pi^2}{30} T^4 = 3 \frac{\pi^2}{30} T^4 = 0.21 \text{ GeV} / \text{fm}^3 \text{ per } T = 200 \text{ MeV}$$

- Così pure la densità di pioni

$$n_\pi = \frac{g_\pi}{\pi^2} 1.202 T^3 = 0.38 \pi / \text{fm}^3 \text{ per } T = 200 \text{ MeV}$$

Gas di pioni

- L'entropia per unità di volume associata ad un QGP e ad un gas di pioni può essere calcolata a partire dalla relazione (che dimostreremo più avanti)

$$s = \frac{\partial P}{\partial T}$$

$s_{QGP} = 4 \left(\frac{37\pi^2}{90} \right) T^3$

$s_{pioni} = 4 \left(\frac{\pi^2}{30} \right) T^3$

- L'entropia per pione può essere ricavata dalle relazioni precedenti. Non dipende dalla temperatura:

$$\frac{dS}{dN_\pi} = \frac{s_{pioni}}{n_\pi} = \frac{4\pi^2}{30} \times \frac{\pi^2}{3 \times 1.202} = 3.6$$

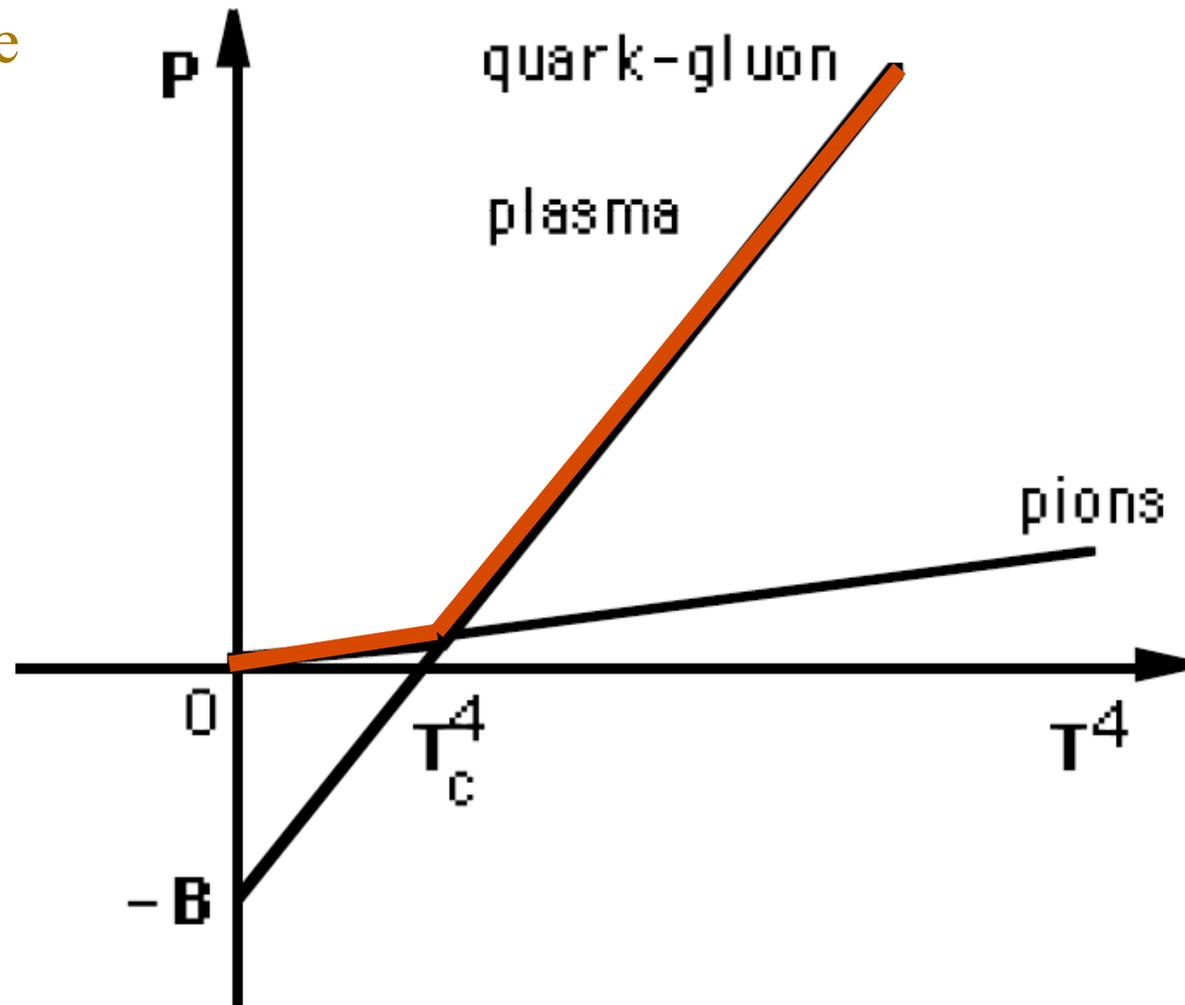
Fisica Nucleare dell

Il rapporto tra entropia e numero di particelle è una costante → questo è un ingrediente importante nei modelli statistici e idrodinamici

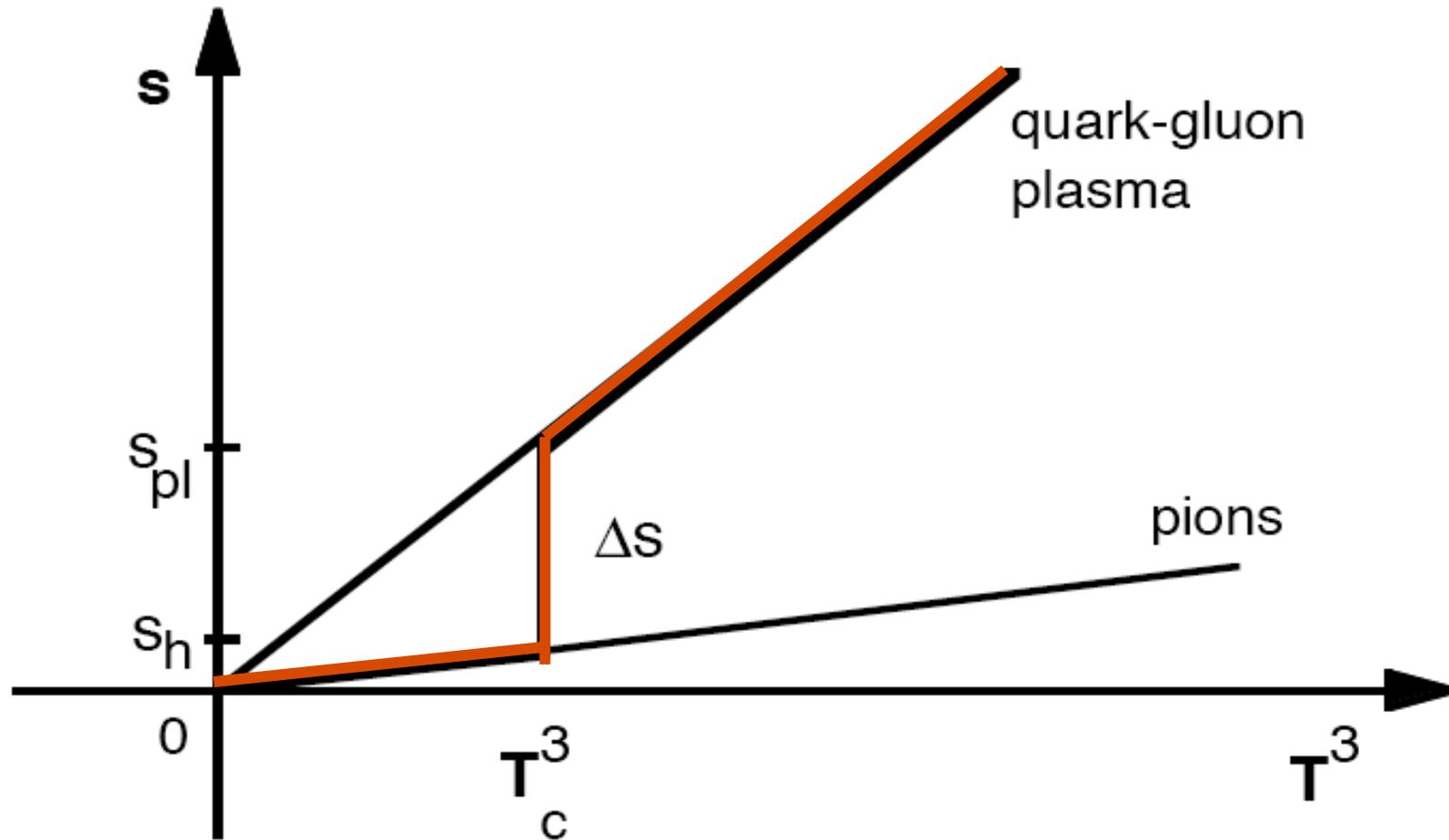
Pressione

✓ La pressione subisce una variazione di pendenza nel passaggio da gas di adroni a plasma di quark e gluoni.

✓ Questo implica una discontinuità nella derivata, che è l'entropia



Entropia



QGP per compressione / 1

- Sistema a $T=0$
- Elevata densità barionica
- Trascuriamo il contributo di antiquark e gluoni
- Tutti gli stati energetici disponibili fino a μ_q sono occupati. L'energia associata ai quark è

$$\varepsilon_q = \frac{E_q}{V} = \frac{g_q}{(2\pi)^3} \int_0^{\mu_q} 4\pi p^3 dp = \frac{g_q}{8\pi^2} \mu_q^4$$



$$P_q = \frac{\varepsilon_q}{3} = \frac{g_q}{24\pi^2} \mu_q^4$$

- Condizione critica: $P_q = B$

$$\mu_q = \left(\frac{24\pi^2 B}{g_q} \right)^{\frac{1}{4}}$$

QGP per compressione / 2

- La densità dei quark è

$$n_q = \frac{N_q}{V} = \frac{g_q}{(2\pi)^3} \int_0^{\mu_q} 4\pi p^2 dp = \frac{g_q}{6\pi^2} \mu_q^3$$

- Se si utilizza per il potenziale chimico l'espressione trovata prima, si ha per la densità barionica critica

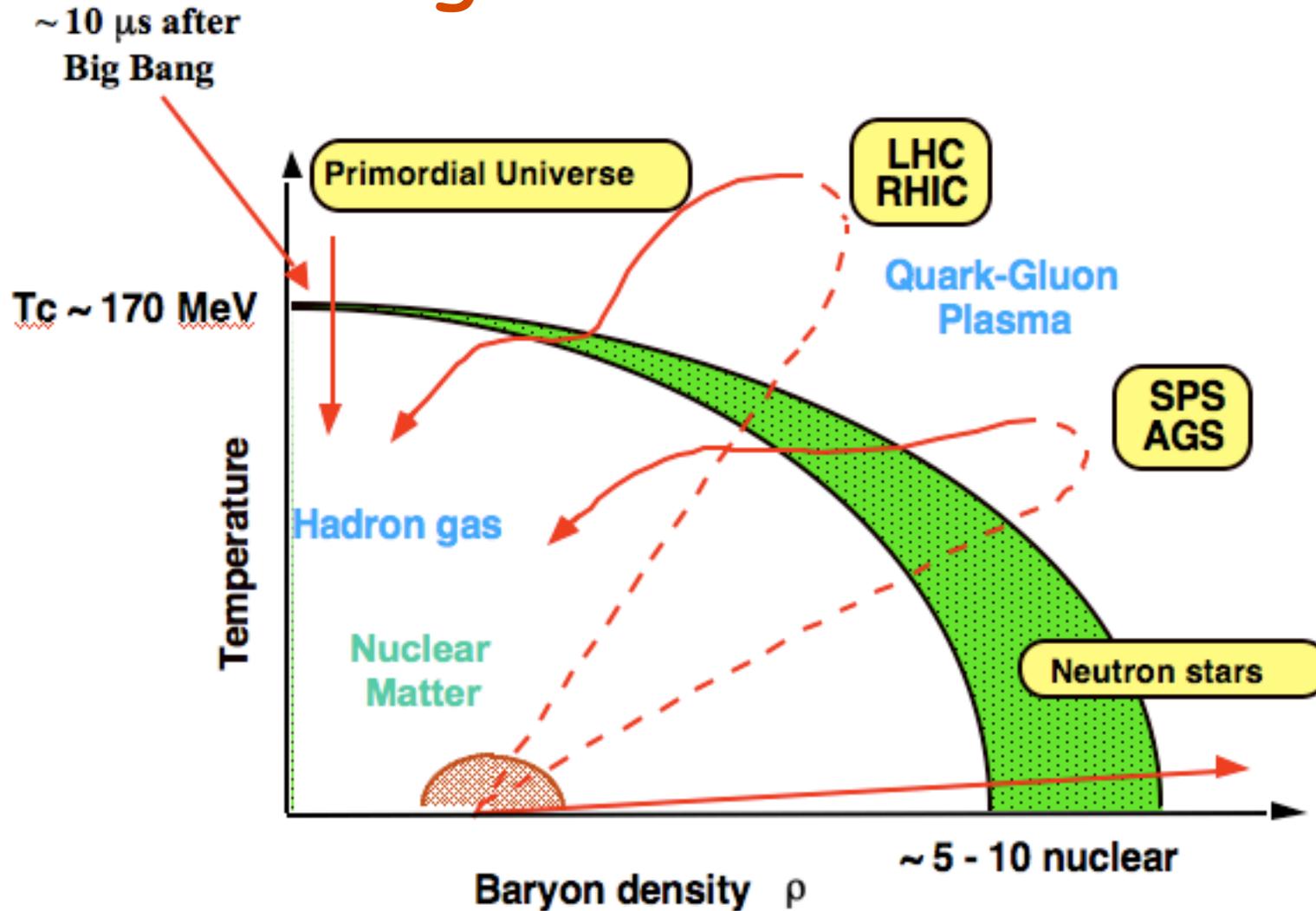
$$n_{qc} = 4 \frac{g_q}{24\pi^2} \left(\frac{24\pi^2}{g_q} \right)^{\frac{3}{4}} B^{\frac{3}{4}} \Rightarrow n_{qc} = 4 \left(\frac{g_q}{24\pi^2} \right)^{\frac{1}{4}} B^{\frac{3}{4}} \Rightarrow n_B = \frac{4}{3} \left(\frac{g_q}{24\pi^2} \right)^{\frac{1}{4}} B^{\frac{3}{4}}$$

Se si usa $B^{\frac{1}{4}} = 206$ MeV e $g_q = 3 \times 2 \times 2 = 12$ si trova

$$n_B = 0.72 \text{ fm}^{-3} \text{ e } \mu_q = 434 \text{ MeV}$$

Da confrontare con il valore 0.14 fm^{-3} della materia nucleare ordinaria (circa un fattore 5)

Diagramma di fase

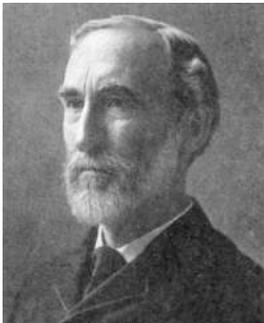


Termodinamica

- Nelle semplici valutazioni che sono state svolte nell'ambito del modello a sacca abbiamo avuto modo di utilizzare concetti quali:
 - Densità di energia
 - Pressione
 - Entropia
 - Potenziale chimico
 - Distribuzioni statistiche (Fermi Dirac e Bose Einstein)
 - Transizione di fase
- E' opportuno (re)introdurre alcuni concetti di fisica statistica e termodinamica, che sono utilizzati nello studio della materia nucleare ad alta energia

Il concetto di ensemble

- Il concetto di insieme (ensemble) statistico è stato introdotto nel 1878 da Gibbs. E' costituito dall'insieme delle “copie mentali” di un sistema termodinamico reale → insieme delle realizzazioni possibili di un sistema termodinamico
- **Insieme microcanonico**: costituito da un sistema isolato. Tutti gli stati condividono la stessa energia
- **Insieme canonico**: costituito a partire da un sistema termodinamico in grado di scambiare energia con l'ambiente. Tutti gli elementi dell'ensemble hanno stesso numero di particelle, stesso volume e stessa temperatura (sistema NVT)
- **Insieme gran canonico**: costituito a partire da un sistema che può scambiare energia e materia con l'ambiente



Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Strano americano: nato e morto nello stesso posto. Landau ha scritto nella prefazione del suo Statistical Physics “The aim of this book is to give a unified presentation of thermodynamics and classical statistics, based on the point of view associated with the name of Gibbs”. Attribuito a Gibbs: “A mathematician may say anything he pleases, but a physicist must be at least partially sane”

Potenziali termodinamici

Energia libera di Helmholtz

I principio della termodinamica $-dW = dE - \delta Q$

II principio della termodinamica $\delta Q \leq TdS$

$dW \leq -(dE - TdS)$

Per processi isotermi, abbiamo che $-dW \geq d(E - TS) \equiv dF$

Il potenziale $F = E - TS$ è l'energia libera di Helmholtz. Esso rappresenta, in valore assoluto, il lavoro compiuto da un sistema termodinamico nel corso di una trasformazione reversibile isoterma

Se $dW = 0 \Rightarrow dF \leq 0$

L'energia libera di Helmholtz tende ad un minimo per sistemi che abbiano temperatura e volume costanti

$dV=0$

Potenziali termodinamici

Energia libera di Gibbs (o entalpia libera)

Si consideri un sistema che compie una trasformazione termodinamica tra due stati aventi eguale temperatura e pressione. Valutando il lavoro PdV , la relazione che riassume I e II principio è:

$$dE + PdV - TdS \leq 0 \quad \xrightarrow{P, T \text{ cost}} d(E + PV - TS) \equiv dG \leq 0$$

L'entalpia libera $G = E + PV - TS$ è minima in un sistema in condizioni isoterme e isobare

Entalpia

Stati a entropia e pressione uguali

$$dE + PdV - TdS \leq 0 \quad \xrightarrow{P, S \text{ cost}} d(E + PV) \equiv dH \leq 0$$

Nei processi isobari e isoentropici lo stato di equilibrio è quello di minima entalpia $H = E + PV = G + TS$

Entropia

- Per un sistema isolato (che non scambia né energia né materia con l'ambiente), l'entropia è definita da un punto di vista statistico come

$$S = k_B \ln \Omega$$

- Dove k_B è la costante di Boltzmann e Ω è il numero di microstati del sistema. La probabilità di realizzare uno specifico microstato è $p_i = 1/\Omega$.
- La dipendenza logaritmica da Ω garantisce la additività dell'entropia

Sistemi che scambiano energia con l'ambiente / 1

- In un sistema che scambia energia con l'ambiente (in equilibrio con esso ad una temperatura T), la probabilità di realizzare un microstato è data dalla distribuzione di Boltzmann:

$$p_i = \frac{e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z}$$

- Z è la funzione di partizione canonica:

$$Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

- Z (il simbolo deriva dal tedesco *Zustandsumme*) dipende dallo stato termodinamico del sistema

Sistemi che scambiano energia con l'ambiente / 2

- Visto che il sistema scambia calore con l'ambiente, ha un'energia soggetta a fluttuazioni.
- Si può calcolare l'entropia dell'ensemble canonico e valutare l'entropia media del sistema come rapporto tra l'entropia dell'ensemble ed il numero dei suoi componenti.
- L'ensemble è un insieme di ν copie del sistema, ciascuna in un microstato permesso. Se $\nu \gg \Omega$ ciascun microstato è rappresentato con una frequenza ν_i che riflette la sua probabilità.

$$p_i = \frac{\nu_i}{\nu}$$

Sistemi che scambiano energia con l'ambiente / 2

Il numero di combinazioni possibili delle copie che compongono l'ensemble è

$$\Omega_v = \frac{v!}{\prod_i v_i!}$$

Applicando la formula di Stirling, si ha

$$\ln \Omega_v = v \ln v - v - \sum_i (v_i \ln v_i - v_i) = \sum_i v_i \ln v - \sum_i v_i - \sum_i v_i \ln v_i + \sum_i v_i = \sum_i [v_i (\ln v - \ln v_i)]$$

$$\ln \Omega_v = -v \sum_i \left[p_i \ln \frac{v_i}{v} \right] = -v \sum_i p_i \ln p_i$$

L'entropia dell'ensemble è $S_v = k_B \ln \Omega_v = -v k_B \sum_i p_i \ln p_i$

L'entropia media del sistema è pertanto

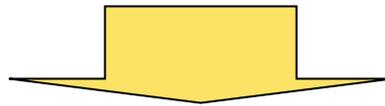
$$\bar{S} = \frac{S_v}{v} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

Si noti che questa definizione di entropia è corretta anche per un ensemble microcanonico:

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = -k_B \sum_i \frac{1}{\Omega} \ln \frac{1}{\Omega} = k_B \ln \Omega$$

Funzione di partizione ed energia libera di Helmholtz

$$\bar{S} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = -k_B \sum_i p_i \ln \left(\frac{e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z} \right) = -k_B \sum_i p_i \left(-\frac{E_i}{k_B T} - \ln Z \right) = \frac{\bar{E}}{T} + k_B \ln Z$$



$$T\bar{S} = \bar{E} + k_B T \ln Z \quad \longrightarrow \quad -k_B T \ln Z = \bar{E} - T\bar{S} \quad \longrightarrow \quad \boxed{-k_B T \ln Z = F}$$

Per un sistema che può scambiare energia con l'ambiente, l'energia libera di Helmholtz è un potenziale termodinamico direttamente legato alle proprietà statistiche del sistema, attraverso la relazione diretta con la funzione di partizione. Per un sistema isolato è l'entropia che ha questo ruolo

Nel seguito non esplicheremo il simbolo di media, useremo S , E , ...

Potenziale chimico

- Sistema a molte particelle in cui il numero di queste può variare → ensemble gran canonico
- Sistema “aperto”
 - Se varia il numero di particelle, varia l’energia interna del sistema
 - Il potenziale chimico dà una misura quantitativa di questa variazione di energia

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V}$$

- In caso di sistemi a più componenti, si definisce un potenziale chimico per ogni componente. Nel seguito considereremo il potenziale chimico barionico μ_B

Conservazione dell'energia

In un sistema aperto, la variazione del numero di particelle entra nel bilancio energetico → il primo principio della termodinamica si scrive come:

$$\text{Sistemi isolati : } dE = TdS - PdV$$

$$\text{Sistemi aperti : } dE = TdS - PdV + \mu dN$$

I differenziali dei potenziali termodinamici diventano

$$\begin{cases} dG = dE - TdS - SdT + PdV + VdP = -SdT + VdP + \mu dN \\ dF = dE - TdS - SdT - PdV - SdT + \mu dN \\ dH = dE + PdV + VdP = TdS + VdP + \mu dN \end{cases}$$

Il potenziale chimico può essere espresso come:

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{P,T} = \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_{P,S}$$

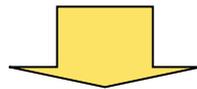
Dipendenza da N dei potenziali termodinamici

- Volume, energia ed entropia sono quantità estensive
- Pressione e temperatura sono quantità intensive
- Dalle relazioni precedenti, segue che:
 - $E \rightarrow E(S, V, N)$
 - $F \rightarrow F(T, V, N)$
 - $H \rightarrow H(S, P, N)$
- Ne segue che anche H, F e G sono quantità estensive (o additive)
- Se le variabili intensive sono mantenute costanti, le variabili estensive sono proporzionali alla quantità di sostanza presente.
- L'additività ha delle conseguenze sulle forme funzionali di questi potenziali.

Forme funzionali per i potenziali termodinamici

Mantenendo costanti le variabili intensive,

$$\text{se } N \rightarrow kN \quad \Rightarrow \quad V \rightarrow kV, \quad S \rightarrow kS, \quad E \rightarrow kE$$



$$E = Nf\left(\frac{S}{N}, \frac{V}{N}\right) \quad \longrightarrow \quad E' = kNf\left(\frac{kS}{kN}, \frac{kV}{kN}\right) = kE$$

Allo stesso modo si ottiene che:

f, g, h, u sono funzioni che dipendono dal sistema

$$F = Ng\left(\frac{V}{N}, T\right)$$

$$H = Nh\left(\frac{S}{N}, P\right)$$

$$G = Nu(P, T)$$



Il potenziale chimico di un sistema composto da particelle identiche è l'energia libera di Gibbs per particella

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{P,T} = u(P, T) \quad \Rightarrow \quad G = N\mu(P, T)$$

Grand partition function / 1

- Nell'ensemble gran canonico, la probabilità di un microstato contiene anche un termine dipendente dal potenziale chimico. La distribuzione di Boltzman viene modificata in (detta anche distribuzione di Gibbs):

$$p_i = \frac{e^{-\frac{(E_i - \mu N_i)}{k_B T}}}{Z}$$

- Di conseguenza anche la funzione di partizione è modificata e prende il nome di *grand partition function*

$$Z = \sum_i e^{-\frac{(E_i - \mu N_i)}{k_B T}}$$

Grand partition function / 2

Si possono ricavare alcune relazioni tra la funzione di partizione e alcune funzioni di stato del sistema:

Posto: $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\mathcal{Z}} \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \beta} \right) &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[\sum_i (E_i - \mu N_i) e^{-(E_i - \mu N_i)\beta} \right] \\
 &= \frac{\sum_i E_i e^{-(E_i - \mu N_i)\beta}}{\mathcal{Z}} - \mu \frac{\sum_i N_i e^{-(E_i - \mu N_i)\beta}}{\mathcal{Z}} \\
 &= \bar{E} - \mu \bar{N}
 \end{aligned}$$

Grand partition function / 3

$$\begin{aligned}\bar{E} &= - \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} \right) + \mu \bar{N} \\ &= k_B T^2 \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial T} \right) + \mu \bar{N}\end{aligned}$$

In modo analogo, si ricava che

$$\bar{N} = k_B T \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} \right)$$

Potenziale Φ_G

$$\bar{S} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = -k_B \sum_i p_i \ln \left[\frac{e^{-\frac{(E_i - \mu N_i)}{k_B T}}}{Z} \right] = -k_B \sum_i p_i \left[-\frac{(E_i - \mu N_i)}{k_B T} - \ln Z \right]$$

$$\bar{S} = \frac{1}{T} (\bar{E} - \mu \bar{N}) + k_B \ln Z \quad \longrightarrow \quad -k_B T \ln Z = \bar{E} - T\bar{S} - \mu \bar{N}$$

Si introduce un nuovo potenziale termodinamico, che rappresenta l'estensione all'ensemble gran canonico dell'energia libera di Helmholtz:

$$\Phi_G(V, T, \mu) = E - TS - \mu N = F - \mu N \quad \Rightarrow \quad -k_B T \ln Z = \Phi_G$$

$$\begin{aligned} d\Phi_G &= dE - TdS - SdT - \mu dN - Nd\mu \\ &= TdS - PdV + \mu dN - TdS - SdT - \mu dN - Nd\mu \\ &= -(PdV + SdT + Nd\mu) \end{aligned}$$

Potenziale termodinamico

Dall'espressione di $d\Phi_G$ segue immediatamente

$$\left\{ \begin{array}{l} S = -\left(\frac{\partial\Phi_G}{\partial T}\right)_{V,\mu} \\ P = -\left(\frac{\partial\Phi_G}{\partial V}\right)_{T,\mu} \\ N = -\left(\frac{\partial\Phi_G}{\partial\mu}\right)_{T,V} \end{array} \right.$$

Si possono ottenere facilmente un'espressione per il potenziale termodinamico ed una per la densità di entropia:

$$G = N\mu \Rightarrow \Phi_G = E - TS - G \longrightarrow \Phi_G = E - TS - E - PV + TS \longrightarrow \boxed{\Phi_G = -PV}$$

$$\boxed{s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial\Phi_G}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial PV}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}$$

Potenziale termodinamico / 3

$$\Phi_G = E - TS - \mu N \quad \Rightarrow \quad -PV = E - TS - \mu N \quad \Rightarrow \quad -P = \varepsilon - Ts - \mu n$$

$$\varepsilon = -P + Ts + \mu n$$

Nel modello a sacca si era trovato $P = \alpha T^4$ che implica, nell'ipotesi di $\mu = 0$:

$$\varepsilon = -\alpha T^4 + T(4\alpha T^3) = 3\alpha T^4 = 3P$$

Statistiche quantistiche

NOTA:

Questo argomento era stato svolto l'anno passato da Francesco Prino nella trattazione dei modelli statistici sulla produzione di particelle.

Abbiamo deciso di anticiparlo qui (gli ho rubato le slide), visto che la funzione di partizione gran canonica è appena stata introdotta.

Statistiche quantistiche (I)



- Funzione di partizione gran-canonica:

$$Z_i(T, V, \mu_i) = \sum_s e^{-\beta(E_s - \mu_i N_s)}$$

- Con s si indicano gli stati del sistema di particelle identiche di specie i
- L'energia e il numero di particelle dipendono dallo stato (E_s e N_s)
- $\beta=1/T$ (se T è misurata in MeV)
- Per un sistema quantistico:
 - Lo stato $|s\rangle$ è definito dai numeri di occupazione degli stati $|\alpha\rangle$ di particella singola (es. : $|s\rangle = |1,0,0,3,5\dots\rangle = |n_1, n_2, n_3 \dots\rangle = |\{n_\alpha^{(s)}\}\rangle$)
 - Il numero di particelle e l'energia dello stato s sono dati da:

$$N_s = \sum_\alpha n_\alpha^{(s)} \quad E_s = \sum_\alpha n_\alpha^{(s)} E_\alpha$$

- α sono gli autostati (di energia E_α) dell'**hamiltoniana di particella singola** (= livelli energetici con degenerazione di spin)

Statistiche quantistiche (II)

- Inseriamo E_s e N_s nella funzione di partizione:

$$Z_i(T, V, \mu_i) = \sum_s e^{-\beta(\sum_{\alpha} n_{\alpha}^{(s)} E_{\alpha} - \mu_i \sum_{\alpha} n_{\alpha}^{(s)})} = \sum_{\{n_{\alpha}^{(s)}\}} e^{\sum_{\alpha} [-\beta(E_{\alpha} - \mu_i)] n_{\alpha}^{(s)}}$$

- Usiamo le proprietà dell'esponenziale: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ e $e^{xy} = (e^x)^y$

$$Z_i(T, V, \mu_i) = \sum_{\{n_{\alpha}^{(s)}\}} \left[\prod_{\alpha} e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu_i) n_{\alpha}^{(s)}} \right] = \sum_{\{n_{\alpha}^{(s)}\}} \left[\prod_{\alpha} (X_{\alpha})^{n_{\alpha}^{(s)}} \right]$$

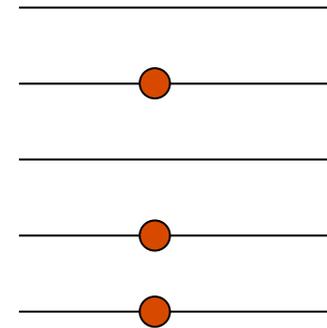
– avendo definito: $X_{\alpha} = e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu_i)}$

- Esplicitando sommatorie e produttorie:

$$Z_i(T, V, \mu_i) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots = \sum_{n_1} X_1^{n_1} \cdot \sum_{n_2} X_2^{n_2} \dots = \prod_{\alpha} \sum_{n_{\alpha}} (X_{\alpha})^{n_{\alpha}}$$

Statistica di Fermi-Dirac

- Vale il principio di esclusione di Pauli: il numero di occupazione per uno stato α di particella singola può essere solo 0 o 1



$$Z_i(T, V, \mu_i) = \prod_{\alpha} \sum_{n=0}^1 (X_{\alpha})^n = \prod_{\alpha} [1 + X_{\alpha}] = \prod_{\alpha} [1 + e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu_i)}]$$

– ricordando che si era definito:

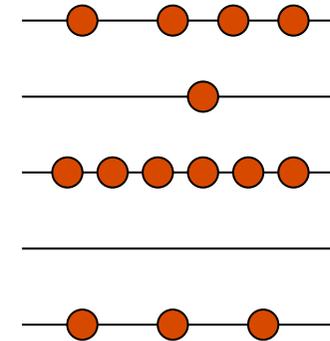
$$X_{\alpha} = e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu_i)}$$

Statistica di Bose-Einstein



- Il numero di occupazione per uno stato α di particella singola può assumere qualunque valore intero

– $n_\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$



$$Z_i(T, V, \mu_i) = \prod_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (X_{\alpha})^n = \prod_{\alpha} \left[\frac{1}{1 - X_{\alpha}} \right] = \prod_{\alpha} \left[1 - e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu_i)} \right]^{-1}$$

– ricordando che si era definito:

$$X_{\alpha} = e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu_i)}$$

- Nota: la somma della serie geometrica $\sum x^n$ converge a $1/(1-x)$ solo nel caso in cui $x < 1$, che nel nostro caso si traduce in un vincolo su μ_i :

$$e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu_i)} < 1 \quad \Rightarrow \quad \beta(E_{\alpha} - \mu_i) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i < E_{\alpha} \quad \forall \alpha \quad \Rightarrow \quad \mu_i < E_0$$

Funzione di partizione gran canonica



- La funzione di partizione per l'i-esima specie adronica si può quindi scrivere come:

$$Z_i(T, V, \mu_i) = \prod_{\alpha} \left[1 \pm e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu_i)} \right]^{\pm 1}$$

- gas ideale di particelle identiche (gas di Bose o gas di Fermi)
 - il + vale per i fermioni e il – per i bosoni
 - α sono gli autostati (di energia E_{α}) dell'hamiltoniana di particella singola
 - = livelli energetici con degenerazione di spin
- Passando al logaritmo:

$$\ln Z_i(T, V, \mu_i) = \sum_{\alpha} \pm \ln \left[1 \pm e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu_i)} \right]$$

Funzione di partizione gran canonica



- Limite macroscopico: dalla somma sugli stati α di particella singola si passa all'integrale sui momenti:

$$\sum_{\alpha} \longrightarrow \frac{V}{8\pi^3 \hbar^3} (2s+1) \int d^3 p = \frac{V}{8\pi^3 \hbar^3} (2s+1) \int 4\pi p^2 dp = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} g_i \int p^2 dp$$

- dove $g_i=2s+1$ è il fattore di degenerazione di spin
- Sostituendo nell'espressione di $\ln Z$ si ricava ($\hbar=c=1$):

$$\begin{aligned} \ln Z_i(T, V, \mu_i) &= \frac{V g_i}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \pm p^2 dp \ln \left[1 \pm e^{-\beta(E-\mu_i)} \right] = \\ &= \frac{V g_i}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \pm p^2 dp \ln \left[1 \pm \lambda_i e^{-\beta E} \right] \end{aligned}$$

- Dove si è introdotta la **fugacità** λ_i definita come:

$$\lambda_i = e^{\beta \mu_i}$$

Densità di particelle

- La densità n_i di particelle di specie i si ricava come:

$$n_i = \frac{N_i}{V} = \frac{1}{V} \frac{\partial(T \ln Z_i)}{\partial \mu_i}$$

– in cui N_i è il numero totale di particelle di specie i nel sistema

- Sostituendo l'espressione della funzione di partizione si ricava:

$$\begin{aligned} n_i(T, \mu_i) &= \frac{T g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \pm p^2 dp \frac{\partial}{\partial \mu_i} \ln \left[1 \pm e^{-\beta(E-\mu_i)} \right] = \\ &= \frac{T g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \pm p^2 dp \frac{1}{1 \pm e^{-\beta(E-\mu_i)}} (\pm) e^{-\beta(E-\mu_i)} \cdot \beta = \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta(E-\mu_i)} \pm 1} \end{aligned}$$

– che sono le distribuzioni di Fermi-Dirac (+) e di Bose-Einstein (-)

Funzione di partizione

- Nel caso di un sistema quanto meccanico:

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{1}{T}(H-\mu N)} \right\}$$

Dove H e N sono gli operatori hamiltoniano e di creazione di particelle

- In un insieme gran canonico fluttuano sia l'energia che il numero di particelle, il cui valor medio può essere valutato a partire dalla funzione di partizione
- Ponendo $k_B=1$, si ha per la densità di energia e di particelle

$$\epsilon = \frac{\bar{E}}{V} = \frac{1}{V} \frac{\text{Tr} \left\{ H e^{-\frac{1}{T}(H-\mu N)} \right\}}{\text{Tr} \left\{ e^{-\frac{1}{T}(H-\mu N)} \right\}} = \frac{T^2}{V} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial T} + \mu n$$

$$n = \frac{\bar{N}}{V} = \frac{\text{Tr} \left\{ N e^{-\frac{1}{T}(H-\mu N)} \right\}}{\text{Tr} \left\{ e^{-\frac{1}{T}(H-\mu N)} \right\}} = \frac{T}{V} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu}$$

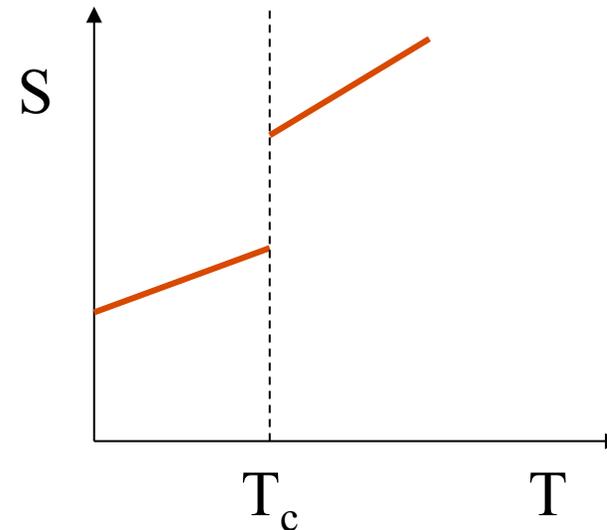
Transizioni di fase

- Abbiamo visto che la valutazione nell'ambito del bag model per una transizione da gas di pioni a QGP prevede una discontinuità dell'entropia in funzione della temperatura in corrispondenza del valore della temperatura critica di transizione
- Classicamente le transizioni di fase si classificano come transizioni di ordine n se mostrano una discontinuità della derivata n -ma dell'energia libera rispetto ad una variabile termodinamica (e.g. la temperatura)
- In particolare l'entropia è la derivata prima dell'energia libera, a volume e potenziale chimico costante
- Esempi:
 - transizione del primo ordine: la fusione del ghiaccio
 - Transizione del secondo ordine: passaggio da comportamento ferromagnetico a paramagnetico

Transizioni al primo ordine

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,\mu}$$

In generale si osserva discontinuità per anche per le altre derivate di F (o di G) rispetto a variabili intensive.



La densità di energia è legata alla derivata prima dell'energia libera di Helmholtz dalla relazione:

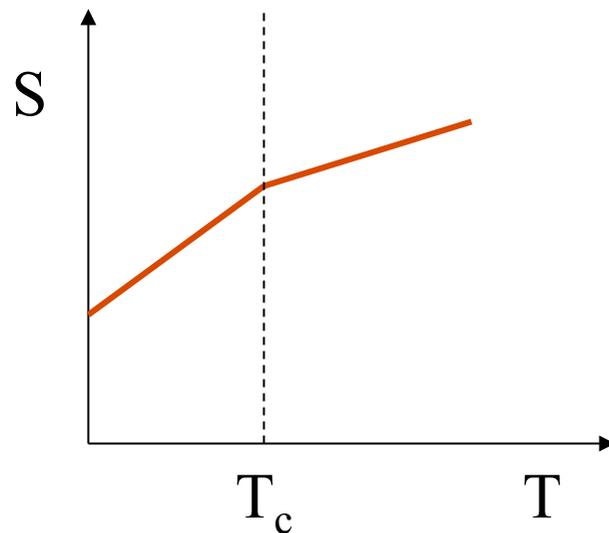
$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{F - T \frac{\partial F}{\partial T}}{V}$$



Anche la densità di energia è discontinua: la differenza di densità di energia tra le due fasi è il calore latente associato alla transizione stessa

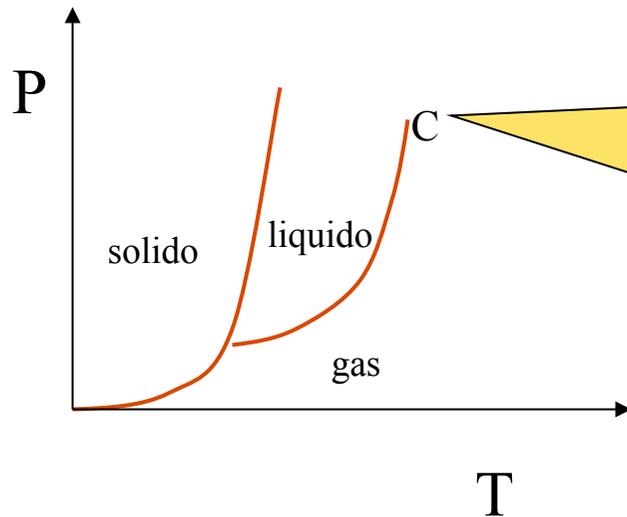
Le transizioni del primo ordine prevedono un calore latente

Transizioni al secondo ordine



In una transizione al secondo ordine la derivata prima dell'energia libera è continua, ma non derivabile. Ad esempio il calore specifico a volume costante è legato alla derivata prima dell'energia ed è discontinuo

Punto critico



Al di sopra del punto critico
si ha un passaggio tra le
fasi senza discontinuità
delle derivate dell'energia libera
→ crossover

I calcoli di QCD su reticolo hanno anche lo scopo di valutare che tipo di transizione avvenga. Le attuali indicazioni sono per un crossover a basso potenziale chimico barionico ed alta temperatura

