

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.
DIPARTIMENTO DI FISICA “G. GALILEI”

TESI DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

LE DISEGUAGLIANZE DI BELL

Relatore: Prof. Mario Tonin

Laureando: Riccardo Nicoletti

ANNO ACCADEMICO 2004/2005

PADOVA MMV

Indice

1	Introduzione	2
2	Teorie a variabili nascoste	2
2.1	Le teorie a variabili nascoste	2
2.2	Stati puri e miscele quantistiche	3
2.3	La “non-separabilità” quantistica	5
2.4	L’articolo di Einstein-Podolsky-Rosen	7
2.5	Esperimento concettuale di Bohm ed Aharonov	8
3	Le diseguaglianze di Bell	9
3.1	Dimostrazione del Teorema di Bell	9
3.2	Confronto col risultato quantomeccanico	11
3.3	Conflitto con la Meccanica Quantistica	11
3.4	Estensione del Teorema di Bell	11
4	Verifiche sperimentali e conclusioni	13
4.1	Gli esperimenti di Aspect e collaboratori (1981-82)	13
4.1.1	Esperimento con polarizzatori ad un canale	14
4.1.2	Esperimento con polarizzatori a due canali	15
4.2	Conclusioni	15

1 Introduzione

L’interpretazione della Meccanica Quantistica è resa concettualmente difficoltosa dal suo indeterminismo.

Un tentativo per costruire una teoria che fosse deterministica, pur portando alle predizioni quantomeccaniche per esperimenti realizzabili, fu avviato da un articolo del 1935 in cui Einstein, Podolsky e Rosen dimostrarono che la MQ non può simultaneamente soddisfare a tre criteri: di realtà, di località e di completezza. Una possibile soluzione sembra essere l’ipotesi che esistano dei gradi di libertà addizionali rispetto a quelli considerati dalla MQ, i quali consentano di renderla deterministica. Ma, nel 1964, J. S. Bell dimostrò che, per teorie con tali parametri addizionali soddisfacenti al criterio di località, sussistono delle diseguaglianze le quali, in generale, sono violate dalla Meccanica Quantistica. Attraverso delle verifiche sperimentali, in particolare quelle effettuate da Aspect e collaboratori negli anni 1981-82, si è infine provato che tali diseguaglianze sono violate, secondo la predizione della MQ.

2 Teorie a variabili nascoste e “non-separabilità” quantistica

2.1 Le teorie a variabili nascoste

Contrariamente alla fisica classica che, date le condizioni del moto ad un certo istante, di un sistema *determina* l’evoluzione, la Meccanica Quantistica fornisce univocamente la *probabilità* associata al risultato di una misura effettuata su un sistema fisico. Analogamente a quanto avvenuto con la Meccanica Statistica di Boltzmann, che riuscì a fornire un modello microscopico per la termodinamica, parallelamente ai primi sviluppi della teoria quantistica si tentò, tenendo conto del successo della MQ nella descrizione della realtà su scala atomica (e subatomica), di superarne l’indeterminismo con teorie a “variabili nascoste”. Le proprietà da attribuire ad una qualunque di queste teorie sono:

1. esiste una famiglia di parametri¹, denotata con λ , la cui conoscenza permette di prevedere in modo deterministico l'evoluzione del sistema;
2. le variabili nascoste hanno una distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$ (che deve riprodurre i risultati quantomeccanici);
3. esiste una regola che stabilisce la corrispondenza tra il valore assunto dalle variabili nascoste ed il valore di ogni osservabile misurata;
4. esiste una regola che stabilisce la distribuzione statistica di λ dopo ogni misura.

La possibilità di costruire un “completamento” deterministico della Meccanica Quantistica attraverso l'attribuzione di gradi di libertà addizionali trovò le sue difficoltà in quelle caratteristiche della MQ che ne avevano consentito lo sviluppo, che possono essere viste come conseguenza della “non-separabilità” quantistica. Ma, prima di discutere questo concetto, è necessario introdurre le nozioni di stato puro e di miscela, che permettono di caratterizzare il Postulato della riduzione del pacchetto d'onde.

2.2 Stati puri e miscele quantistiche

Definizione 1 (Stato puro) *Un insieme \mathcal{E} di sistemi quantistici identici si dice in uno stato puro se tutti i sistemi ad esso appartenenti sono descritti dallo stesso vettore di stato*

$$|\psi\rangle = \sum_m c_m |\psi_m\rangle. \quad (1)$$

Definizione 2 (Miscela quantistica) *Un insieme \mathcal{E} di sistemi quantistici identici si dice in una miscela quantistica se è separabile in sottosistemi \mathcal{E}_n , ciascuno descritto da una funzione d'onda $|\psi_n\rangle$ in una frazione $p_n = |c_n|^2$.*

Stati puri e miscele presentano, in generale, comportamenti diversi per i risultati delle misurazioni. Considerando i nostri scopi, ci limiteremo a discutere due esempi rilevanti e facilmente generalizzabili².

SISTEMI SEMPLICI. Sia S un sistema quantistico descritto dallo spazio di Hilbert \mathcal{H} , che supponiamo per semplicità bidimensionale. Sia $\{|e_i\rangle\}$ una base canonica di \mathcal{H} , tale che $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$. Consideriamo poi due insiemi. Sia \mathcal{E}_p l'insieme (stato puro) costituito da sistemi descritti dallo stato

$$|\psi\rangle = c_1 |e_1\rangle + c_2 |e_2\rangle \quad (2)$$

con $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, $c_1, c_2 \neq 0$. Sia \mathcal{E}_m l'insieme (miscela) costituito da sistemi descritti dallo stato

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |e_1\rangle & p_1 &= |c_1|^2 \\ |\psi_2\rangle &= |e_2\rangle & p_2 &= |c_2|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

dove p_j rappresenta le frazioni di stati di quel tipo.

Sia A un'osservabile del sistema S , con $A|a_k\rangle = a_k|a_k\rangle$ e con gli autokets $|a_k\rangle$ ortonormalizzati. Vogliamo calcolare le distribuzioni di probabilità relative ad una misurazione di A effettuata su \mathcal{E}_p e su \mathcal{E}_m .

¹Non si fanno particolari ipotesi sulla natura delle variabili nascoste, in particolare possono essere delle variabili sia discrete, sia continue. Per semplicità di notazione si considereranno sempre, salvo indicare espressamente il contrario, come una classe di variabili continue.

²per una trattazione dettagliata vedi [7], capitoli VI e VII.

La probabilità di ottenere l'autovalore a_i come risultato di una misura effettuata su \mathcal{E}_p è:

$$\begin{aligned} P_p(a_i) &= \left\| |a_i\rangle \langle a_i | \psi \rangle \right\|^2 = \left\| \sum_j c_j \langle a_i | e_j \rangle |a_i\rangle \right\|^2 = \\ &= \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | e_j \rangle|^2 + \sum_{j \neq k} c_k^* c_j \langle e_k | a_i \rangle \langle a_i | e_j \rangle, \end{aligned}$$

ed analogamente per \mathcal{E}_m si ha:

$$P_m(a_i) = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | e_j \rangle|^2$$

da cui

$$P_p(a_i) - P_m(a_i) = \sum_{j \neq k} c_k^* c_j \langle e_k | a_i \rangle \langle a_i | e_j \rangle. \quad (4)$$

Osservazioni. L'eq. (4) mostra che la differenza nelle distribuzioni di probabilità tra stato puro e miscela dipende dai termini non diagonali. Questo perché la probabilità di miscela non contiene i termini interferenziali caratteristici dello stato puro. Se l'osservabile A è diagonale sulla base canonica, però, si annullano tutti gli addendi della sommatoria (4), dunque $P_p(a_i) - P_m(a_i) = 0$. In conclusione, nel caso di un sistema quantistico semplice, se si sceglie una base tale che l'osservabile A non sia diagonale, allora *stato puro e miscela sono distinguibili* per misurazioni di A .

SISTEMI COMPOSTI. Sia ora S composto da due sottosistemi, $S = U + V$. Allora lo spazio di Hilbert associato ad S è $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(U)} \otimes \mathcal{H}^{(V)}$. Supponiamo che sia $\dim \mathcal{H}^{(U)} = \dim \mathcal{H}^{(V)} = 2$, con basi ortonormali $\{|\alpha\rangle\}$ e $\{|\beta\rangle\}$ per $\mathcal{H}^{(U)}$ e $\mathcal{H}^{(V)}$ rispettivamente. Sia \mathcal{E}_p l'insieme (stato puro) costituito da sistemi descritti dallo stato

$$|\psi\rangle = c_1 |\alpha_1\rangle \otimes |\beta_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle \otimes |\beta_2\rangle \quad (5)$$

con $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, $c_1, c_2 \neq 0$. Sia \mathcal{E}_m la miscela corrispondente ad \mathcal{E}_p

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |\alpha_1\rangle \otimes |\beta_1\rangle & p_1 &= |c_1|^2, \\ |\psi_2\rangle &= |\alpha_2\rangle \otimes |\beta_2\rangle & p_2 &= |c_2|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Vogliamo calcolare le distribuzioni di probabilità sia per misurazioni di osservabili relative ad un solo componente, sia per misurazioni di osservabili relative a tutto il sistema S .

Osservabili di un solo componente. Sia $A^{(U)}$ una osservabile relativa al sottosistema U di S . La probabilità di ottenere l'autovalore a_i nel caso di stato puro è

$$P_p(a_i) = \left\| \left(|a_i\rangle \langle a_i | \otimes \mathbb{I}^{(V)} \right) |\psi\rangle \right\|^2 = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | \alpha_j \rangle|^2$$

e nel caso di miscela

$$P_m(a_i) = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | \alpha_j \rangle|^2$$

dunque

$$P_p(a_i) - P_m(a_i) = 0 \quad (7)$$

ossia, per misurazioni effettuate su un solo componente di un sistema composto, stati puri e miscele sono *indistinguibili*, poiché forniscono le stesse distribuzioni di probabilità.

Osservabili di tutto il sistema. Consideriamo una osservabile del sistema globale $S = U + V$, ad esempio la correlazione tra $A^{(U)}$ relativa al sottosistema U e $B^{(V)}$ relativa a V , ossia $\Omega = A^{(U)} \otimes B^{(V)}$. La probabilità che una misurazione effettuata su \mathcal{E}_p fornisca la coppia di autovalori a_i e b_j vale:

$$\begin{aligned} P_p(a_i, b_j) &= \|(|a_i\rangle \langle a_i| \otimes |b_j\rangle \langle b_j|) |\psi\rangle\|^2 = \\ &= \sum_k |c_k|^2 |\langle a_i | \alpha_k \rangle|^2 |\langle b_j | \beta_k \rangle|^2 + \\ &+ \sum_{k \neq m} c_m^* c_k \langle \alpha_m | a_i \rangle \langle a_i | \alpha_k \rangle \langle \beta_m | b_j \rangle \langle b_j | \beta_k \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

e nel caso di misura su \mathcal{E}_m

$$P_m(a_i, b_j) = \sum_k |c_k|^2 |\langle a_i | \alpha_k \rangle|^2 |\langle b_j | \beta_k \rangle|^2 \quad (9)$$

dunque

$$P_p(a_i, b_j) - P_m(a_i, b_j) = \sum_{k \neq m} c_m^* c_k \langle \alpha_m | a_i \rangle \langle a_i | \alpha_k \rangle \langle \beta_m | b_j \rangle \langle b_j | \beta_k \rangle. \quad (10)$$

Analogamente a quanto avviene in (4) per sistemi semplici, in (10) la differenza nelle probabilità di stato puro e di miscela è legata ai termini fuori diagonale. In questo caso, però, è necessario che *entrambe* le osservabili $A^{(U)}$ e $B^{(V)}$ siano non diagonali nelle basi canoniche scelte, affinché stato puro e miscela siano *distinguibili*.

IL POSTULATO DELLA RIDUZIONE DEL PACCHETTO D'ONDE.

L'importanza delle nozioni di stato puro e miscela quantistica è legata al processo di misura in MQ:

Postulato 1 (Riduzione del pacchetto d'onde) *Sia \mathcal{E}_0 un insieme di sistemi S . Immediatamente dopo che si sono compiute delle misure simultanee (ideali) per un insieme completo di osservabili che sono proprie dei sistemi S , ogni sottoinsieme \mathcal{E} di \mathcal{E}_0 , che sia composto di sistemi S per i quali le misure hanno dato gli stessi insiemi di risultati, può essere descritto mediante un ket. Questo ket è allora necessariamente un autoket corrispondente agli autovalori che si sono trovati come risultati delle misure.*

2.3 La “non-separabilità” quantistica

Siccome l'equazione di Schrödinger

$$H|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \quad (11)$$

è un'equazione differenziale lineare (del primo ordine), allora vale il principio di sovrapposizione: se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono due soluzioni di (11), allora lo è pure $|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$, con $a, b \in \mathbb{C}$. Vediamo come questo porti alla non-separabilità quantistica.

Siano U e V due ensemble di sistemi; siano A e B due osservabili di U e V rispettivamente. Siano inoltre $\{|a_n\rangle\}$ e $\{|b_n\rangle\}$ le autofunzioni di A e B

ortonormalizzate. Supponiamo che lo stato iniziale dell'insieme U sia $|a_i\rangle \in \mathcal{H}^{(U)}$ e che quello di V sia $|b_0\rangle \in \mathcal{H}^{(V)}$; supponiamo inoltre che l'interazione tra i sistemi di U e di V sia tale che lo stato di U resti invariato, mentre quello di V diventi un autostato $|b_i\rangle$ di B corrispondente all'autostato $|a_i\rangle$ di A in cui si trovava il sistema U prima dell'interazione:

$$|a_i\rangle \otimes |b_0\rangle \rightarrow |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle . \quad (12)$$

ove sia lo stato iniziale sia quello finale appartengono ad $\mathcal{H}^{(U)} \otimes \mathcal{H}^{(V)}$. L'interazione tra i due sistemi, in questo caso, ha come effetto quello di cambiare il valore dell'osservabile B relativa ai sistemi di V , senza modificare il valore di A .

Sia A' un'altra osservabile relativa ad U tale che $[A, A'] \neq 0$. Supponiamo allora che lo stato iniziale dei sistemi di U sia un autostato di A' , $|a'_i\rangle$, anch'esso normalizzato. Siccome le due osservabili A ed A' non sono compatibili, allora³ non esiste un sistema completo di autovettori comuni. Possiamo però sviluppare sulla base degli autostati di A , sfruttando la relazione di completezza $\sum_k |a_k\rangle \langle a_k| = 1$, ottenendo

$$|a'_i\rangle = \sum_k |a_k\rangle \langle a_k|a'_i\rangle = \sum_k c_{ik}|a_k\rangle . \quad (13)$$

L'interazione tra U e V del tipo (12) a partire da $|a'_i\rangle \in \mathcal{H}^{(U)}$ e da $|b_0\rangle \in \mathcal{H}^{(V)}$ si scrive:

$$|a'_i\rangle \otimes |b_0\rangle \rightarrow \sum_k c_{ik}|a_k\rangle \otimes |b_k\rangle \quad (14)$$

che, diversamente dalla (12), rappresenta l'evoluzione da uno stato *fattorizzato* di $U + V$ ad uno stato finale *non fattorizzato*, combinazione lineare di stati fattorizzati. Dunque non è possibile attribuire ai sottosistemi componenti né un vettore di stato, né valori definiti delle osservabili, anche quando essi non siano più interagenti. Questa situazione è detta "non-separabilità" quantistica o "entanglement".

Analizziamo due casi in cui la "non-separabilità" quantistica porta a conclusioni apparentemente paradossali.

U MICROSCOPICO, V MACROSCOPICO. Siano U un ensemble di sistemi microscopici e V un ensemble di sistemi macroscopici, ad esempio U sia una particella e V uno strumento di misura per una osservabile A di U . In questo caso lo stato finale di (14) $\sum_k c_{ik}|a_k\rangle \otimes |b_k\rangle$ è una sovrapposizione di stati *macroscopici* dello strumento di misura $|b_k\rangle$ corrispondenti a valori dello spettro di A .

U, V MICROSCOPICI. Si ritiene comunemente che oggetti sufficientemente lontani interagiscano arbitrariamente poco. *Se U e V sono due oggetti "non interagenti", come è possibile che ciascuno di essi non sia in un ben preciso stato?* Infatti, se si misura A , osservabile relativa al sistema U , ottenendo il risultato a_j , il postulato di riduzione del pacchetto prescrive che lo stato del sistema complessivo $U + V$ si trasformi nello stato:

$$\sum_k c_{ik}|a_k\rangle \otimes |b_k\rangle \rightarrow |a_j\rangle \otimes |b_j\rangle ,$$

cioè *una misura eseguita su U influenza il sistema V a distanze arbitrarie* per il solo fatto che per un certo tempo U e V hanno interagito.

In conclusione se due sistemi quantistici di proprietà definite interagiscono per un tempo finito, non è più possibile, dopo l'interazione, pensare che ciascuno possieda ancora un insieme completo di proprietà definite⁴.

³se $\mathcal{D}(A) \subseteq A'(\mathcal{D}(A'))$ e $\mathcal{D}(A') \subseteq A(\mathcal{D}(A))$, ove $\mathcal{D}(A)$ indica il dominio dell'operatore A .

⁴per una discussione più ampia della non-separabilità quantistica si veda [7], parte terza.

2.4 L'articolo di Einstein-Podolsky-Rosen

In un celebre articolo pubblicato nel 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [1] dimostrarono, utilizzando le conseguenze della non-separabilità quantistica, l'incompatibilità delle seguenti tre condizioni:

1. Principio di realtà,
2. Principio di località,
3. Completezza della Meccanica Quantistica.

che furono definite nel modo seguente⁵:

Definizione 3 (Principio di realtà) *Se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo prevedere con certezza (cioè con probabilità unitaria) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa quantità fisica, cioè una proprietà indipendente da eventuali osservatori esterni.*

Definizione 4 (Principio di località) *Se un sistema fisico rimane per un certo tempo isolato da altri sistemi, allora l'evoluzione delle sue proprietà durante questo intervallo di tempo complessivo non può venire influenzato da operazioni eseguite su altri sistemi.*

Definizione 5 (Condizione di completezza) *Ogni elemento di realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica.*

Date queste definizioni, Einstein e collaboratori partirono dal fatto che, in MQ, se A e B sono due operatori non commutanti corrispondenti a due osservabili di un sistema, allora la precisa conoscenza di una di queste preclude la conoscenza dell'altra. Da questo dedussero che *o (a) la descrizione quantomeccanica della realtà data dalla funzione d'onda non è completa, oppure (b) quando gli operatori che corrispondono a due grandezze fisiche non commutano, le due grandezze non possono avere realtà simultanea*. Inoltre, considerando i due sistemi U e V interagenti tra $t = 0$ e $t = T$, la non-separabilità comporta che, come conseguenza della misurazione di due osservabili non commutanti operate su U al tempo $t > T$, il sistema V si trovi in stati descritti da due differenti funzioni d'onda. Siccome i due sistemi non interagiscono più, nessun cambiamento "reale" può però aver luogo su V come conseguenza di una qualunque operazione su U . Questo significa che è possibile assegnare due diverse funzioni d'onda alla stessa "realtà".

I tre autori proposero poi un paradosso, che può essere generalizzato come segue. Sia A un operatore relativo al sistema U e sia P un operatore relativo a V ; supponiamo inoltre che gli autostati di P siano strettamente correlati a quelli di A , in modo tale che la conoscenza dell'autostato di P in cui si trova U determini completamente l'autostato di A in cui si trova V ⁶. Supponiamo inoltre di conoscere le proprietà del sistema per $0 < t < T$. Se, a $t_1 > T$, si misura A per U , allora si può prevedere con certezza, e senza disturbare in alcun modo il sistema V , il valore della quantità P . Secondo la condizione di realtà, dunque, P è un elemento di realtà per V . Sia poi Q un operatore relativo a V incompatibile con P . Siccome $[P, Q] \neq 0$, allora V può essere descritto da due differenti funzioni d'onda, che possono essere autofunzioni relative a P e Q rispettivamente. Partendo dalla negazione di (a), che la funzione d'onda fornisca una descrizione completa della realtà, si è giunti alla negazione della

⁵cfr. anche [12] p. 30 e [7] pp. 113-114.

⁶ad esempio, nel decadimento di una particella a spin 0 in due particelle a spin 1/2 (come in $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$), $A = \sigma_z^{(U)}$ e $P = \sigma_z^{(V)}$.

sola alternativa (b), cioè che due grandezze fisiche non compatibili possano avere realtà simultanea. Se ne deve concludere che *la descrizione quantomeccanica della realtà fisica data dalle funzioni d'onda non è completa*.

La critica principale mossa agli autori fu rivolta al criterio di realtà utilizzato, che venne giudicato “essenzialmente ambiguo” da Bohr nell’articolo [2] poiché, secondo il punto di vista della complementarità, in ogni configurazione sperimentale atta a studiare le proprietà di fenomeni prettamente quantistici, non abbiamo solamente a che fare con l’ignoranza di certe quantità fisiche, ma con l’impossibilità di definire tali quantità in modo non ambiguo, perché la conoscenza di ognuna di queste viene limitata da quella dell’altra. Questo significa che la MQ è completa, dunque non sono necessarie teorie a variabili nascoste per completarla.

Tuttavia il paradosso EPR resta. Sono stati trovati due tipi generali di soluzione per questo problema.

In primo luogo, Bohr sostenne in [2] che l’apparato di misura *e* ciò che è osservato formino un sistema unico ed indivisibile che non possa essere analizzato correttamente a livello quantomeccanico in parti separate e distinte. La teoria quantistica, allora, non sarebbe nient’altro che uno strumento per calcolare la probabilità di ogni risultato osservabile che può provenire dall’interazione tra sistemi combinati in tutti i modi possibili con diversi apparati di misura per diverse entità da osservare. Secondo questa prospettiva, nessun paradosso del tipo EPR può sorgere, perché non ha senso chiedersi da dove provengano le correlazioni tra particelle (che hanno interagito per tempi finiti).

La seconda proposta, invece, suggerisce una esplorazione più profonda dell’intera teoria quantistica. In questo tipo di spiegazione, d’accordo con Bohr nel trattare il sistema come insieme di apparato sperimentale e ciò che è osservato, supponiamo di poter analizzare, almeno concettualmente, il sistema globale nelle sue componenti.

A sua volta, sono stati trovati due modi per far ciò.

Da una parte, D. Bohm propose in [3] la cosiddetta *interpretazione causale della MQ*. Questa teoria utilizza l’idea di una interazione nascosta ed istantanea tra particelle distanti, derivante da un “potenziale quantistico” che implica la possibilità di correlazione tra particelle distanti anche quando il loro potenziale classico è nullo. Questa situazione è chiaramente inconsistente, in generale, con la teoria della Relatività.

Dall’altra parte è stata sviluppata, invece, la possibilità di spiegare la MQ ad un livello “sub-quantomeccanico”: sono le teorie a variabili nascoste. Con queste teorie il paradosso può essere inteso in modo perfettamente razionale in termini di fluttuazioni di variabili addizionali che determinano, in linea di principio, il sistema.

2.5 Esperimento concettuale di Bohm ed Aharonov

Il paradosso EPR assume una forma particolarmente semplice se espresso in termini della correlazione tra spin di una coppia di particelle come suggerito da Bohm ed Aharonov in [4]. Si consideri una coppia U, V di particelle identiche di spin $1/2$ accoppiate in stato di singoletto. La funzione d’onda del sistema complessivo è allora

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle], \quad (15)$$

dove $|\pm\rangle$ sono gli autostati di spin lungo un asse z arbitrario, relativi rispettivamente ad U ed a V . Si separano poi le due particelle con un metodo che non influenzi lo spin totale. Dopo che le particelle si sono allontanate tanto da poter essere considerate come particelle non interagenti, si misura una qualunque

componente di spin della particella U . Allora, siccome lo spin totale è nullo, si può concludere che la stessa componente di spin della particella V è opposta a quella di U : gli spin delle due particelle sono correlati, dunque la misura di una qualunque componente dello spin di U permette di determinare la stessa componente di spin di V , senza interazione dell'apparato di misura con V e senza alcuna interazione tra U e V .

Osserviamo un altro aspetto del paradosso EPR. Utilizzando le notazioni introdotte per la discussione su stati puri e miscele di sistemi composti, l'eq. (15) rappresenta lo stato puro \mathcal{E}_p (5) con

$$\begin{array}{l} |\alpha_1\rangle = |+\rangle \\ |\alpha_2\rangle = |-\rangle \end{array} \left| \begin{array}{l} |\beta_1\rangle = |-\rangle \\ |\beta_2\rangle = |+\rangle \end{array} \right. \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}. \quad (16)$$

La miscela corrispondente \mathcal{E}_m è:

$$\begin{array}{l} |\alpha_1\rangle \otimes |\beta_1\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle \\ |\alpha_2\rangle \otimes |\beta_2\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle \end{array} \quad \begin{array}{l} p_1 = 1/2, \\ p_2 = 1/2. \end{array} \quad (17)$$

Sia ora $\Omega = |+\rangle_x \langle +| \otimes |+\rangle_x \langle +|$, con $|\pm\rangle_x$ autostati di spin lungo l'asse x , ortogonale a z . Tenendo conto che $|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \pm |-\rangle)$, sostituendo le (16) e (17) in (8) ed in (9) si ottiene:

$$P_p(+_x, +_x) = 0 \quad P_m(+_x, +_x) = \frac{1}{4}, \quad (18)$$

dunque i due insiemi statistici \mathcal{E}_p e \mathcal{E}_m sono *fisicamente* diversi, poiché è possibile discriminare sperimentalmente tra i due. Questo significa che, pur potendo prevedere con certezza il risultato di una misura dello spin di V dopo aver determinato quello di U lungo la stessa componente, secondo la MQ la misurazione effettuata sul sistema U comporta un cambiamento (istantaneo) dello stato di V , contrariamente a quanto supposto nel paradosso EPR.

3 Le diseguaglianze di Bell

Utilizzando la forma di Bohm ed Aharonov del paradosso EPR, nel 1964 John S. Bell mostrò in [5] che le teorie a variabili nascoste soddisfacenti la condizione di località, dette anche *teorie realistiche locali*, sono incompatibili in generale con le previsioni statistiche della Meccanica Quantistica, che dunque non può essere completata deterministicamente da tali teorie.

3.1 Dimostrazione del Teorema di Bell

Consideriamo un sistema fisico \mathcal{S} composto da due sottosistemi \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , di cui possano essere misurati separatamente, da una coppia di strumenti, osservabili dell'uno e dell'altro sistema. Per semplicità di esposizione, considereremo delle particelle dotate di spin $1/2$ e degli apparati di Stern-Gerlach.

Denotiamo ora con \vec{a} e \vec{b} rispettivamente i versori che individuano le orientazioni di apparati di Stern-Gerlach per \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 rispettivamente. Siano A l'osservabile "spin normalizzata di \mathcal{S}_1 relativa all'orientazione \vec{a} " ed analogamente B l'osservabile "spin normalizzata di \mathcal{S}_2 relativa all'orientazione \vec{b} ". Poiché A e B agiscono su sottospazi diversi di \mathcal{S} , allora le due osservabili sono compatibili. L'esperimento consiste di tre operazioni:

1. preparazione ripetuta di \mathcal{S} in un certo stato;

2. evoluzione indisturbata del sistema, di durata variabile;
3. misurazione di A e B in regioni di spazio arbitrariamente lontane.

Certamente le condizioni sperimentali fanno sì che la particella \mathcal{S}_1 attraversi un apparato e la particella \mathcal{S}_2 attraversi l'altro in almeno alcune ripetizioni. Dunque è possibile studiare le correlazioni tra i valori che assumono A e B al variare delle orientazioni \vec{a} e \vec{b} .

Supponiamo che i valori misurati di A e B dipendano, oltre che dalle orientazioni degli apparati \vec{a} e \vec{b} , anche da un insieme di parametri (le variabili nascoste λ) indipendenti da \vec{a} e \vec{b} . L'ipotesi fondamentale che deve essere verificata è se possono esistere delle funzioni deterministiche

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1 \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (19)$$

che rappresentino le osservabili A e B .

Osserviamo che l'ipotesi di *località* è quella che impedisce dipendenze del tipo $A(\vec{a}, \vec{b}, \lambda)$ e $B(\vec{b}, \vec{a}, \lambda)$, che implicherebbero una dipendenza istantanea di quanto osservato in un sottosistema da ciò che avviene nell'altro.

Poiché non si conoscono i valori assunti dalle variabili nascoste λ , allora bisogna eseguire una media sul loro spettro. Sia dunque $\rho(\lambda)$ la distribuzione di probabilità di λ ⁷:

$$\rho(\lambda) \geq 0 \quad \int \rho(\lambda) d\lambda = 1. \quad (20)$$

Allora, fissate le orientazioni \vec{a} e \vec{b} , la correlazione tra A e B si scrive:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda). \quad (21)$$

Siano ora \vec{a}' e \vec{b}' altre due orientazioni di \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 rispettivamente. Si ha:

$$\begin{aligned} C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') &= \int d\lambda \rho(\lambda) \left[A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}', \lambda) \right] = \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \left[1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda) \right] - \\ &- \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}', \lambda) \left[1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \right] \end{aligned}$$

Utilizzando l'ipotesi (19), $|A(\vec{a}, \lambda)| = 1 = |B(\vec{b}, \lambda)|$; inoltre per $\rho(\lambda)$ valgono le (20), dunque otteniamo:

$$\begin{aligned} \left| C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') \right| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) \left[1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda) \right] + \\ &+ \int d\lambda \rho(\lambda) \left[1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \right] = \\ &= 2 \pm \left[C(\vec{a}', \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b}) \right] \end{aligned}$$

ovvero:

$$\left| C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') \right| + \left| C(\vec{a}', \vec{b}) + C(\vec{a}', \vec{b}') \right| \leq 2. \quad (22)$$

Queste sono le *diseguaglianze di Bell*.

⁷indipendente da \vec{a} e da \vec{b} .

3.2 Confronto col risultato quantomeccanico

Le diseguaglianze di Bell sono state ricavate sulla base delle ipotesi (19), che tuttavia non fanno riferimento alla Meccanica Quantistica.

Supponiamo che il sistema \mathcal{S} sia una particella di spin 0. Supponiamo inoltre che \mathcal{S} decada, al tempo t_+ , nella coppia di particelle identiche a spin 1/2 \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 con un processo che conservi il momento angolare totale. In questo caso, allora, lo stato di spin 0 ottenuto dalla composizione dei due sistemi di spin 1/2 è espresso da:

$$|\psi_{t_+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle), \quad (23)$$

dove $|+\rangle$ è lo stato delle particelle di \mathcal{S}_j , $j = 1, 2$, che vengono deflesse da una parte e $|-\rangle$ è lo stato di particelle che vengono deflesse dall'altra, di un apparato di Stern-Gerlach orientato lungo un asse arbitrario z .

Calcoliamo ora il correlatore $C(\vec{a}, \vec{b})$ secondo le regole della Meccanica Quantistica. Le osservabili A e B sono rappresentate rispettivamente dagli operatori $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ e $\vec{b} \cdot \vec{\sigma}$, dove $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ è la terna delle matrici di Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

che agiscono come

$$\sigma_x |\pm\rangle = |\mp\rangle \quad \sigma_y |\pm\rangle = \pm i |\mp\rangle \quad \sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle \quad (25)$$

sugli stati di \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 . Utilizzando le (25) si ottiene

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \psi_{t_+} | \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma} | \psi_{t_+} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (26)$$

3.3 Conflitto con la Meccanica Quantistica

Ponendo $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta$ e scegliendo $\vec{a}' = \vec{b}$ e $\vec{b}' = 2(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} - \vec{a}$, si ha $\vec{a}' \cdot \vec{b}' = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b}' = \cos(2\theta)$ e $\vec{a}' \cdot \vec{b}' = \cos \theta$; sostituendo tali valori in (26) e poi nelle diseguaglianze di Bell (22) si ottiene

$$|\cos \theta - \cos(2\theta)| + |\cos \theta + 1| \leq 2$$

ossia

$$2 \cos \theta - \cos(2\theta) \leq 1 \quad \forall \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Ma questo è palesemente falso per un intervallo centrato in $\theta = \pi/3$. Se ne deve concludere che le diseguaglianze di Bell sono violate dalla Meccanica Quantistica.

3.4 Estensione del Teorema di Bell

Dimostrata l'incompatibilità tra Meccanica Quantistica e teorie locali (a variabili nascoste), è necessario ideare e realizzare degli esperimenti per verificare quali predizioni siano corrette. A tal proposito è necessario estendere le diseguaglianze di Bell, come hanno fatto Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH) in [6], ad esperimenti realizzabili.

In linea di principio le (22) possono essere utilizzate direttamente per esperimenti di rilevazione di coppie di particelle correlate, opportunamente filtrate e rilevate. Tuttavia, a causa della scarsa efficienza dei rilevatori che utilizzano l'effetto fotoelettrico, non si possono utilizzare singole coppie di fotoni ottici.

Dunque è necessario estendere il risultato di Bell a delle misure di correlazione tra flussi di fotoni. Interpretiamo allora le (19) $A(\vec{a}) = \pm 1$ e $B(\vec{b}) = \pm 1$ come la media tra l'emergenza e la non-emergenza dei fotoni dai rispettivi filtri, che saranno dei polarizzatori lineari orientati secondo le direzioni \vec{a} e \vec{b} . Introduciamo il valore ∞ dei parametri di orientazione \vec{a} e \vec{b} per indicare la rimozione del polarizzatore. Allora sarà ovviamente $A(\infty) = +1 = B(\infty)$.

Indichiamo con $\mathcal{S}_{j,\vec{a}}$ il sistema j , $j = 1, 2$, con relativo polarizzatore orientato secondo il versore \vec{a} . Poiché $C(\vec{a}, \vec{b})$ è una funzione di correlazione di emergenza dal polarizzatore, è necessario introdurre un'ulteriore ipotesi per derivare una predizione sperimentale: *se una coppia di fotoni emerge da $\mathcal{S}_{1,\vec{a}}$, $\mathcal{S}_{2,\vec{b}}$ allora la probabilità di rilevazione simultanea è indipendente da \vec{a} e da \vec{b}* . Detta $P_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$ la probabilità di avere $A(\vec{a}) = \pm 1$ e $B(\vec{b}) = \pm 1$, allora, se il flusso di fotoni su $\mathcal{S}_{1,\vec{a}}$, $\mathcal{S}_{2,\vec{b}}$ non dipende da \vec{a} o \vec{b} , la frazione di rilevazioni di coincidenza $R(\vec{a}, \vec{b})$ è proporzionale a $P_{++}(\vec{a}, \vec{b})$. Poniamo $R_0 = R(\infty, \infty)$, $R_1(\vec{a}) = R(\vec{a}, \infty)$ e $R_2(\vec{b}) = R(\infty, \vec{b})$. Siccome

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{--}(\vec{a}, \vec{b})$$

ed inoltre

$$P_{++}(\vec{a}, \infty) = P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{+-}(\vec{a}, \vec{b})$$

allora⁸ si ottiene:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{4R(\vec{a}, \vec{b})}{R_0} - \frac{2R_1(\vec{a})}{R_0} - \frac{2R_2(\vec{b})}{R_0} + 1. \quad (27)$$

Si può ora esprimere la (22) in termini delle frazioni di coincidenze con entrambi i polarizzatori inseriti, o con l'uno o l'altro rimosso. Se si trova sperimentalmente che $R_1(\vec{a})$ e $R_2(\vec{b})$ sono delle costanti, che chiamiamo R_1 ed R_2 , il risultato è

$$\left| R(\vec{a}, \vec{b}) - R(\vec{a}, \vec{b}') \right| + R(\vec{a}', \vec{b}) + R(\vec{a}', \vec{b}') - R_1 - R_2 \leq 0. \quad (28)$$

Per apparati realizzabili sperimentalmente, la Meccanica Quantistica prevede una violazione della disuguaglianza (28). Siano ϵ_{\parallel}^i l'efficienza del polarizzatore i ($i = 1, 2$) per luce polarizzata *parallelamente* all'asse del polarizzatore e ϵ_{\perp}^i quella per luce polarizzata *perpendicolarmente* all'asse del polarizzatore. Si considerino inoltre una sorgente puntiforme e dei sistemi filtro-rivelatore che raccolgano i fotoni emessi dalla sorgente in un cono di semiapertura θ . Allora, per una cascata $(\mathbf{J} = 0) \rightarrow (\mathbf{J} = 1) \rightarrow (\mathbf{J} = 0)$, o più semplicemente $(0 - 1 - 0)$, la predizione quantomeccanica per le frazioni di conteggio è⁹

$$\frac{R(\varphi)}{R_0} = \frac{1}{4} \left(\epsilon_{\parallel}^2 + \epsilon_{\perp}^1 \right) \left(\epsilon_{\parallel}^2 + \epsilon_{\perp}^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\epsilon_{\parallel}^1 - \epsilon_{\perp}^1 \right) \left(\epsilon_{\parallel}^2 - \epsilon_{\perp}^2 \right) F_1(\theta) \cos 2\varphi, \quad (29)$$

dove φ è l'angolo tra gli assi dei polarizzatori, ed inoltre

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_{\parallel}^1 + \epsilon_{\perp}^1 \right) \quad \frac{R_2}{R_0} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_{\parallel}^2 + \epsilon_{\perp}^2 \right), \quad (30)$$

avendo posto

$$F_1(\theta) = 2 \frac{(G_1(\theta))^2}{(G_2(\theta))^2 + \frac{1}{2}(G_3(\theta))^2}$$

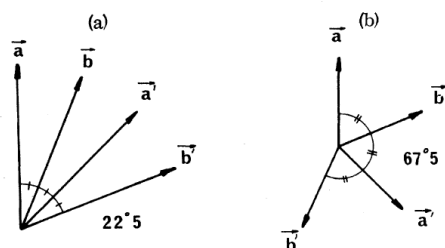
⁸similmente valgono $P_{++}(\infty, \vec{b}) = P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{-+}(\vec{a}, \vec{b})$ e $P_{++}(\infty, \infty) = \sum_{i,j=\pm} P_{ij}(\vec{a}, \vec{b})$.

⁹per i dettagli vedere [6].

con $G_1(\theta) = \frac{1}{4}(\frac{4}{3} - \cos \theta + \sin^2 \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta)$, $G_2(\theta) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\sin^2 \theta + 2) \cos \theta$ e $G_3(\theta) = \frac{4}{3} - \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta$. Le predizioni della MQ per una cascata di tipo $(0-1-1)$ si ottengono da (29) e da (30) sostituendo $-F_2(\theta)$ a $F_1(\theta)$, dove

$$F_2(\theta) = 2 \frac{(G_1(\theta))^2}{2(G_2(\theta))(G_3(\theta)) + \frac{1}{2}(G_3(\theta))^2}.$$

Figura 1: Orientazione relativa dei polarizzatori che porta alla massima violazione delle disequaglianze di Bell generalizzate.



Detti α, β, γ gli angoli dati da

$$\alpha = \arccos(\vec{b} \cdot \vec{a}) \quad \beta = \arccos(\vec{b}' \cdot \vec{b}) \quad \gamma = \arccos(\vec{b}' \cdot \vec{a}'), \quad (31)$$

se $\alpha = \beta/2 = \gamma \equiv \theta$ allora la maggior violazione delle disequaglianze di Bell generalizzate (28) avviene a $\theta = 22.5^\circ$ per la cascata $(0-1-0)$ ed a $\theta = 67.5^\circ$ per la cascata $(0-1-1)$, come mostrato in Figura 1.

4 Verifiche sperimentali e conclusioni

Il Teorema di Bell mostra che le teorie locali a variabili nascoste portano in generale a predizioni diverse da quelle quantomeccaniche. Le situazioni di disaccordo, però, sono alquanto rare, sicché fu necessario progettare degli esperimenti per verificare esplicitamente quali siano le previsioni corrette. Per generare delle coppie di particelle correlate furono utilizzate essenzialmente tre classi di fenomeni:

1. annichilazione del positronio $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$;
2. urti protone - protone a bassa energia;
3. cascate fotoniche in fisica atomica.

Tra il 1969 ed il 1980 fu verificata in numerosi esperimenti la violazione delle disequaglianze di Bell generalizzate da CHSH, nella misura predetta dalla MQ¹⁰. I migliori risultati sperimentali furono però quelli ottenuti nei primi anni '80 da A. Aspect.

¹⁰Per una rassegna degli esperimenti eseguiti in tale periodo vedere [11] e [12].

4.1 Gli esperimenti di Aspect e collaboratori (1981-82)

Nel biennio 1981-82 Alain Aspect e collaboratori eseguirono tre esperimenti¹¹ per valutare la validità della diseguaglianze di Bell nelle forme (22) e (28) in cascate atomiche.

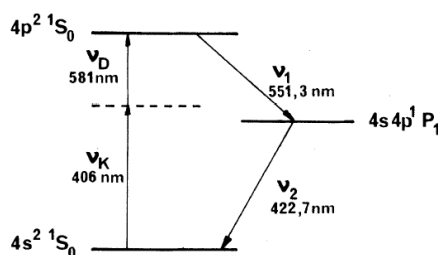
Il primo esperimento era una verifica diretta delle diseguaglianze in questione. Il suo limite fondamentale era però che, utilizzando dei polarizzatori ad un canale, non si poteva sapere se la mancata misura di correlazione tra una coppia di fotoni era dovuta alla reale assenza di correlazione (dunque all'azione del polarizzatore) oppure alla scarsa efficienza del rivelatore. Per questo motivo fu eseguito il secondo esperimento che, pur mantenendo una configurazione simile a quella dell'esperimento concettuale di Bohm-Aharonov, utilizzava dei polarizzatori a due canali con cui era possibile misurare la correlazione di tutti i fotoni che arrivavano al polarizzatore. Il terzo esperimento, infine, seguendo il suggerimento di [4], utilizzava dei polarizzatori ad orientazione variabile nel tempo. Come gli altri, anche quest'ultimo esperimento, che non sarà discusso in dettaglio, portò a concludere che le diseguaglianze di Bell non valgono in generale, confermando invece le predizioni quantomeccaniche.

4.1.1 Esperimento con polarizzatori ad un canale

Nel primo esperimento furono eseguite delle misure relative alla correlazione della polarizzazione di fotoni visibili emessi in una cascata atomica radiativa ($\mathbf{J} = 0 \rightarrow \mathbf{J} = 1 \rightarrow \mathbf{J} = 0$). I dati furono poi direttamente confrontati con le predizioni della MQ in tutto l'intervallo tra 0 e 2π delle orientazioni relative dei polarizzatori. L'esperimento fu infine ripetuto a varie distanze, fino a separazioni sorgente-polarizzatore di 6.5 m.

L'innovazione principale di questo esperimento consisteva nell'utilizzo di una sorgente molto stabile e potente che permise di ridurre i tempi di raccolta dei dati rispetto agli esperimenti precedenti, da alcune ore ad alcuni minuti. La sorgente sfruttava la cascata $4p^2 \ ^1S_0 \rightarrow 4s4p \ ^1P_1 \rightarrow 4s^2 \ ^1S_0$ del ^{40}Ca . Questa

Figura 2: Livelli energetici rilevanti della cascata del ^{40}Ca . Gli atomi, eccitati dall'assorbimento di due fotoni ν_K e ν_D , emettono fotoni visibili ν_1 e ν_2 correlati in polarizzazione.



cascata, rappresentata in Figura 2, produceva due fotoni visibili ν_1 e ν_2 correlati in polarizzazione. Gli atomi di Ca erano eccitati dallo stato fondamentale al livello energetico superiore tramite l'assorbimento di due fotoni ν_K e ν_D generati da due sorgenti laser. Il primo fascio laser ($\lambda_K = 406.7 \text{ nm}$) era generato da ioni di Krypton, mentre il secondo era un dye laser, portato alla risonanza per il processo a due fotoni ($\lambda_D = 581 \text{ nm}$); i due laser avevano polarizzazioni

¹¹descritti in [8], [9] e [10].

parallele. La lunghezza d'onda del laser regolabile era controllata da un ciclo di bloccaggio di fase che, usando il segnale di fluorescenza della cascata, ne massimizzava l'intensità. Un secondo ciclo a retroazione controllava la potenza emessa dal laser a krypton in modo da garantire una emissione costante della cascata. Con una potenza di 40 mW per ciascun laser, l'efficienza di emissione tipica della cascata era di 4×10^7 fotoni al secondo. Un fascio atomico di calcio veniva irradiato, perpendicolarmente alla direzione sorgente-polarizzatore, dai due laser focalizzati in una zona di interazione, rappresentabile come un cilindro lungo circa 1 mm (diametro del fascio atomico) e dal diametro di circa $60 \mu\text{m}$ (minimo diametro del fascio laser).

Utilizzando poi dei polarizzatori ad un canale "a pila di piatti"¹², veniva stabilita la correlazione tra le coppie di fotoni, successivamente analizzata dall'apparato elettronico.

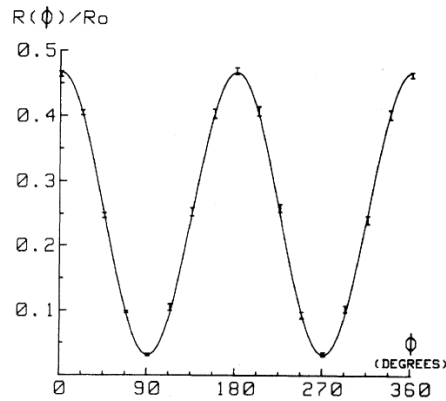
Le efficienze misurate dei polarizzatori erano: $\epsilon_{\parallel}^1 = 0.917 \pm 0.005$, $\epsilon_{\perp}^1 = 0.029 \pm 0.005$, $\epsilon_{\parallel}^2 = 0.968 \pm 0.005$ e $\epsilon_{\perp}^2 = 0.028 \pm 0.005$.

Ponendo S pari al primo membro della disuguaglianza (28), il risultato sperimentale fornì

$$S_{exp} = 0.126 \pm 0.014$$

con violazione di (28) per 9 deviazioni standard ed in buon accordo con la previsione della MQ: $S_{MQ} = 0.118 \pm 0.005$.

Figura 3: Frazione normalizzata di coincidenze in funzione dell'orientazione relativa dei polarizzatori, eq. (29). Gli errori indicati sono ± 1 deviazioni standard. La curva continua non è il risultato di un fit, ma rappresenta la predizione quantomeccanica.



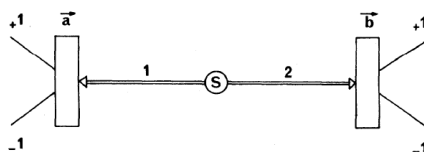
Notevole è poi la verifica dell'equazione (29) al variare degli angoli relativi tra polarizzatori (non solo nella situazione di massima violazione delle disuguaglianze di Bell, come era stato fatto negli esperimenti precedenti), Figura 3. Questi risultati furono infine verificati anche alla distanza di 6.5 m tra polarizzatore e sorgente, corrispondente a quattro lunghezze di coerenza del pacchetto d'onde associato al tempo di vita media $\tau_r = 5 \text{ ns}$ dello stato intermedio della cascata, portando alle stesse conclusioni.

¹²fatto con dieci piatti di vetro otticamente piano inclinati ad un angolo prossimo a quello di Brewster.

4.1.2 Esperimento con polarizzatori a due canali

Un esperimento molto simile a quello di Stern e Gerlach è quello eseguito utilizzando dei polarizzatori a due canali che separavano due polarizzazioni lineari tra loro ortogonali del fotone incidente (vedi Figura 4).

Figura 4: Einstein-Podolsky-Rosen *Gedankenexperiment*. Due fotoni in stato di singoletto si separano. Le polarizzazioni lineari di 1 e 2 sono misurate lungo \vec{a} e \vec{b} .



Con la stessa sorgente dell'esperimento precedente e le opportune modifiche dell'elettronica, i dati raccolti da Aspect e collaboratori mostrarono nuovamente un ottimo accordo con le predizioni della MQ, in violazione delle disuguaglianze di Bell. Infatti, mentre le disuguaglianze (22) prevedono $S' \leq 2$, il risultato sperimentale è

$$S'_{exp} = 2.697 \pm 0.015$$

in ottimo accordo con $S'_{MQ} = 2.7 \pm 0.05$.

4.2 Conclusioni

Gli esperimenti mostrano chiaramente la validità delle predizioni della MQ, mentre in generale non valgono le disuguaglianze di Bell (22). Questo comporta una notevole difficoltà concettuale: l'aver escluso la completezza della MQ per salvaguardare i principi di realtà e di località ha portato a violare il medesimo principio di località, escludendo di conseguenza la possibilità di teorie a variabili nascoste *locali*.

Poiché gli esperimenti discussi portano ad escludere l'incompletezza della MQ, restano aperte, sulla base dell'articolo di EPR, due possibilità.

ABBANDONO DEL PRINCIPIO DI LOCALITÀ: l'impossibilità di teorie a variabili nascoste locali non vieta la possibilità di teorie a variabili nascoste *non locali*; la descrizione di un sistema comporterebbe, però, oltre ad una enorme complicazione, degli effetti incompatibili, in generale, con la Relatività Ristretta.

ABBANDONO DEL PRINCIPIO DI REALTÀ: lasciando la prospettiva delle teorie a variabili nascoste, oltre ad accettare l'indeterminismo della MQ, si deve rinunciare a considerare la funzione d'onda come una proprietà oggettiva del sistema fisico in questione: la si deve interpretare come l'ente matematico che raccoglie tutte le informazioni che noi possiamo avere di un sistema. Secondo questa prospettiva il principio di località è assicurato dal fatto che un cambiamento anche istantaneo della funzione d'onda non comporta un cambiamento della realtà fisica, ma solamente della conoscenza che noi abbiamo di esso e non implica dunque una trasmissione istantanea di informazione.

Per concludere, citando Aspect [11] "Einstein ha messo in luce una delle proprietà più straordinarie della Meccanica Quantistica. Dobbiamo ringraziare J. Bell per averci fornito la possibilità di evidenziare sperimentalmente questa proprietà".

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete*, Phys. Rev. **47** (1935), p.777.
- [2] N. Bohr, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **48** (1935), p. 696.
- [3] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables*, Phys. Rev. **85** (1952), p. 166 e 180.
- [4] D. Bohm, Y. Aharonov, *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*, Phys. Rev. **108** (1957), p. 1070.
- [5] J. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Physics **1** (1964), p. 195.
- [6] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) p. 880.
- [7] B. d'Espagnat, *I fondamenti concettuali della Meccanica Quantistica*, Bibliopolis, Napoli 1977.
- [8] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. **47** (1981), p. 460.
- [9] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), p. 91.
- [10] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982), p. 1804.
- [11] A. Aspect, *Rendiconti della "Ottava Conferenza Internazionale sulla Fisica Atomica"*, 2-6 Agosto 1982, Göteborg, Svezia. Testo pubblicato su "Atomic Physics 8". Editore da I. Lindgren, A. Rosen e S. Svanberg.
- [12] O. Nicosini, *Paradosso EPR e Teorema di Bell*, "Quaderni di Fisica Teorica", Università degli studi di Pavia, Pavia 1991.
- [13] E. Onofri, C. Destri, *Istituzioni di Fisica Teorica*, La Nuova Italia Scientifica, Roma 1996.