

QCD su reticolo

- Le considerazioni basate sul modello a sacca portano a conclusioni di massima sul QGP
- Per arrivare a valutazioni quantitative occorre utilizzare la cromodinamica quantistica
- Visto che si devono studiare interazioni tra quark e gluoni su larga scala, non è possibile trattare la QCD perturbativamente
- La *teoria di gauge su reticolo* è un approccio non perturbativo alla QCD basato su una discretizzazione delle coordinate spazio temporali → **reticolo** (*lattice QCD in inglese*)

QCD su reticolo: vantaggi

- Nell'approccio perturbativo, ci si trova a valutare integrali sul momento che divergono per $p \rightarrow \infty$ (*divergenza ultraviolette*: alto momento = alta frequenza = piccole distanze)
- Queste divergenze sono trattate, per ciascun ordine dello sviluppo perturbativo, con una procedura di rinormalizzazione
- In QCD su reticolo non si hanno divergenze ultraviolette perché è il passo stesso del reticolo che definisce la distanza minima da considerare e quindi un valore di cut-off per la scala di momento
- La funzione di partizione su reticolo può essere scritta (con una trasformazione $t \rightarrow -it$) come integrale di cammino (*path integral*) valutabile numericamente

QCD su reticolo: svantaggi

- La tecnica è molto onerosa in termini di risorse di calcolo richieste
- Questo pone dei limiti al passo minimo del reticolo raggiungibile
- La QCD su reticolo è una disciplina complessa ed in evoluzione:
 - Inizialmente le valutazioni erano fatte in regime di “*pure gauge*”: i quark erano considerati come sorgenti statiche di campo di colore, fissate nel reticolo (equivalente ad assumere masse infinite)
 - Valutazioni con masse finite per i quark sono arrivate dopo
 - Ci sono problemi teorici (instabilità numeriche) che rendono difficile la valutazione di situazioni a potenziale chimico non nullo

Elaboratori dedicati

US/RBRC QCDOC

20.000.000.000.000 ops/sec



BI – apeNEXT

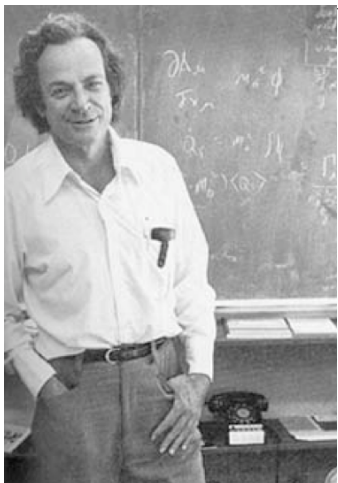
5.000.000.000.000 ops/sec



- critical temperature
- equation of state
- finite density QCD

Integrali di cammino / 1

- Costituiscono una generalizzazione del principio classico di minima azione alla meccanica quantistica
- Introdotti da R. Feynman nel 1948
- Consideriamo un sistema formato da una **particella singola** che abbia coordinate spazio-temporali iniziali e finali rispettivamente pari a (x_a, t_a) e (x_b, t_b)
 - Un cammino (*path*) può essere descritto specificando $x(t)$ tra t_a e t_b .
 - Per ogni possibile percorso, l'azione è definita come



$$S_M = \int_{t_a}^{t_b} dt L[x(t), \dot{x}(t)]$$

Dove L è la lagrangiana e M sta per Minkowski (i.e. uso della metrica $g_{\mu\nu}$)

Integrali di cammino / 2

- La traiettoria classica è quella per la quale l'azione è minima
- In meccanica quantistica tutti i cammini possibili contribuiscono all'ampiezza, che secondo il metodo proposto da Feynman vale

$$\text{Ampiezza } [(x_a, t_a) \rightarrow (x_b, t_b)] = \sum e^{iS_M}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i cammini possibili

- L'ampiezza è anche uguale a $\langle x_b | e^{-iH(t_b - t_a)} | x_a \rangle$ (H è l'operatore hamiltoniano del sistema)

$$\text{Ampiezza } [(x_a, t_a) \rightarrow (x_b, t_b)] = \langle x_b | e^{-iH(t_b - t_a)} | x_a \rangle$$

Integrali di cammino / 3

Quindi si ha che $\langle x_b | e^{-iH(t_b-t_a)} | x_a \rangle = \sum e^{iS_M}$

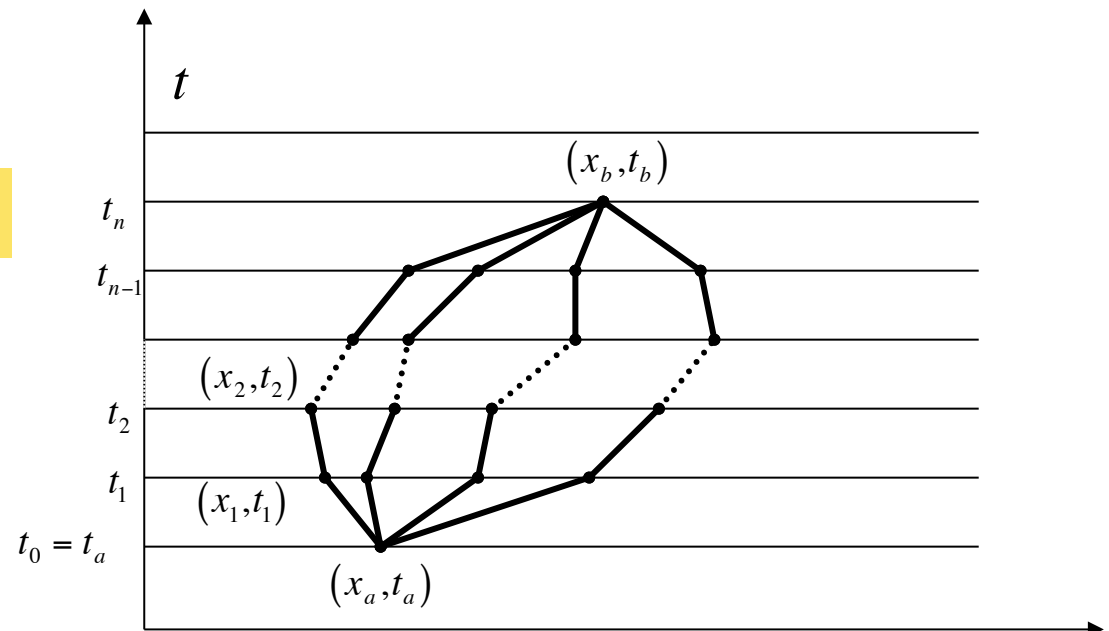
Per valutare la sommatoria a secondo membro, estesa a tutti i possibili cammini, si divide l'intervallo temporale t_b-t_a in n_t intervalli equispaziati.

L'insieme dei cammini che passa attraverso il tempo t_l può essere espresso come variazione di x_l : la somma di tutti i cammini a t_l può essere scritta come:

$$\left(\text{somma sui cammini a } t_l \right) \rightarrow \int dx_l e^{iS_M}$$

Se si considerano tutte le coordinate temporali intermedie:

$$\left(\text{somma sui cammini tra } (x_a, t_a) \text{ e } (x_b, t_b) \right) \rightarrow \int \prod_{i=1}^{n_t-1} dx_i e^{iS_M}$$



Integrali di cammino e funzione di partizione / 1

Quindi:
$$\langle x_b | e^{-iH(t_b - t_a)} | x_a \rangle = \int \prod_{i=1}^{n_t - 1} dx_i e^{iS_M(x_a, x_1, \dots, x_{n_t-1}, x_b)} \quad (1)$$

La funzione di partizione presenta un'analogia formale con la quantità a primo membro nella (1):

$$Z = \sum_{x_a} \langle x_a | e^{-\beta H} | x_a \rangle \quad \text{con } \beta = \frac{1}{T} \quad (2)$$



La costante di Boltzmann è inglobata nella definizione di temperatura, che è espressa in MeV o GeV

L'analogia c'è, ma con 3 importanti differenze:

1. L'esponente della (1) contiene l'unità immaginaria ed il termine $(t_b - t_a)$ in luogo di β
2. Nella (2) lo stato finale è a x_a , come quello iniziale
3. Nella (2) c'è una somma sugli stati x_a , che non c'è nella (1)

Integrali di cammino e funzione di partizione / 2

La funzione di partizione (2) può essere espressa come integrale di cammino con le seguenti posizioni:

1. Rotazione di Wick $t = -i\tau$ con $\tau_a = 0 \leq \tau \leq \tau_b = \beta$
2. Lo stato al tempo immaginario iniziale τ_a è x_a come quello a τ_b .
Questo implica una condizione di periodicità al contorno
 $x(\tau_b) = x(\tau_a)$
3. Visto che $\tau_0 = \tau_a$ e $\tau_{n_t} = \tau_b \Rightarrow x_a = x(\tau_{n_t})$ la funzione di partizione può essere scritta come

$$Z = \int dx_{n_t} \prod_{i=1}^{n_t-1} dx_i e^{iS_M|_{t=-i\tau}} = \int \prod_{i=1}^{n_t} dx_i e^{iS_M|_{t=-i\tau}}$$

Funzione di partizione e azione euclidea

Per effetto dell'uso del tempo immaginario, in luogo dell'azione di Minkowski si utilizza l'azione euclidea

$$iS_M = i \int_{t_a}^{t_b} dt L = i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right]$$

Lagrangiana di una particella singola in un potenziale V

$$iS_M \Big|_{t=-i\tau} = - \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \equiv -S_E$$

$$Z = \int \prod_{i=1}^{n_t} dx_i e^{-S_E} \equiv \int \mathcal{D}x e^{-S_E(x)}$$

Il simbolo \mathcal{D} rappresenta l'integrazione sulle variabili x_1, x_2, \dots, x_{n_t} per $n_t \rightarrow \infty$

Estensione ad un campo scalare

Quanto trovato per una particella singola può essere generalizzato ad un campo scalare e successivamente alla teoria di gauge della QCD.

Si trova per la funzione di partizione l'espressione

$$Z = \int \mathcal{D}\phi(x, \tau) e^{-S_E[\phi(x, \tau)]}$$

L'azione euclidea per un campo scalare può essere espressa in termini della densità di lagrangiana euclidea come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M[\phi(x, t), \partial_\mu \phi(x, t)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \quad \xrightarrow{\text{azione}} \quad S_M = \int dt dx \mathcal{L}_M[\phi(x, t), \partial_\mu \phi(x, t)] \\ iS_M \Big|_{t=-i\tau} &= \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau dx \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \right] = - \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right] \\ &= - \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau dx \left[\frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] \equiv -S_E = - \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau dx \mathcal{L}_E \end{aligned}$$

QCD su reticolo

- ✓ Lagrangiana di QCD
- ✓ Reticolo e variabili di link
- ✓ Azione e funzione di partizione (estensione alla QCD di quanto presentato nelle slide precedenti)
- ✓ Risultati

Lagrangiana di QCD / 1

- Si può associare ad ogni punto dello spazio-tempo un addizionale riferimento interno tridimensionale legato al colore
- La QCD è una teoria di gauge non abeliana → il gruppo di simmetria associato alla QCD nello spazio di colore non è commutativo
- Questo gruppo è lo speciale unitario in 3 dimensioni $SU(3)_C$. → una rotazione nello spazio di colore si realizza con una matrice unitaria 3×3
- La QCD è una teoria di gauge → la lagrangiana di QCD è invariante per una rotazione del sistema di riferimento di colore
- L'invarianza di gauge è locale → le rotazioni nei riferimenti di colore relativi a punti dello spazio-tempo possono essere diverse. Nel caso di un'invarianza globale dovrebbero essere uguali

Lagrangiana di QCD / 2

Costante di accoppiamento $\alpha_s = g^2/4\pi$

$$\mathcal{L}_M = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu}$$

Termine cinetico del campo fermionico + accoppiamento con campo di gauge (gluonico) A

Termine dipendente dal tensore del campo gluonico

$A_\mu = \frac{\lambda_i}{2} A_\mu^i \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8$ Il campo di gauge può essere espresso in termini degli 8 generatori del gruppo SU(3) - matrici di Gell-Mann

$$F_{\mu\nu} = \frac{\lambda_i}{2} F_{\mu\nu}^i = \frac{\lambda_i}{2} (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k)$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = if_{ijk} \frac{\lambda_k}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{123} = 1; \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Le costanti di struttura f_{ijk} sono completamente antisimmetriche per scambi di coppie di indici

Reticolo

✓ Reticolo spazio-temporale di dimensione $N_\sigma^3 \times N_\tau$, con la coordinata temporale immaginaria τ . $V = (N_\sigma a)^3$, $T^{-1} = N_\tau a$

✓ Indichiamo con n un punto sul reticolo

✓ I vettori tra n ed i punti adiacenti sono indicati con μ, ν, κ, \dots

✓ Una configurazione di campo consiste nel determinare i campi fermionici (quark) e di gauge (gluoni) ad ogni punto del reticolo

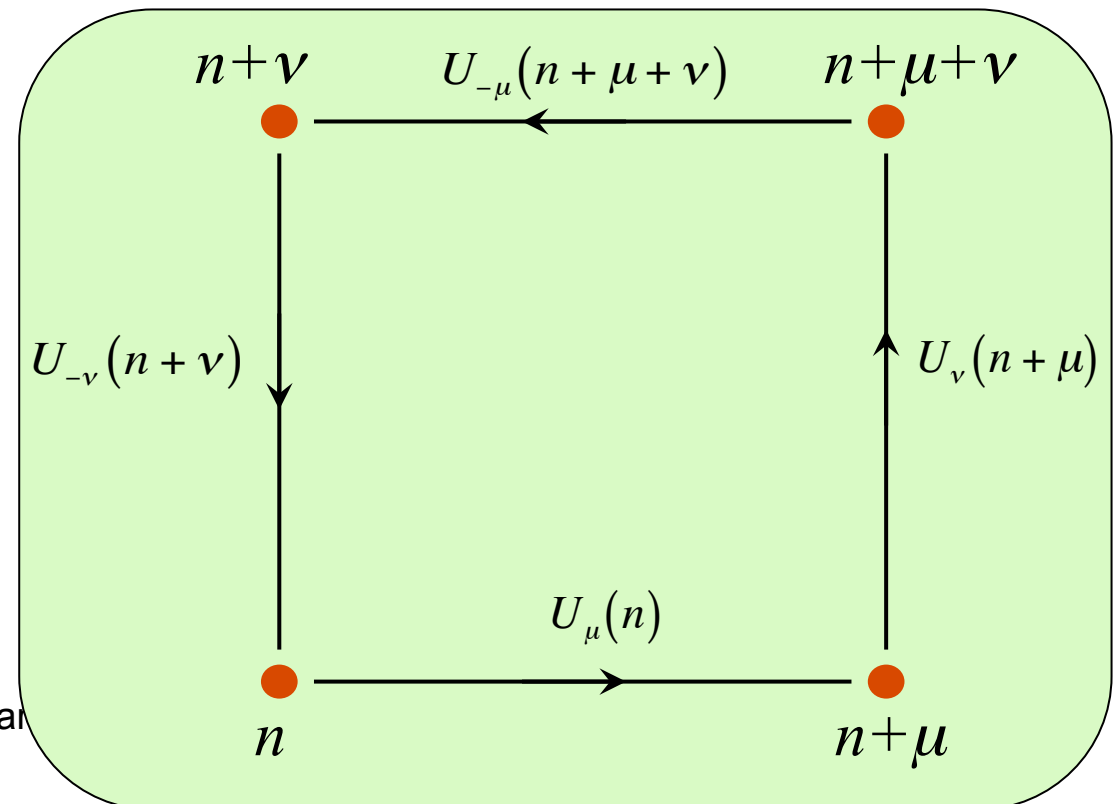
In luogo delle componenti del campo di gauge, si usano le variabili di link $U_\mu(n)$:

- Sono elementi di SU(3)
- Specificano il link tra due punti del reticolo
- L'azione euclidea ha espressione relativamente semplice in termini di U

$$U_\mu(n) = P \exp \left\{ ig \int_n^{n+\mu} A_\mu(x) dx^\mu \right\} \quad (\text{non c'è somma su } \mu)$$

P sta per "path ordering"

clear



Azione

Un quadrato elementare sul reticolo formato da 4 link che uniscono secondo un percorso chiuso punti contigui del reticolo come illustrato nella pagina precedente è detto *placchetta*: Il prodotto ordinato delle variabili di link su una placchetta è

$$P_{\square}(n, \mu\nu) = U_{-\nu}(n + \nu)U_{-\mu}(n + \mu + \nu)U_{\nu}(n + \mu)U_{\mu}(n)$$

Si può dimostrare che l'azione euclidea relativa alla parte di puro gauge della lagrangiana di QCD è legata a $P_{\square}(n, \mu\nu)$ dalla relazione

$$(S_E)_G = \int d\tau d^3x \mathcal{L}_{EG} = \frac{1}{4} \int d\tau d^3x \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} = -\frac{1}{2g} \sum_{n, \mu\nu} 2\text{Tr}\{P_{\square}(n, \mu\nu)\}$$

Con questa formulazione dell'azione si possono studiare problemi nel limite di quark fermi (*pure gauge calculations*). La parte di azione relativa alla componente fermionica può essere formulata in modo analogo in termini delle variabili di link, ma la trattazione numerica con potenziale chimico non nullo presenta problemi non completamente risolti (cfr *F. Karsch BI/TP 2001/10*)

Funzione di partizione

A partire dall'azione euclidea, si può valutare la funzione di partizione generalizzando il metodo illustrato precedentemente

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}U e^{-S_E} \quad \text{per } 0 \leq \tau \leq \beta$$

La valutazione della funzione di partizione viene effettuata calcolando l'integrale di cammino per mezzo di tecniche Monte Carlo (importance sampling). Dalla funzione di partizione si risale all'energia libera e ad altre grandezze termodinamiche.

Le variabili di link consentono comunque di costruire dei “parametri d'ordine” sensibili a determinati processi e più direttamente accessibili al calcolo su reticolo, come il Polyakov loop come parametro sensibile alla transizione di fase.

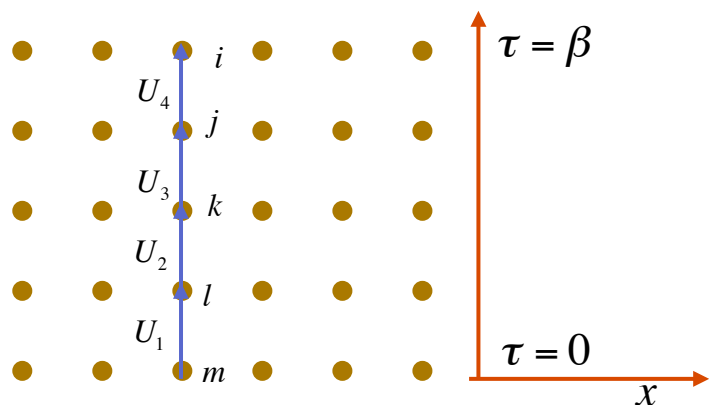
	Minkowski space	Euclidean space	Relation
Coordinates (x^0, x^1, x^2, x^3)	(t, x, y, z)	(τ, x, y, z)	$t = -i\tau$
Volume element d^4x	$dt dx dy dz$	$d\tau dx dy dz$	$dt = -id\tau$
Line element ds^2	$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$	$\delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$	
Metric tensor	$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Derivatives ∂_μ	$(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$	$(\partial_\tau, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$	$\partial_t = i\partial_\tau$
Gauge field (A_0, A_1, A_2, A_3)	(A_t, A_x, A_y, A_z)	(A_τ, A_x, A_y, A_z)	$A_t = iA_\tau$
Gamma matrices γ^μ	$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$	$\gamma_E^0, \gamma_E^1, \gamma_E^2, \gamma_E^3$ $\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$	$\gamma^0 = \gamma_E^0$ $\gamma^j = i\gamma_E^j$ $j=1,2,3$
Action (in continuum limit)	$S_M = \int dt dx \mathcal{L}_M$	$S_E = \int d\tau dx \mathcal{L}_E$	$iS_M = -S_E$ $\mathcal{L}_M = -\mathcal{L}_E$
Lagrangian (scalar field)	$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}[(\partial_t \phi)^2 - \nabla \phi ^2] - V(\phi)$	$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}[(\partial_\tau \phi)^2 + \nabla \phi ^2] + V(\phi)$	$\mathcal{L}_M = -\mathcal{L}_E$

Variabili espresse
nello spazio di
Minkowski e in
quello euclideo

Risultati/1

- ✓ Calcoli in regime *pure gauge* e 2 flavour.
- ✓ La transizione di fase è prevista essere del primo ordine
- ✓ Parametro d'ordine: Polyakov loop

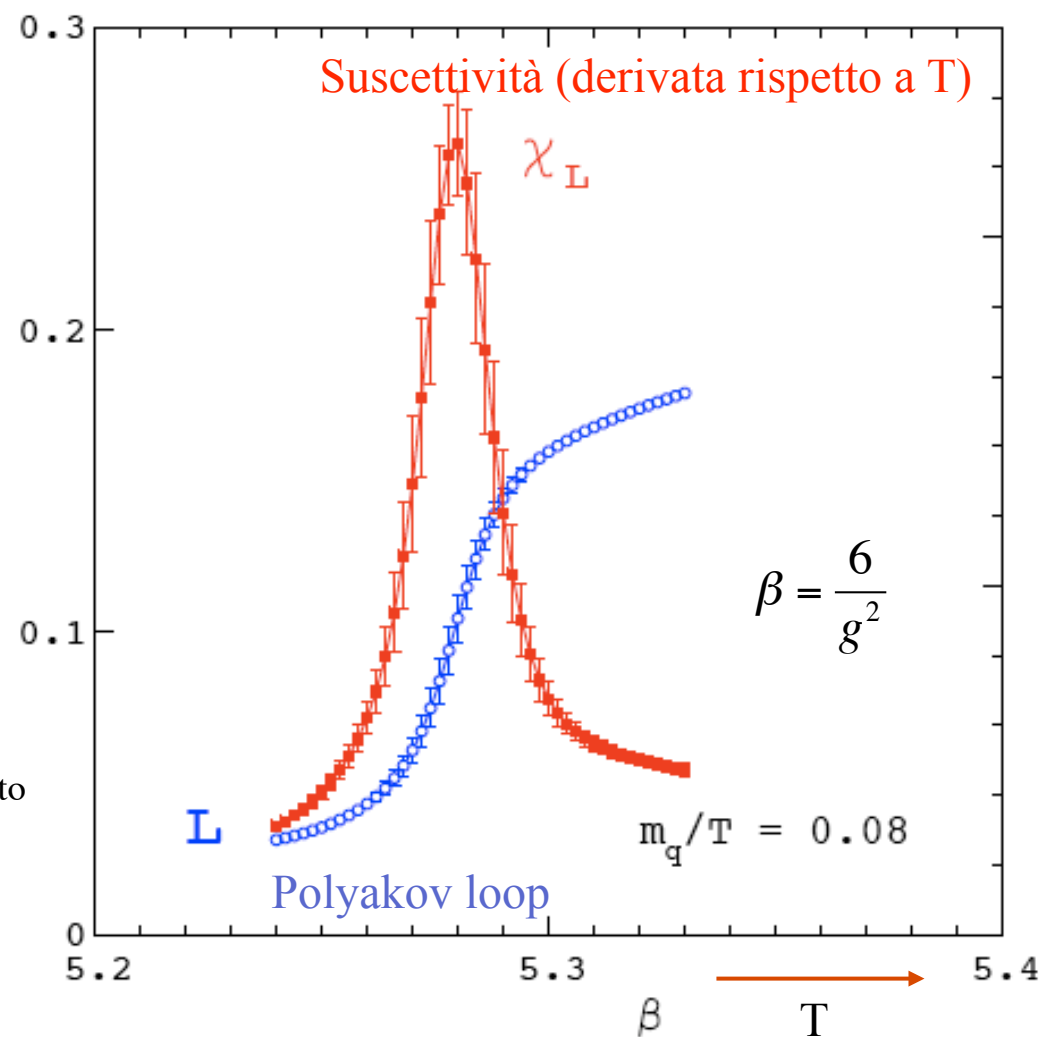
$$L(\vec{x}) = \text{Tr}\{U_4 U_3 U_2 U_1\}$$



$$\langle L(\vec{x}) \rangle = \exp\left[-\frac{\Delta F(\vec{x})}{T}\right] \Rightarrow \begin{cases} \langle L \rangle = 0 & \Rightarrow \text{confinamento} \\ \langle L \rangle \neq 0 & \Rightarrow \text{deconfinamento} \end{cases}$$

ΔF è la variazione di energia libera quando si aggiunge al sistema un quark nel punto x

Fisica Nucleare



Risultati/2

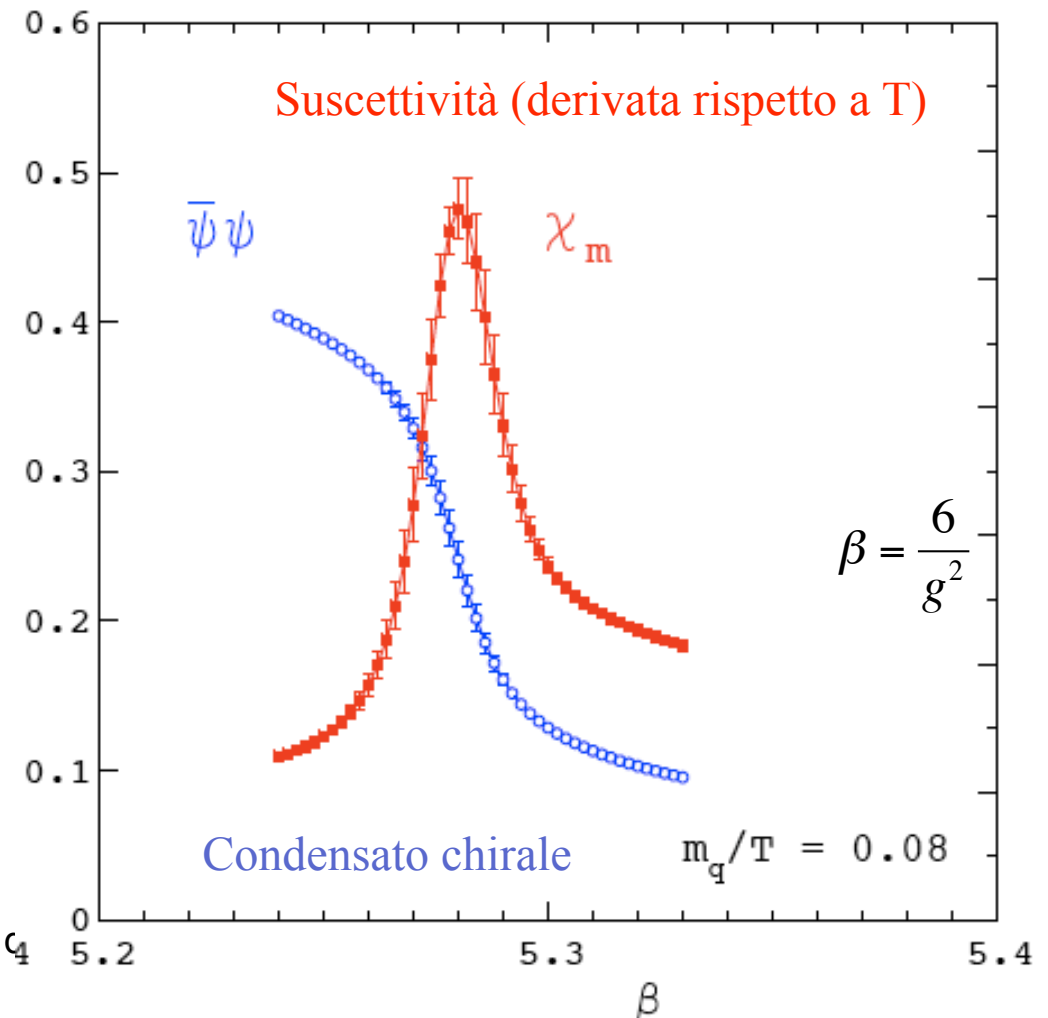
✓ La transizione di fase è accompagnata da una transizione chirale (recupero della simmetria chirale)

✓ Il parametro d'ordine per questa transizione è il chiral condensate $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$

✓ Si può infatti dimostrare che la differenza tra massa efficace e massa nuda del quark è

$$|m_{eff} - m_0| \propto \langle \bar{\psi}\psi \rangle$$

✓ Il ripristino della simmetria chirale si ha quando il condensato chirale tende a zero



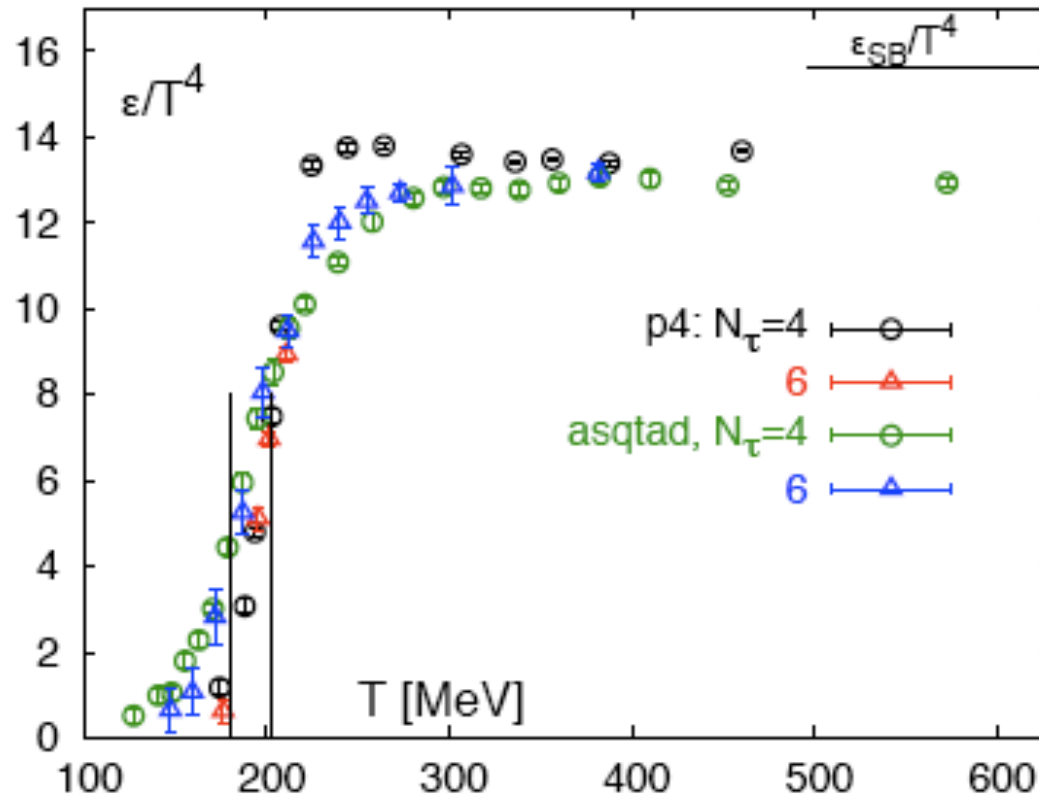
Simmetria chirale

- Nel limite di masse dei quark nulle la lagrangiana di QCD gode della simmetria per trasformazioni del tipo

$$\Lambda_A: \psi \rightarrow e^{-i\gamma^5 \frac{\lambda_a \theta^a}{2}} \psi \quad \text{con} \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

- Questa simmetria ($SU_A(n_f)$) non è realizzata in natura
- Quando una simmetria è posseduta dalla lagrangiana ma non dallo stato fondamentale si dice che è spontaneamente rotta
- Il fatto che gli 8 mesoni pseudoscalari abbiano masse molto minori (in particolare i pioni) degli altri adroni suggerisce che possano essere visti come gli 8 bosoni di Goldstone associati alla rottura della simmetria chirale
- Il fatto che le masse di questi mesoni siano piccole ma non nulle indica che la simmetria chirale è una simmetria parziale della lagrangiana: le masse dei quark non sono nulle
- I calcoli di QCD su reticolo indicano che la simmetria chirale potrebbe ripristinarsi in condizioni di alta temperatura/densità di energia

Risultati / 3



Il limite di gas ideale non viene raggiunto neanche ad alta temperatura

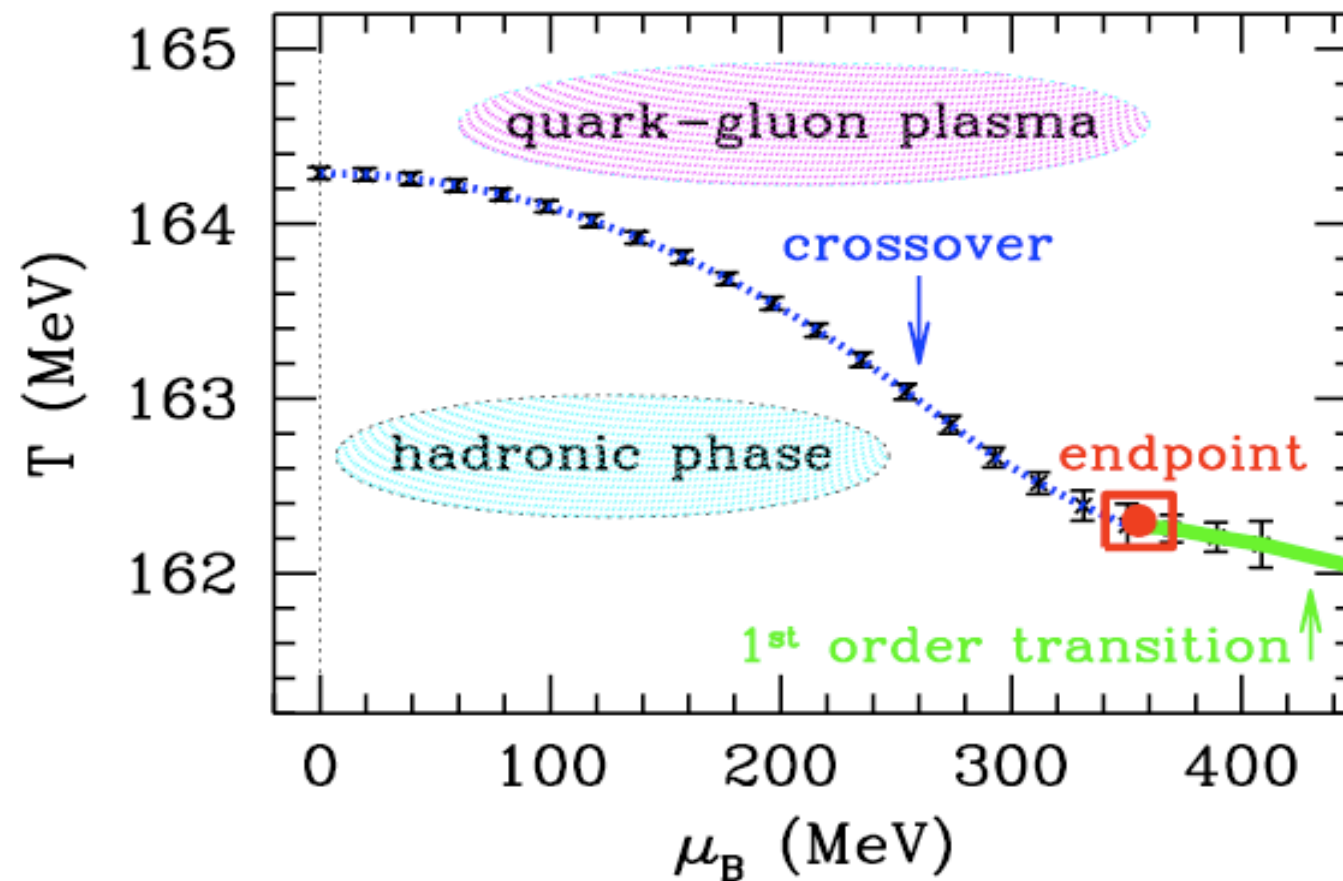
F. Karsch
QM2006
Ottobre 2006

band marks $T = (192 \pm 11)$ MeV
RBC-Bielefeld, preliminary

Risultati / 5

The order of the transition depends on μ .

Recent results from Lattice [Fodor *et al* (2004)]



Critical point: crossover/first order phase transition

Situazione attuale

L'attività di ricerca nel'ambito della QCD su reticolo è in corso e non tutte le difficoltà legate a previsioni a potenziale chimico non nullo sono state risolte. Queste sono le conclusioni della comunicazione di F. Karsch a Quark Matter 2006

- We studied the thermodynamics of QCD with a realistic quark mass spectrum and performed extrapolations to the physical point
- using an improved staggered fermion action (p4fat3) we find from an analysis at 2 different lattice spacings and for several values of the quark mass consistent crossover temperatures from several observables
- At the physical point of (2+1)-flavor QCD we obtain the continuum extrapolated value:

$$T_c = 192(7)(4)\text{MeV}$$

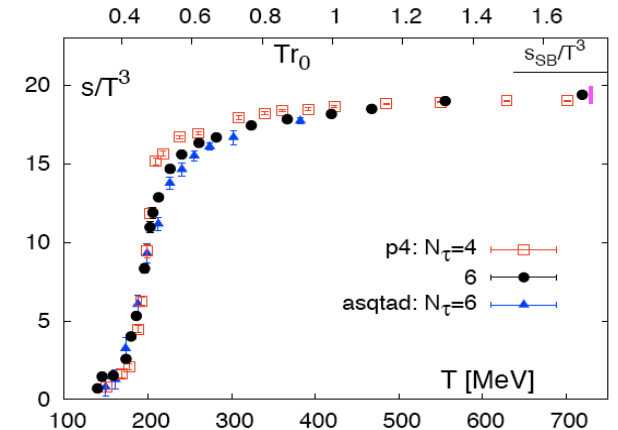
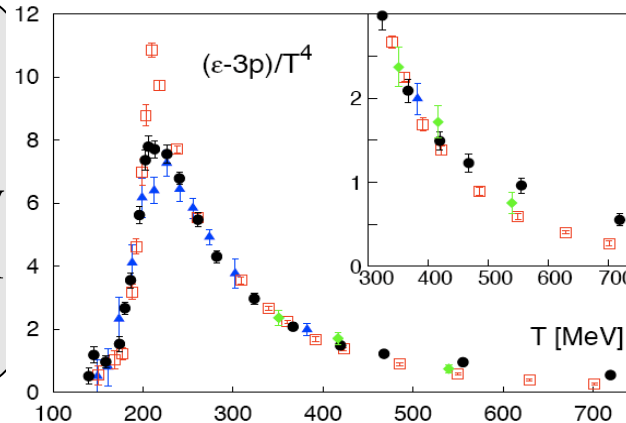
- the analysis of ϵ/T^4 shows a rapid crossover at this temperature;

Quark Matter 2008

- Deviation from Ideal gas EOS:

$$\varepsilon=3p \rightarrow (\varepsilon-3p)/T^4 \text{ vs } T$$

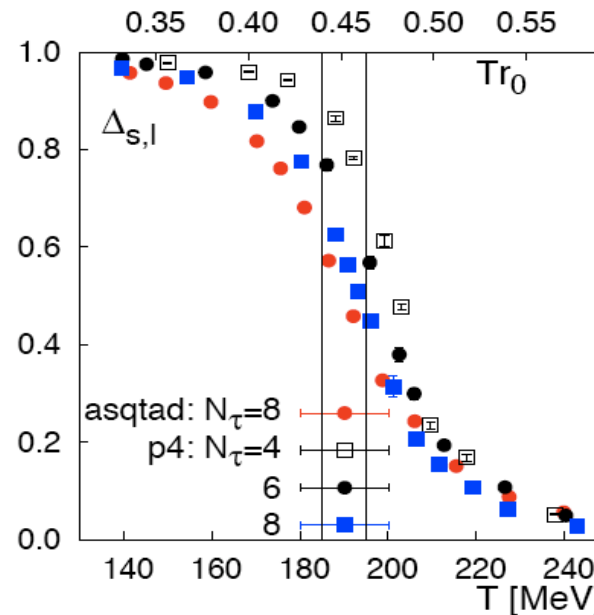
- Ideal limit not reached even at very high T \rightarrow residual interactions still present



- Different approaches show consistent results.

$$T_c \cong 185-195 \text{ MeV}$$

- chiral transition at approximately the same temperature
 - $\varepsilon \cong 1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$
- At $\mu=0$ a *cross-over* from hadronic to deconfined matter



$$\Delta_{l,s}(T) = \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{l,T} - \frac{m_l}{m_s} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{s,T}}{\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{l,0} - \frac{m_l}{m_s} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{s,0}}$$

Sudden change in ratio between finite and zero temperature chiral condensate reflects chiral symmetry restoration