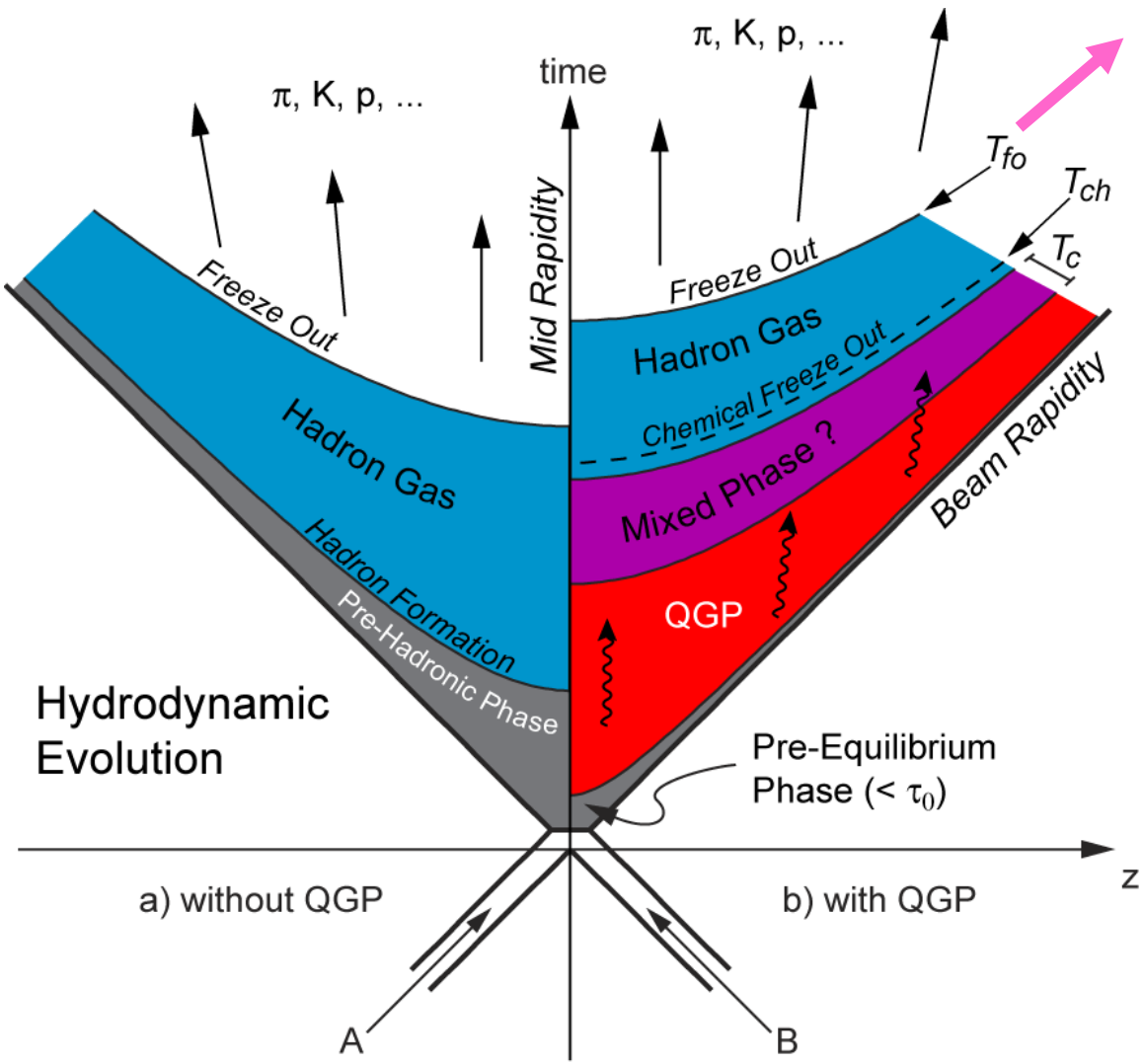
Moti collettivi (flow) in collisioni di ioni pesanti

Freeze-out chimico e freeze-out termico

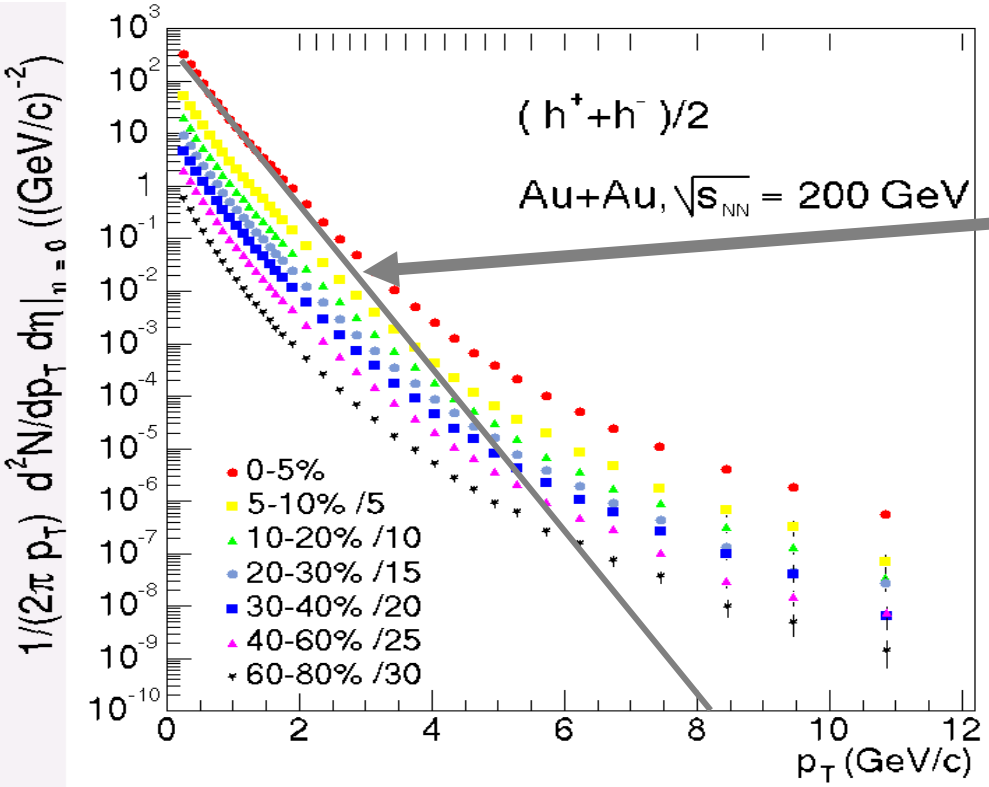


- Freeze out termico
  - ⇨ Cessano le interazioni elastiche
  - ⇨ Si fissa la dinamica delle particelle ("momentum spectra")

- Per caratterizzare il freeze-out termico si studiano le **distribuzioni di impulso trasverso** (p_T) delle particelle prodotte nella collisione

Distribuzioni di p_T

- Le distribuzioni in impulso trasverso (p_T) delle particelle prodotte nella collisione permettono di estrarre importanti informazioni sul sistema creato nella collisione



- A basso p_T (<≈ 1 GeV/c):
  - ⇨ I meccanismi di produzione delle particelle sono soft
  - ⇨ Le distribuzioni $1/p_T \cdot dN/dp_T$ hanno un andamento esponenziale decrescente alla Boltzmann praticamente indipendente dall'energia √s
- Ad alto p_T (>>1 GeV/c):
  - ⇨ I meccanismi di produzione delle particelle sono hard
  - ⇨ Le distribuzioni $1/p_T \cdot dN/dp_T$ si distaccano dall'andamento esponenziale e seguono una "legge di potenza"

Sorgente termica stazionaria

- Distribuzione di momento delle particelle prodotte da una sorgente termica con temperatura T:

$$E\frac{d^3N}{d^3p} = \frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} = \frac{g_i V}{(2\pi)^3} E \frac{1}{e^{(E-\mu_i)/T} \pm 1}$$

⇨ Dove:

V = volume,

g_i = fattore di generazione di spin,

μ_i = potenziale chimico della particella di specie i

il + è per i fermioni, il – per i bosoni

⇨ Lo spettro E d^3N/d^3p è Lorentz invariante

⇨ NOTA:

$$p_z = m_T \sinh y \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_z}{dy} = m_T \cosh y \quad \Rightarrow \quad dp_z = E dy$$

p_T e m_T

- Dalla definizione di massa trasversa si ha:

$$\frac{dm_T}{dp_T} = \frac{d}{dp_T}\sqrt{m^2 + p_T^2} = \frac{p_T}{\sqrt{m^2 + p_T^2}} = \frac{p_T}{m_T} \quad \Rightarrow \quad m_T dm_T = p_T dp_T$$

- E quindi:

$$\frac{dN}{m_T dm_T} = \frac{dN}{p_T dp_T}$$

- Gli spettri in p_T vengono comunemente espressi in termini di massa trasversa
  - ⇨ m_T è l'energia della particella nel piano trasverso

  o di m_T-m
  - ⇨ che è l'enegia cinetica nel piano trasverso (E_T^{KIN})

Sorgente termica stazionaria

- Distribuzione di momento delle particelle prodotte da una sorgente termica con temperatura T:

$$E\frac{d^3N}{d^3p} = \frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} = \frac{dN}{m_T dm_T d\phi dy} = \frac{g_i V}{(2\pi)^3} E \frac{1}{e^{(E-\mu_i)/T} \pm 1}$$

- Sviluppando in serie di Taylor:

$$\frac{1}{e^{(E-\mu_i)/T} \pm 1} = \frac{e^{-(E-\mu_i)/T}}{1 \pm e^{-(E-\mu_i)/T}} = e^{-(E-\mu_i)/T} \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n e^{-n(E-\mu_i)/T} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n+1} e^{-n(E-\mu_i)/T}$$

- Considerando solo il primo termine dello sviluppo in serie si riduce alla distribuzione di Boltzmann:

$$E\frac{d^3N}{d^3p} = \frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} = \frac{dN}{m_T dm_T d\phi dy} \approx \frac{g_i V}{(2\pi)^3} E e^{-(E-\mu_i)/T}$$

⇨ ottima approssimazione per energie grandi rispetto a T

Sorgente termica stazionaria

- Distribuzione di momento delle particelle prodotte da una sorgente termica con temperatura T:

$$E\frac{d^3N}{d^3p} = \frac{dN}{m_T dm_T dy d\phi} = \frac{dN}{p_T dp_T dy d\phi} \approx \frac{g_i V}{(2\pi)^3} E e^{-(E-\mu_i)/T}$$

- La distribuzione di momento trasverso (o di m_T) si ottiene integrando su rapidità e angolo azimutale:

$$\frac{dN}{m_T dm_T} = \frac{g_i V}{(2\pi)^3}\int dy d\phi\, E e^{-(E-\mu_i)/T} = \frac{g_i V}{(2\pi)^2} m_T e^{\mu_i/T}\int dy \cosh y\, e^{-m_T \cosh y/T}$$

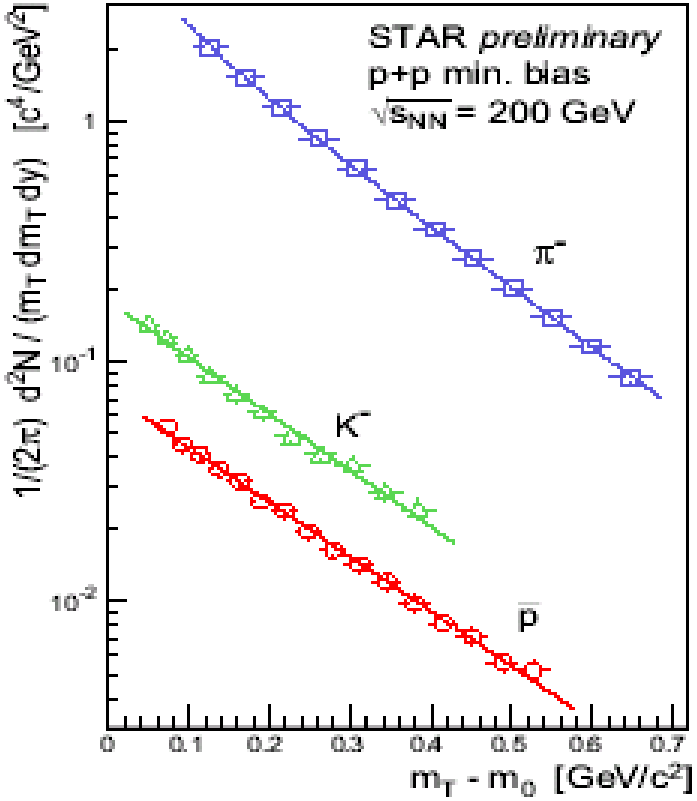
$$= \frac{g_i V}{(2\pi)^2} m_T e^{\mu_i/T} K_1\left(\frac{m_T}{T}\right) \xrightarrow[m_T \gg T]{} V'\sqrt{m_T} e^{-m_T/T}$$

⇨ Andamento di tipo esponenziale decrescente per energie grandi rispetto alla temperatura della sorgente

m_T scaling

- Nel caso di sorgente termica a riposo, le distribuzioni in massa trasversa hanno la stessa forma per tutti gli adroni (**m_T scaling**)

$$\frac{dN}{m_T dm_T} \propto \sqrt{m_T} e^{-\frac{m_T}{T_{slope}}}$$

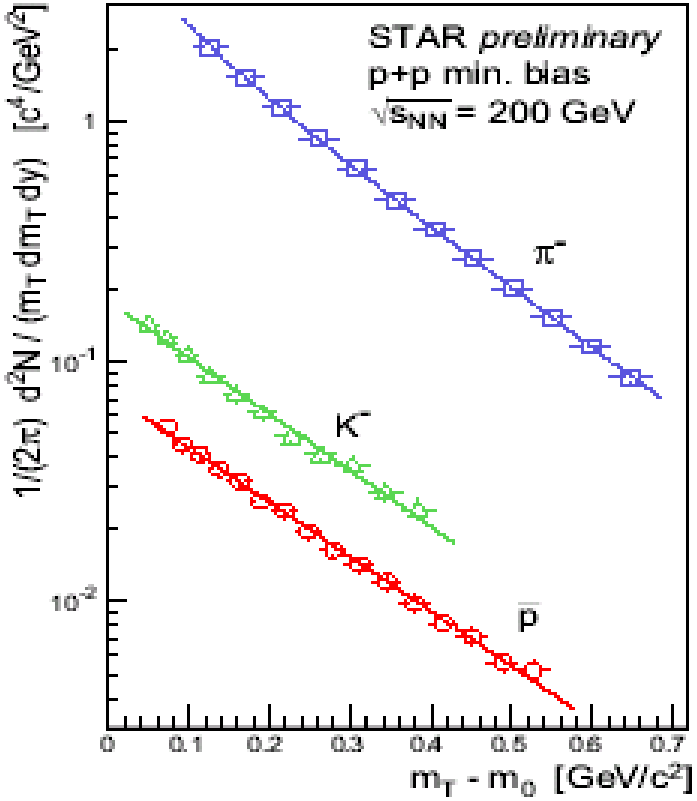


- Osservato con buona approssimazione in collisioni pp e di nuclei leggeri a basso $\sqrt{s}$
  - ⇨ Il coefficiente T_{slope} assume il valore di ≈167 MeV per tutte le particelle
  - ⇨ Con qualche complicazione: ad esempio i decadimenti di risonanze inducono una deviazione dall'andamento esponenziale nello spettro dei pioni a basso m_T

m_T scaling

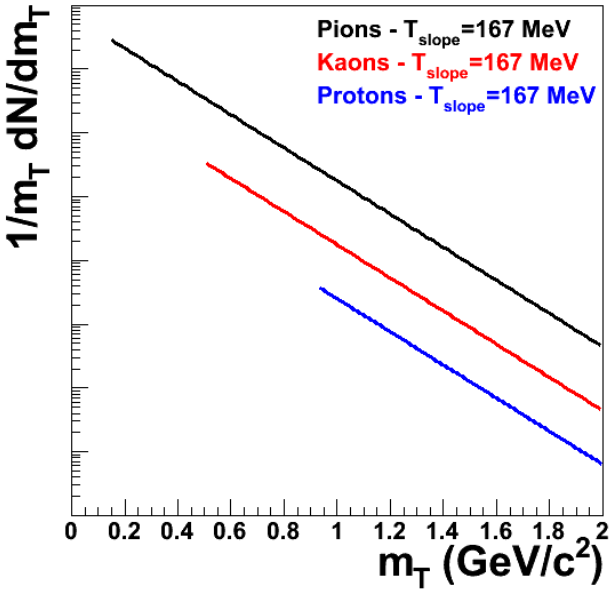
- Nel caso di sorgente termica a riposo, le distribuzioni in massa trasversa hanno la stessa forma per tutti gli adroni (**m_T scaling**)

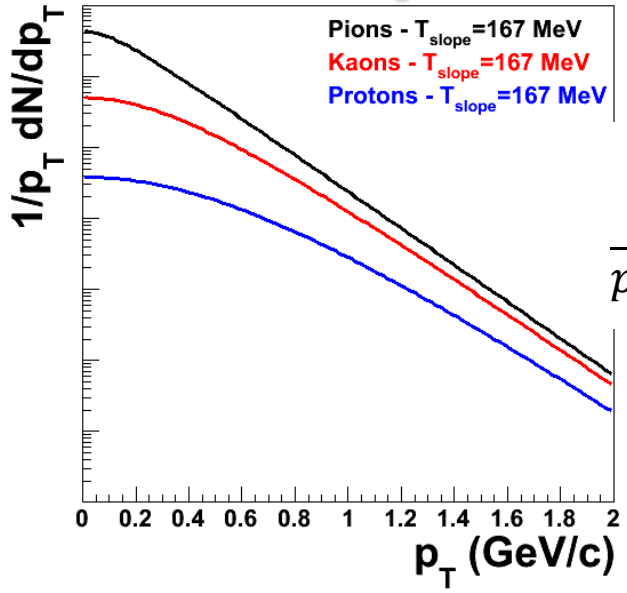
$$\frac{dN}{m_T dm_T} \propto \sqrt{m_T} e^{-\frac{m_T}{T_{slope}}}$$



- Interpretazione: gli spettri sono spettri termici alla Boltzmann e T_{slope} rappresenta la temperatura a cui avviene l'emissione delle particelle
  - ⇨ Se estendiamo quest'idea al caso dell'evoluzione della fireball creata in collisioni di ioni, T_{slope} potrebbe rappresentare la temperatura del sistema al momento del thermal freeze-out (T_{fo})

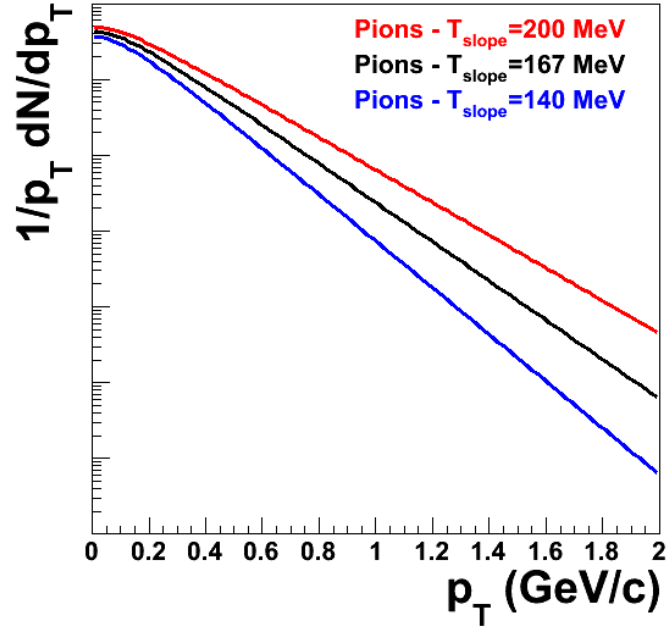
Spettri in p_T e in m_T





$$\frac{dN}{p_T dp_T} = \frac{dN}{m_T dm_T} \propto e^{-\frac{\sqrt{m^2+p_T^2}}{T_{slope}}}$$

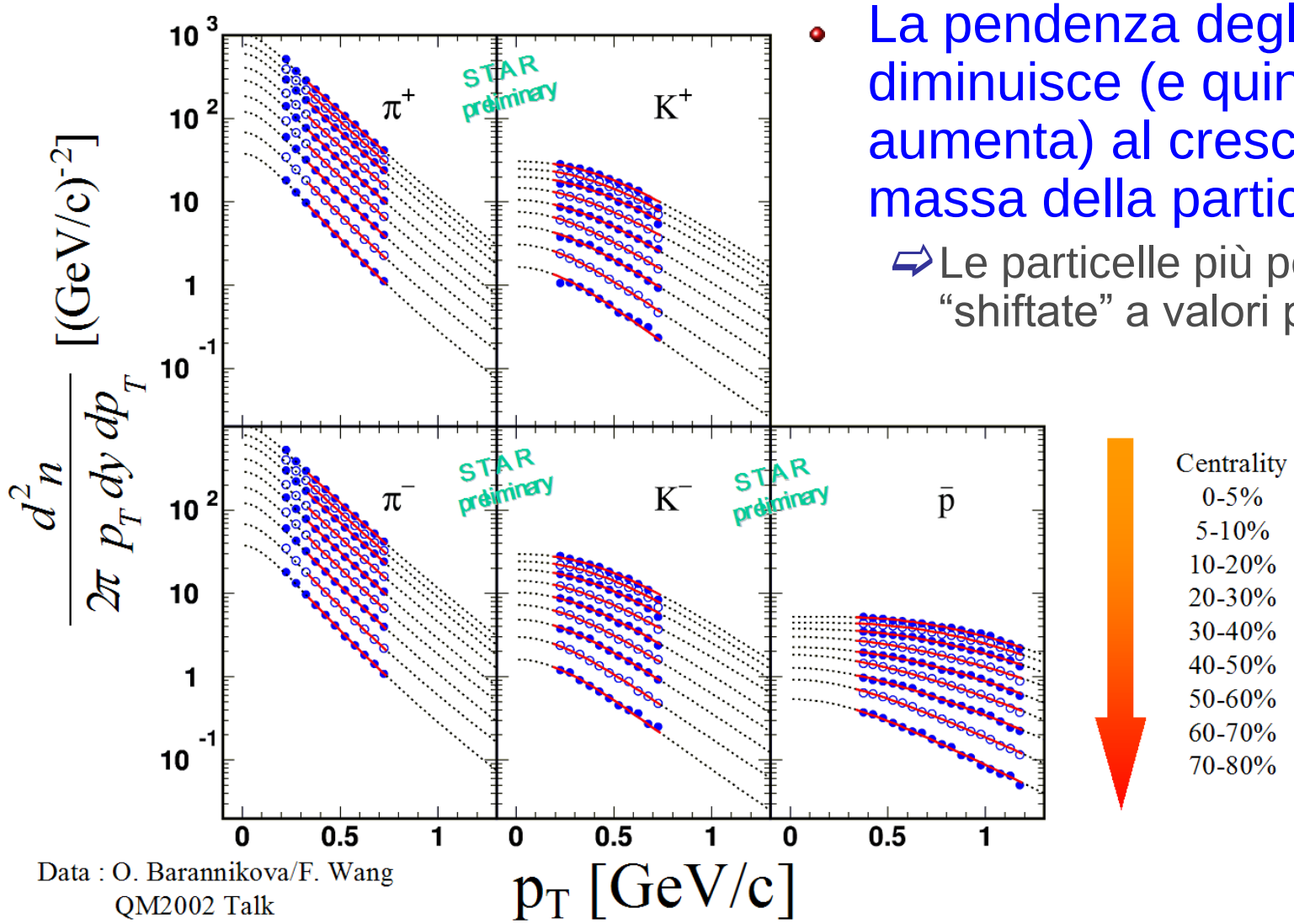
- Al crescere di T_{slope}:
  - ⇨ diminuisce la pendenza dello spettro in p_T
  - ⇨ Lo spettro diventa più "hard"
  - ⇨ Aumenta il valor medio di m_T e di p_T



Espansione collettiva della fireball

- Il modello di sorgente termica a riposo non rappresenta però il caso in cui in collisioni di ioni ad alta energia si crea una fireball di Plasma di Quark e Gluoni
- Il QGP è (per definizione) uno stato termalizzato di quark e gluoni deconfinati
  - ⇨ Ha pertanto una pressione termica
- I gradienti di pressione rispetto al vuoto circostante causano una **espansione collettiva** della fireball
  - ⇨ Una conseguenza inevitabile della formazione del QGP è la presenza di moti collettivi (**collective flow**)
- Il collective flow modifica le distribuzioni di impulso delle particelle prodotte
  - ⇨ Nel piano trasverso la modifica delle distribuzioni in p_T e m_T rompe l'm_T scaling

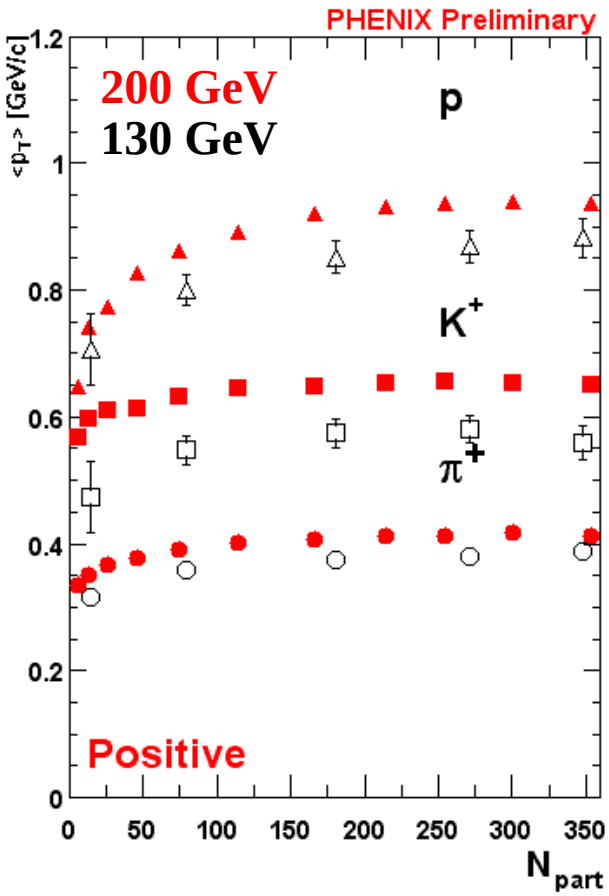
Rottura dell'm_T scaling in AA (1)

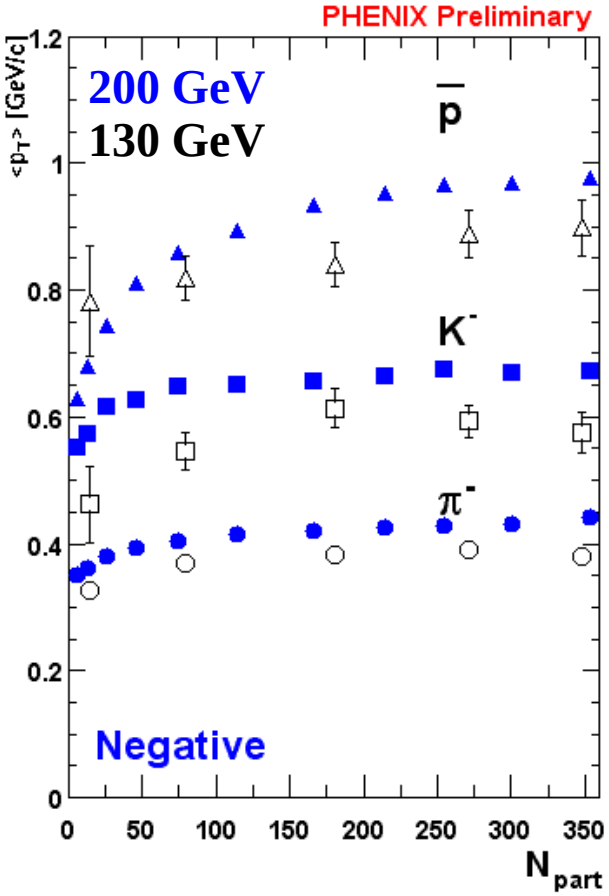


Data : O. Barannikova/F. Wang
QM2002 Talk

- La pendenza degli spettri diminuisce (e quindi T_{slope} aumenta) al crescere della massa della particella
  - ⇨ Le particelle più pesanti sono "shiftate" a valori più alti di p_T

Rottura dell'm_T scaling in AA (2)



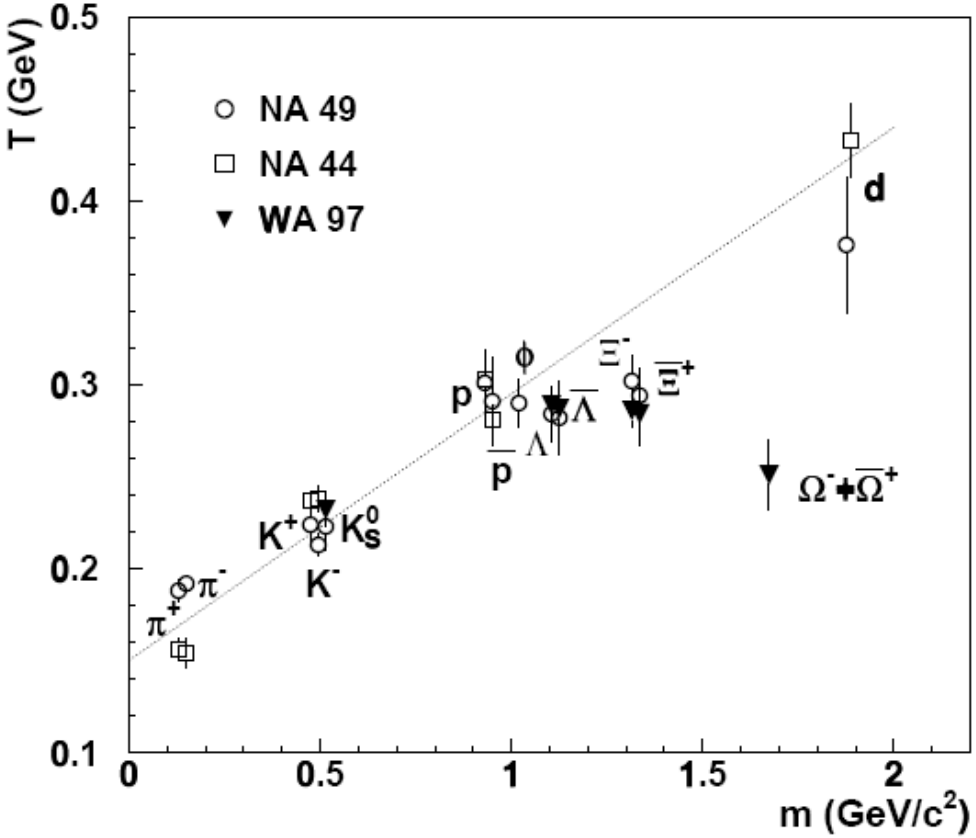


- Il valor medio di p_T aumenta con la massa della particella
  - ⇨ Conseguenza dell'aumento di T_{slope} con la massa della particella
- Per ogni particella $<p_T>$ aumenta con la centralità

Rottura dell'm_T scaling in AA (3)

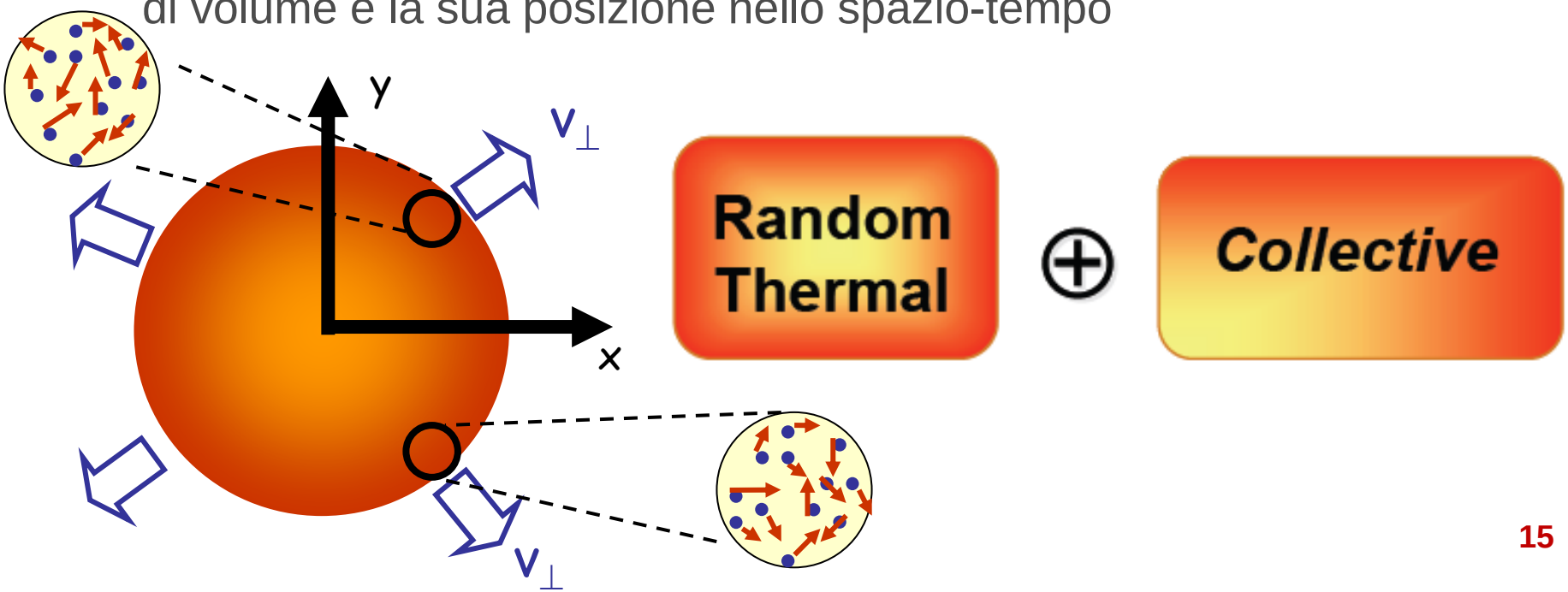
- A basso p_T (p_T<m), T_{slope} dipende linearmente dalla massa della particella
- Interpretazione: c'è un moto collettivo di tutte le particelle sovrapposto al moto di agitazione termica nel piano trasverso con velocità $v_\perp$ per cui:

$$T_{slope} = T_{fo} + \frac{1}{2} m v_\perp^2$$



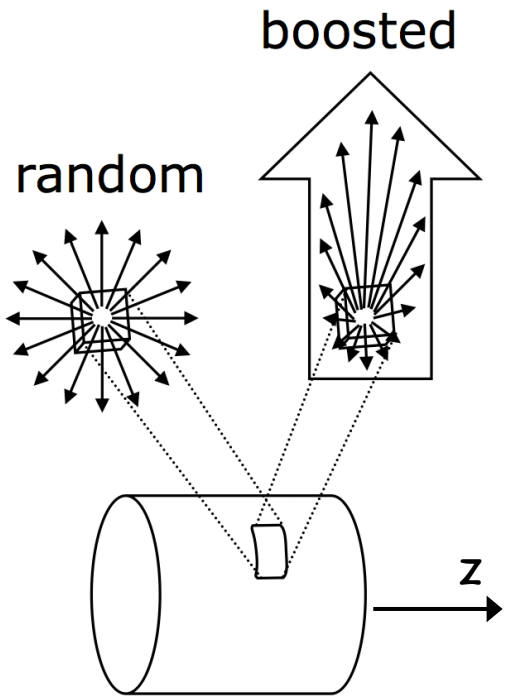
Flow in collisioni di ioni pesanti

- Flow = moto collettivo delle particelle sovrapposto al moto di agitazione termica
  - ⇨ Il moto collettivo è dovuto alle alte pressioni che si generano quando si comprime e si riscalda la materia nucleare
  - ⇨ La velocità di flusso di un elemento di volume del sistema è data dalla somma delle velocità delle particelle contenute in esso
  - ⇨ Il flusso collettivo è una **correlazione** tra la velocità v di un elemento di volume e la sua posizione nello spazio-tempo



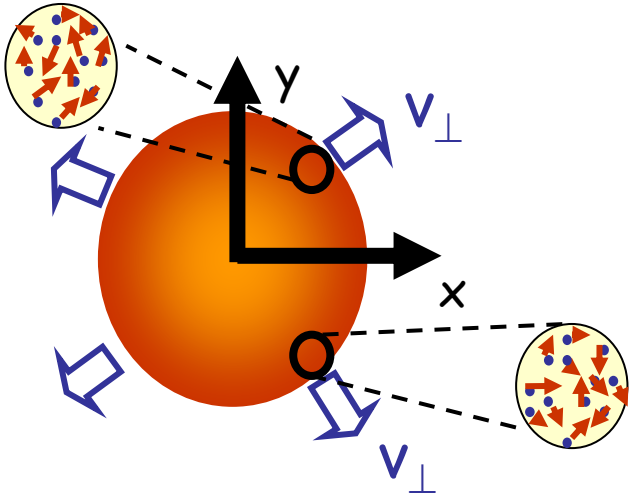
Blast wave model

- Modello molto semplice per descrivere gli effetti moto collettivo (flow) sugli spettri delle particelle
  - ⇨ Permette di **analizzare gli spettri misurati** per le varie specie adroniche, valutare la presenza di **moti collettivi** e separarli dal moto casuale di **agitazione termica**
- Si assume che ogni elemento di volume della fireball sia:
  - ⇨ In equilibrio termico a una temperatura T -> è quindi una **sorgente termica**
  - ⇨ Sottoposto a un **boost** in direzione **radiale** con velocità $v_{\perp}(r)$
- Lo spettro risultante è pertanto una sovrapposizione di sorgenti termiche con diverse velocità di espansione collettiva radiale



Velocità del flusso collettivo

- Si considera un volume infinitesimo centrato in un punto spazio-temporale x all'interno della fireball
- Si sommano i quadri-impulsi di tutte le particelle contenute in quel volume
  - ⇨ Dal tri-momento totale **P** e l'energia P^0, si definisce la velocità di flusso collettivo nell'elemento di volume: **v**(x)=**P**/P^0
  - ⇨ Il flusso collettivo è una correlazione tra il momento delle particelle e la loro posizione nello spazio-tempo (**x-p correlation**)
  - ⇨ Si definisce una **quadrivelocità** $\mathbf{u}^\mu$ come:



$$u^\mu(x) = \gamma(1, \mathbf{v}) \qquad \text{con} \qquad \gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(x)}} \qquad [c = 1]$$

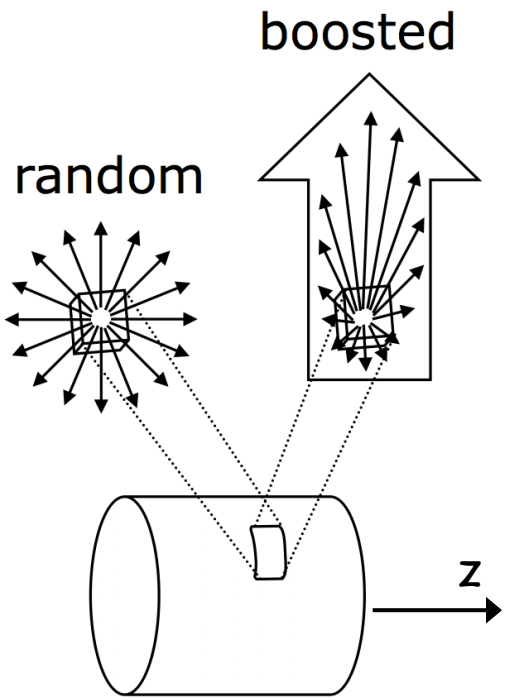
- La velocità v viene separata tra componente longitudinale (v_L, lungo il fascio) e quella trasversa $v_\perp$ detta **transverse flow**
  - ⇨ La velocità $v_\perp$ può dipendere dall'angolo azimutale φ.
  - ⇨ La media di $v_\perp$ sull'azimuth si chiama **radial flow**.

Distribuzione di particelle

- Si considera una fireball in equilibrio termico che si espande con un moto collettivo
- In un punto spazio-temporale x all'interno della fireball la distribuzione di particelle dipende da:
  - ⇨ Quadrivelocità locale del flusso collettivo $u^\mu(x)$
  - ⇨ Temperatura locale T(x)

$$f_i(x,p) = \frac{g_i}{e^{[p^\mu u_\mu(x) - \mu_i]/T(x)} \pm 1}$$
$$= g_i \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n+1} e^{-n[p^\mu u_\mu(x) - \mu_i]/T(x)}$$

  - ⇨ Il termine $p^\mu u_\mu(x)$ è l'energia della particella nel sistema in cui la cella di fluido è a riposo (local heat-bath frame) boostato nel sistema dell'osservatore (laboratory) con la quadrivelocità $u^\mu(x)$ della cella di fluido nel punto x



Flusso di particelle

- Per ricavare lo spettro delle particelle di specie i prodotte nella collisione si definisce una superficie tridimensionale Σ e si contano le particelle che la attraversano
- La corrente di particelle di specie *i* con momento compreso tra **p** e **p**+d^3p è:

$$j^\mu = f_i(x,p) d^3p \frac{p^\mu}{E}$$

  - ⇨ Dove $f_i(x,p)$ è la distribuzione (Bose-Einstein o Fermi-Dirac) boostata delle particelle di specie i e p^μ/E la quadri-velocità
- Il flusso di particelle attraverso la superficie Σ è:

$$N = \int_\Sigma d^3\sigma_\mu j^\mu \qquad \Rightarrow \qquad E\frac{d^3N}{d^3p} = \int_\Sigma d^3\sigma_\mu f_i(x,p) p^\mu$$

  - ⇨ Dove $d^3\sigma_\mu$ è un quadrivettore perpendicolare a Σ nel punto x e diretto verso l'esterno

Superficie di freeze-out

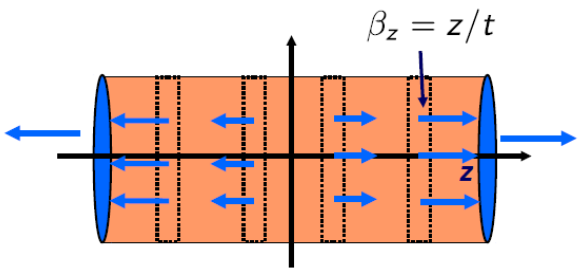
- L'equazione ottenuta è detta formula di **Cooper-Frye**:

$$E\frac{d^3N}{d^3p} = \frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} = \frac{dN}{m_T dm_T d\phi dy} = \int_{\Sigma} d^3\sigma_\mu f_i(x,p)p^\mu$$

- Diverse scelte possibili per la superficie Σ purché racchiuda tutti i possibili coni-luce che emergono dal punto della collisione
  - ⇨ Due superfici Σ_1 e Σ_2 danno lo stesso numero di particelle N_i se la funzione di distribuzione $f_i(x,p)$ evolve da Σ_1 a Σ_2 con interazioni che preservano il numero di particelle di specie i
  - ⇨ Due superfici Σ_1 e Σ_2 danno lo stesso spettro di impulsi per le particelle di specie i se $f_i(x,p)$ evolve da Σ_1 a Σ_2 per free-streaming (= senza interazioni)
- Per calcolare lo spettro delle particelle prodotte nella collisione si sceglie Σ come la "smallest and earliest" superficie che racchiude tutti gli scattering avvenuti nella fireball
  - ⇨ Viene chiamata pertanto "**last scattering surface**" o "**freeze-out surface**"

Assunzioni: Bjorken flow

- Invarianza per boost lungo la coordinata longitudinale (**Bjorken flow**)
  - ⇨ Si utilizzano quindi le variabili tempo proprio e la rapidità



$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$$

$$y_L = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v_L}{1-v_L} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{z}{t}}{1-\frac{z}{t}} = \eta$$

$$t = \tau\cosh\eta$$
$$z = \tau\sinh\eta$$

  - ✓ ***La rapidità longitudinale del fluido y_L (che caratterizza il momento medio longitudinale p_L delle particelle prodotte nel punto x) coincide con la "space-time rapidity" η, che definisce il punto x nello spazio tempo***
  - ⇨ Il quadrivettore velocità della cella di fluido (flow) è quindi:

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v_\perp^2}}(\cosh\eta\,, v_x, v_y, v_L) = \gamma_\perp(\cosh\eta\,, v_x, v_y, \sinh\eta)$$

Assunzioni: freeze-out istantaneo

- **Freeze-out** (= disaccoppiamento) **istantantaneo** nella direzione radiale al tempo proprio τ_{fo} (prescrizione di **Cooper-Frye**)
  - ⇨ La transizione da uno stato in cui la fireball è interagente e in equilibrio termodinamico a uno stato di particelle che si espandono liberamente (free streaming) avviene in un intervallo di tempo infinitesimo
  - ⇨ Durante questo intervallo di tempo infinitesimo la distribuzione delle particelle nello spazio delle fasi non subisce cambiamenti sostanziali e si può quindi approssimare la $f_i(x,p)$ sulla superficie dell'ultimo scattering con il valore di equilibrio termico che aveva in un'istante immediatamente precedente il freeze-out

Blast wave model: superficie di freeze-out

- Nel caso di Bjorken flow (longitudinale), considerando una superficie di freeze-out cilindrica al tempo proprio τ_{fo}:

$$\Sigma^{\mu}_{fo} = (t_{fo}, R\cos\phi\,, R\sin\phi\,, z_{fo}) = (\tau_{fo}\cosh\eta\,, R\cos\phi\,, R\sin\phi\,, \tau_{fo}\sinh\eta)$$

- Il vettore normale alla superficie è:

$$d^3\sigma_{\mu} = (dxdydz, 0{,}0, dxdydt) = (\tau_{fo}\cosh\eta\,, 0{,}0, \tau_{fo}\sinh\eta)rdrd\phi d\eta$$

  - ⇨ Data l'assunzione di freeze-out istantaneo in direzione radiale, per cui τ_{fo} non dipende da x e y (r e φ)
  - ⇨ E dato che:

$$dz = \frac{dz}{d\eta}d\eta + \frac{dz}{d\tau}d\tau = \frac{d}{d\eta}(\tau_{fo}\sinh\eta)d\eta = \tau_{fo}\cosh\eta\, d\eta$$

$$dt = \frac{dt}{d\eta}d\eta + \frac{dt}{d\tau}d\tau = \frac{d}{d\eta}(\tau_{fo}\cosh\eta)d\eta = \tau_{fo}\sinh\eta\, d\eta$$

  - ⇨ e che in caso di freeze-out istantaneo si ha $d\tau=0$

Blast wave model: formula di Cooper-Frye (1)

- L'energia della particella $p_\mu u^\mu$ è data da:

$$p^\mu = (m_T \cosh y\,, p_x, p_y, m_T \sinh y)$$

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v_\perp^2}}(\cosh\eta\,, v_x, v_y, v_L) = \gamma_\perp(\cosh\eta\,, v_x, v_y, \sinh\eta)$$

$$p_\mu u^\mu = \gamma_\perp(m_T \cosh(y-\eta) - \vec{p}_T \cdot \vec{v}_\perp) = \gamma_\perp(m_T \cosh(y-\eta) - p_T v_\perp \cos\phi)$$

⇨ Dove φ è l'angolo tra la particella emessa e la direzione del flow

- Il prodotto $p^\mu d^3\sigma_\mu$ che appare nella formula di Cooper Frye è:

$$p^\mu = (m_T \cosh y\,, p_x, p_y, m_T \sinh y)$$

$$d^3\sigma_\mu = (\tau_{fo} \cosh\eta\,, 0{,}0, \tau_{fo} \sinh\eta) r dr d\phi d\eta$$

$$p^\mu d^3\sigma_\mu = \tau_{fo} m_T (\cosh\eta \cosh y - \sinh\eta \sinh y) r dr d\phi d\eta =$$
$$= \tau_{fo} m_T \cosh(y-\eta) r dr d\phi d\eta$$

Blast wave model: formula di Cooper-Frye (2)

- Ricapitolando:

$$p_\mu u^\mu = \gamma_\perp (m_T \cosh(y-\eta) - p_T v_\perp \cos\phi)$$

$$p^\mu d^3\sigma_\mu = \tau_{fo} m_T \cosh(y-\eta) r dr d\phi d\eta$$

- Sostituendo nella formula di Cooper-Frye:

$$E\frac{d^3N}{d^3p} = \frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} = \int_\Sigma d^3\sigma_\mu f_i(x,p) p^\mu$$

$$= \frac{g_i \tau_{fo}}{(2\pi)^3} \int r dr \int d\eta \int d\phi m_T \cosh(y-\eta) \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n+1} e^{-n\left[\frac{\gamma_\perp (m_T \cosh(y-\eta) - p_T v_\perp \cos\phi) - \mu_i}{T(x)}\right]}$$

- Dove T(x) è valutata sulla superficie di freeze-out, quindi **$T(x)=T_{fo}$** indipendentemente da x

Blast wave model: integrazione

- Integrazione della formula di Cooper-Frye:

$$E\frac{d^3N}{d^3p} = \frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} = \int_{\Sigma} d^3\sigma_\mu f_i(x,p)p^\mu =$$

$$= \frac{g_i \tau_{fo}}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(\mp 1)^{n+1}\int_0^R rdr\, e^{n\frac{\mu_i}{T_{fo}}}\int_0^\infty d\eta m_T \cosh(y-\eta)e^{-n\left[\frac{\gamma_\perp m_T \cosh(y-\eta)}{T_{fo}}\right]}\int_0^{2\pi} d\phi e^{n\left[\frac{\gamma_\perp p_T v_\perp \cos\phi}{T_{fo}}\right]} =$$

$$= \frac{g_i \tau_{fo}}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(\mp 1)^{n+1}\int_0^R rdr\, e^{n\frac{\mu_i}{T_{fo}}}\int_0^\infty d\eta m_T \cosh(y-\eta)e^{-n\left[\frac{\gamma_\perp m_T \cosh(y-\eta)}{T_{fo}}\right]} I_0\left(n\frac{\gamma_\perp p_T v_\perp}{T_{fo}}\right) =$$

$$= \frac{g_i \tau_{fo}}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(\mp 1)^{n+1}\int_0^R rdr\, e^{n\frac{\mu_i}{T_{fo}}} m_T K_1\left(n\frac{\gamma_\perp m_T}{T_{fo}}\right) I_0\left(n\frac{\gamma_\perp p_T v_\perp}{T_{fo}}\right) =$$

⇨ Dove si sono usate le definizioni delle funzioni di Bessel:

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi e^{z\cos\phi} \qquad K_1(z) = \int_0^\infty dx \cosh x\, e^{-z\cosh x}$$

Blast wave model: formula

- Si trascurano i termini con n>1
  - ⇨ Cioè si usa una Maxwell-Boltzmann trascurando gli effetti quantistici
- Si assume un profilo radiale di velocità (funzione di r) dato da:

$$v_\perp(r) = v_s \left(\frac{r}{R}\right)^k$$

  - ⇨ Dove v_s è la velocità sulla superficie di freeze-out
- Si introduce la rapidità di flusso radiale $\rho(r)$ definita come:

$$v_\perp(r) = \tanh \rho\,(r)$$

  - ⇨ Che implica:

$$\gamma_\perp(r) = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \rho\,(r)}} = \cosh \rho\,(r) \qquad ; \qquad v_\perp(r)\gamma_\perp(r) = \sinh \rho\,(r)$$

- Si ottiene quindi la formula della blast wave:

$$E\frac{d^3N}{d^3p} = \frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} \propto \int_0^R r dr m_T K_1\left(\frac{m_T \cosh \rho\,(r)}{T_{fo}}\right) I_0\left(\frac{p_T \sinh \rho\,(r)}{T_{fo}}\right)$$

  - ⇨ Che ha **T_{fo}, v_s e k** come **parametri**

Blast wave model: spettri

$$\frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} \propto \int_0^R r dr m_T K_1\left(\frac{m_T \cosh\rho(r)}{T_{fo}}\right) I_0\left(\frac{p_T \sinh\rho(r)}{T_{fo}}\right) \quad \text{con} \quad \rho(r) = \tanh^{-1} v_\perp(r) \;\; ; \quad v_\perp(r) = v_s\left(\frac{r}{R}\right)^k$$

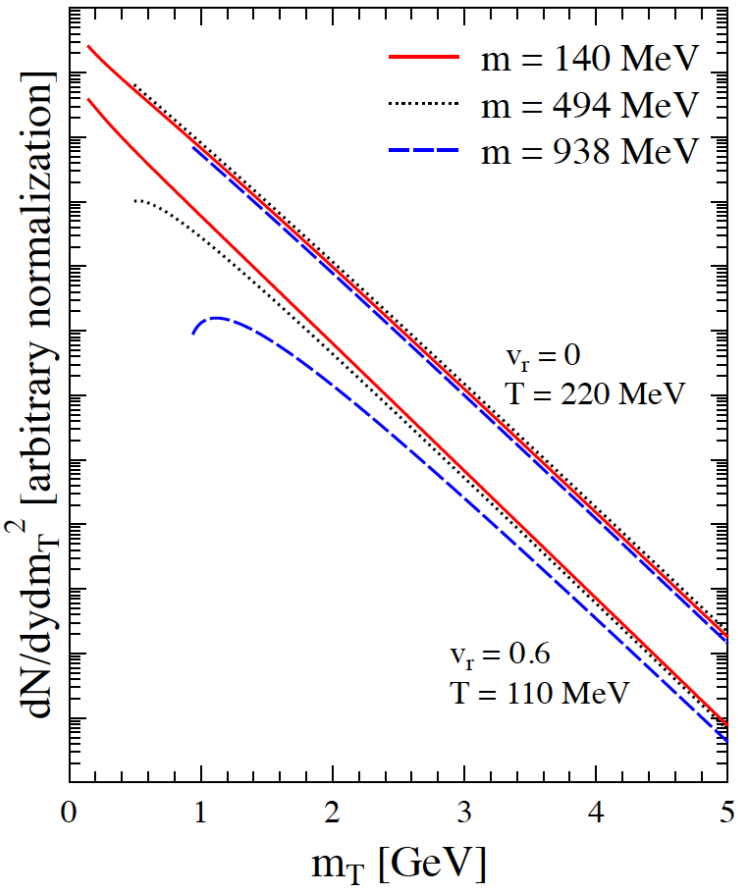
Caso di **velocità costante**: k=0; $v_\perp(r)=v_\perp$

- Per $v_\perp=0$ si ritrova l'm_T-scaling
- Il **radial flow rompe l'm_T-scaling** a basso p_T (**p_T<<m**)
  - ⇨ Si può ricavare che lo spettro per p_T<<m è circa esponenziale con:

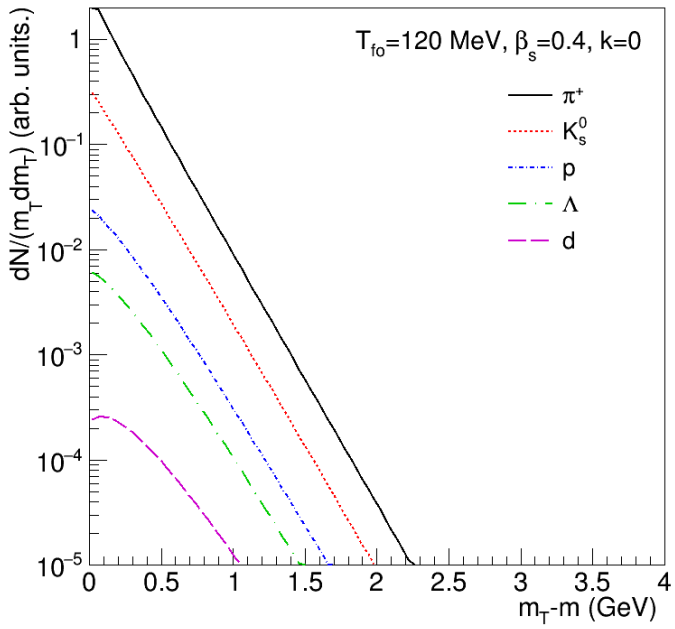
$$T_{slope} \approx T_{fo} + \frac{1}{2} m \langle v_\perp \rangle^2 \quad \text{per } p_T \ll m$$

- Per **p_T>>m** gli spettri sono circa esponenziali con la **stessa slope** per tutti gli adroni, con **T_{slope}>T_{fo}**
  - ⇨ La slope riflette una temperatura di freeze-out con un **blue-shift**:

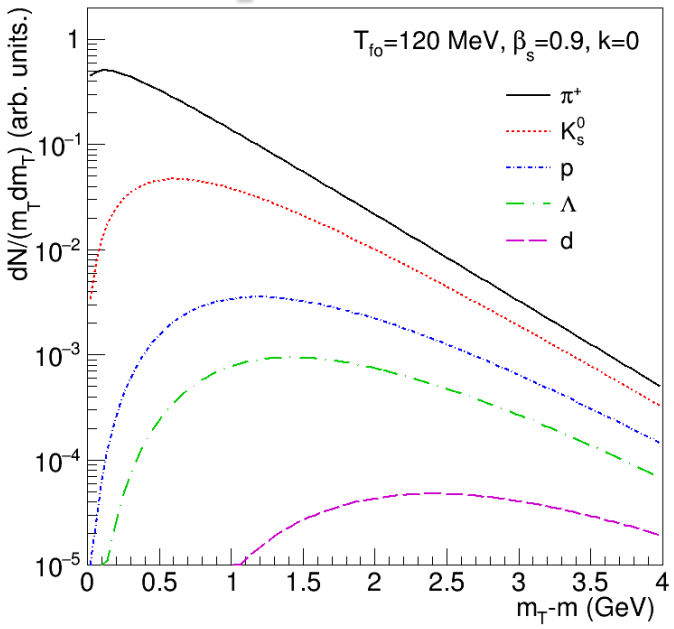
$$T_{slope} \approx T_{fo} \sqrt{\frac{1+v_\perp}{1-v_\perp}} \quad \text{per } p_T \gg m$$



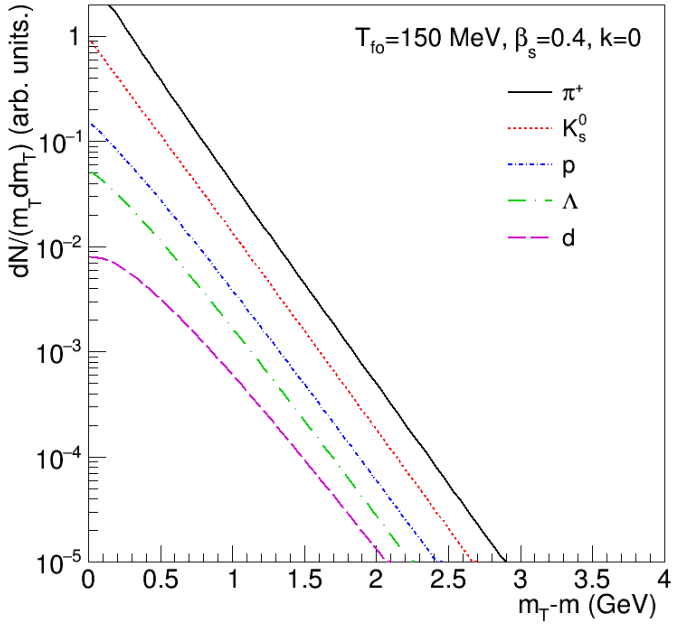
Blast wave model: spettri



Increasing β

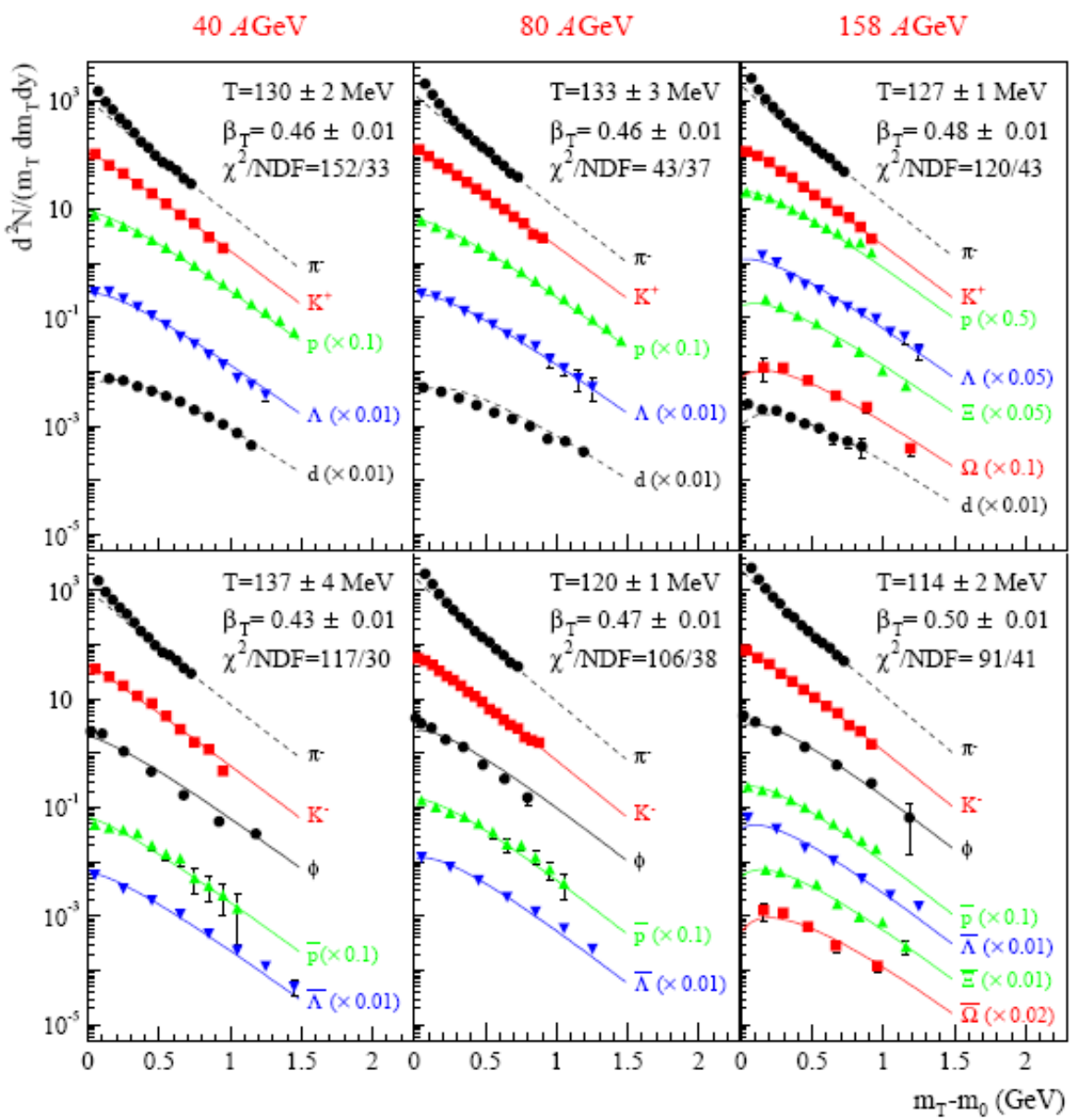


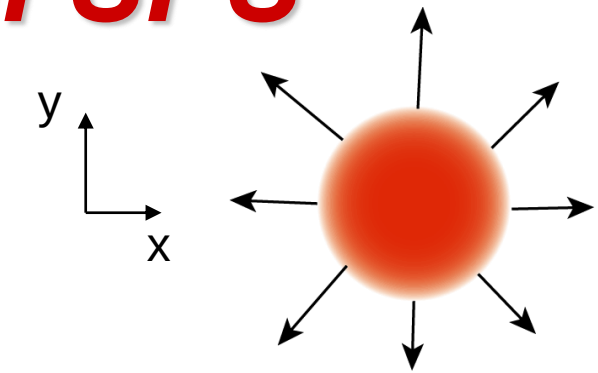
Increasing T_{fo}



- L'effetto della rottura dell'm_T-scaling a basso p_T è più pronunciato per particelle di massa maggiore
  - ⇨ Per grandi velocità v_s lo spettro degli adroni di alta massa ha un blast-wave peak per p_T>0 (o equivalentemente m_T-m>0)

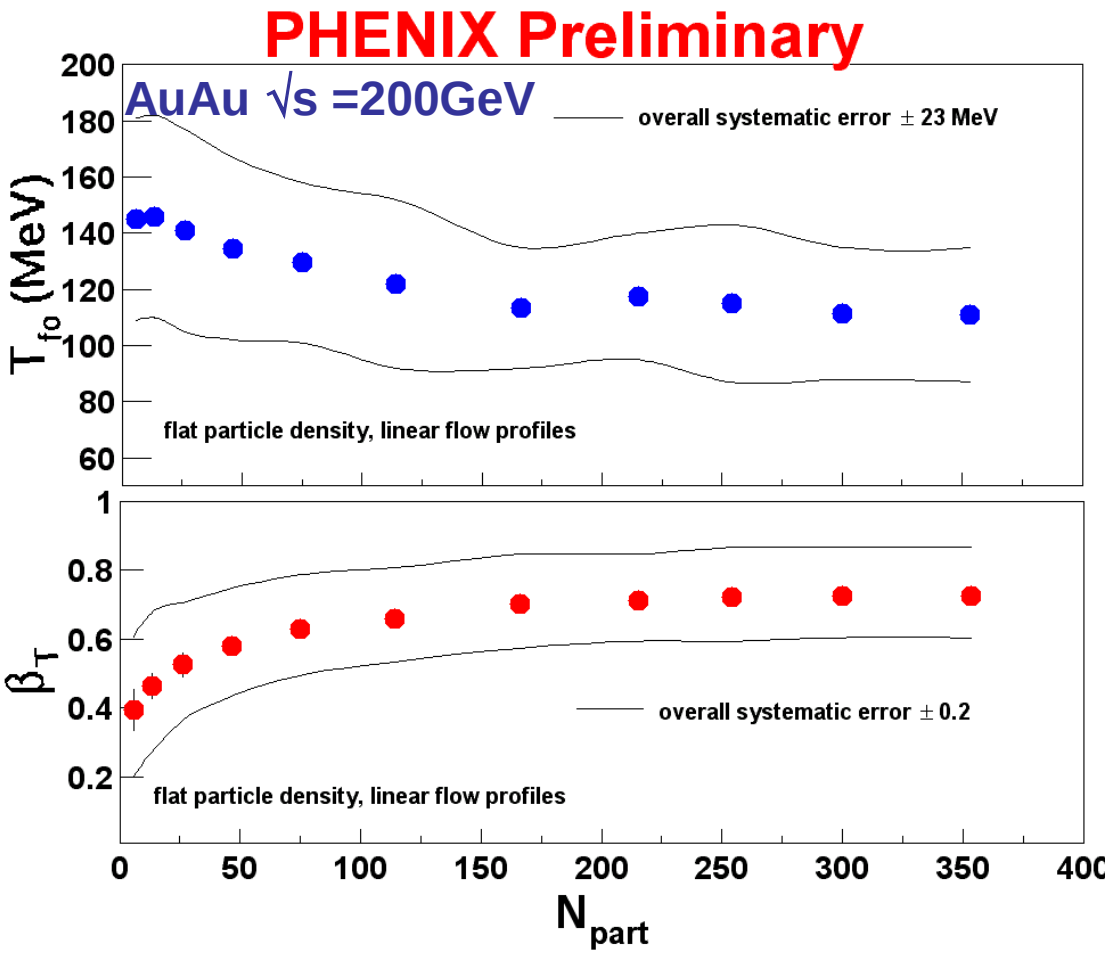
Radial Flow all'SPS

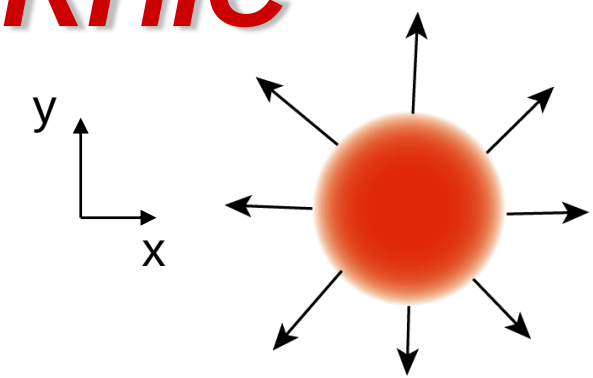




- Il radial flow rompe l' "m_T scaling" a bassi p_T
- Un fit agli spettri di particelle identificate con il blast-wave model permette di separare la componente termica dal moto collettivo
- In collisioni centrali alla massima energia dell'SPS ($\sqrt{s}$=17 GeV):
  - ⇨ $T_{fo} \approx 120$ MeV
  - ⇨ $\beta_\perp = 0.50$

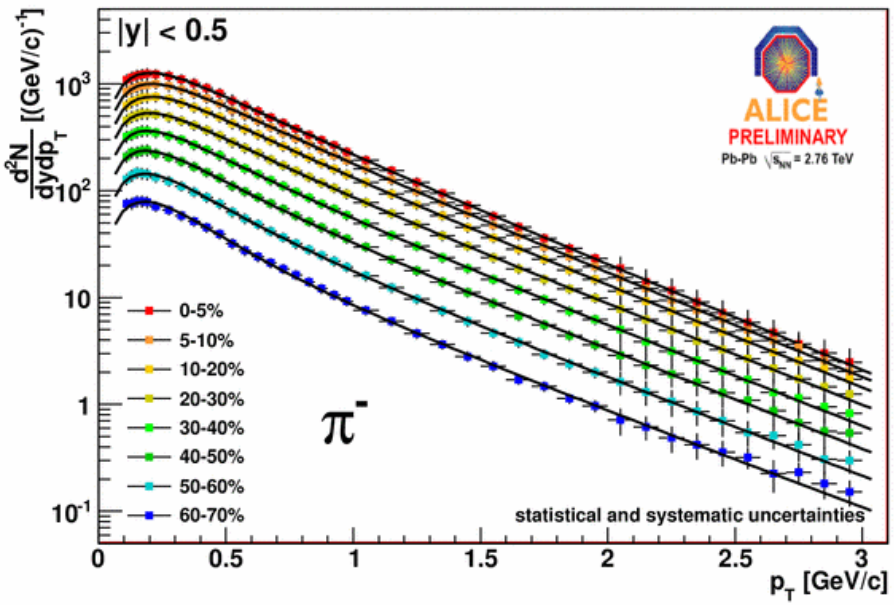
Radial Flow a RHIC

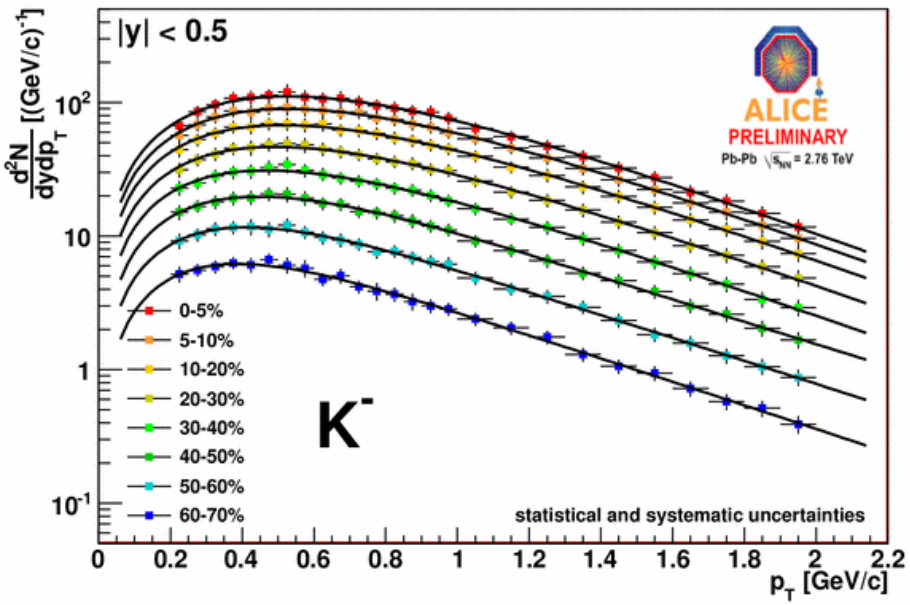


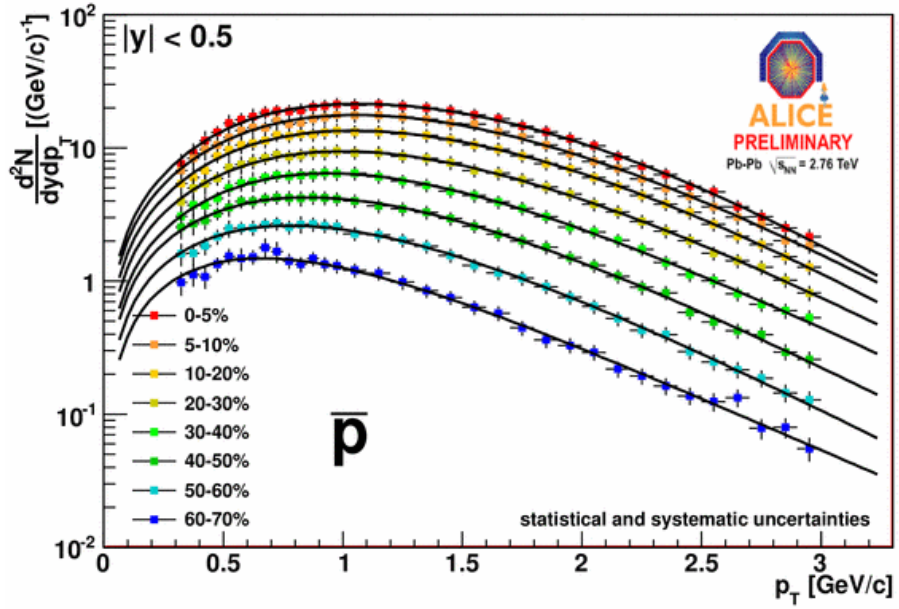


- Il radial flow rompe l' "m_T scaling" a bassi p_T
- Un fit agli spettri di particelle identificate con il blast-wave model permette di separare la componente termica dal moto collettivo
- In collisioni AuAu centrali alla massima energia di RHIC (√s=200 GeV):
  - ⇨ $T_{fo} \approx 110 \pm 23$ MeV
  - ⇨ $\beta_\perp = 0.7 \pm 0.2$

Radial flow a LHC (1)



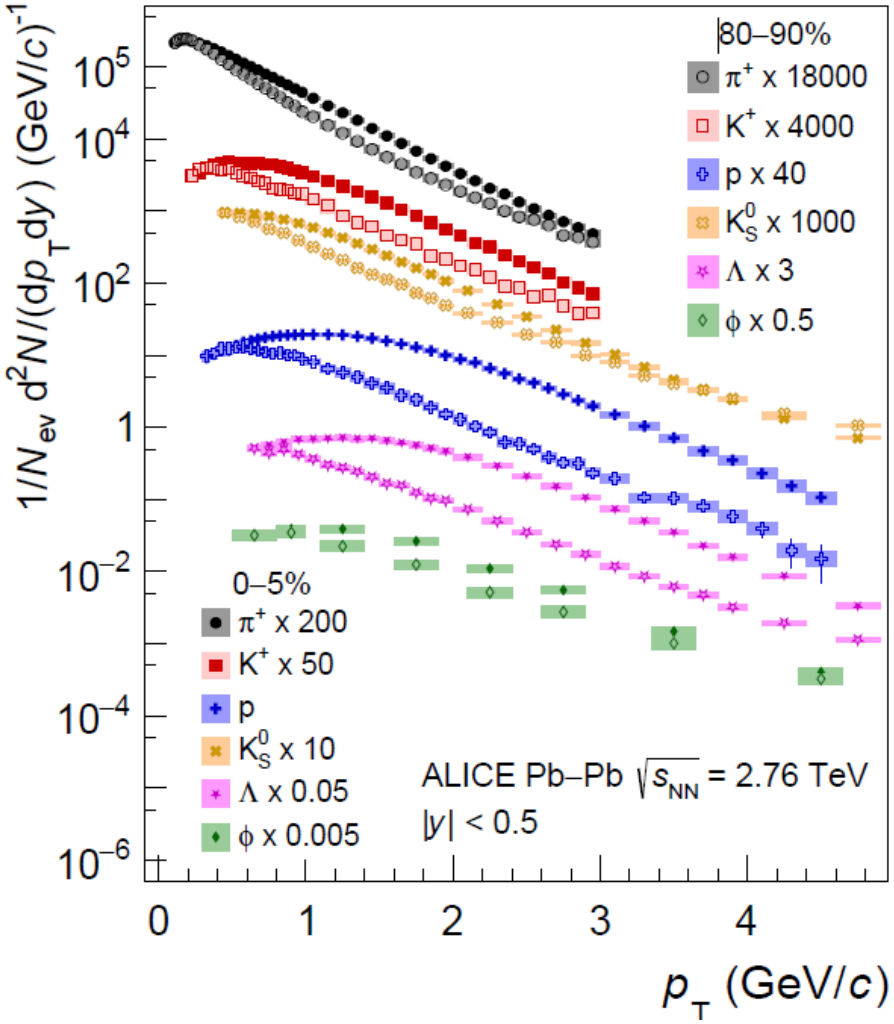




- Spettri misurati per pioni, Kaoni e protoni
- Fit simultaneo con il modello a blast-wave per estrarre T_{fo} e $\beta_\perp$

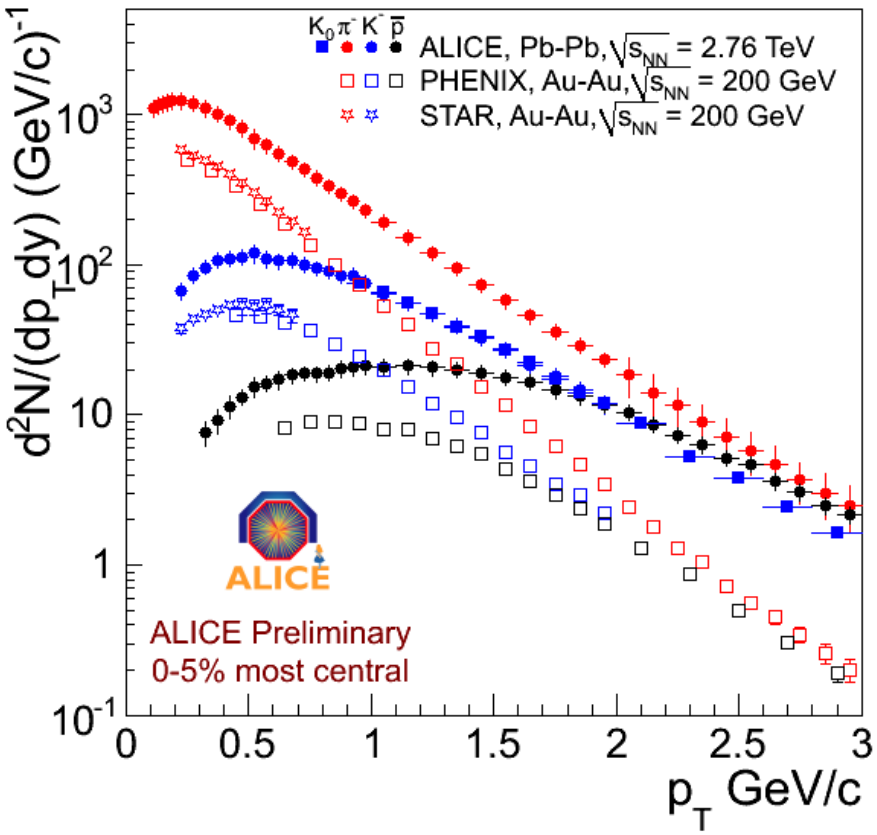
ALI-PREL-2713

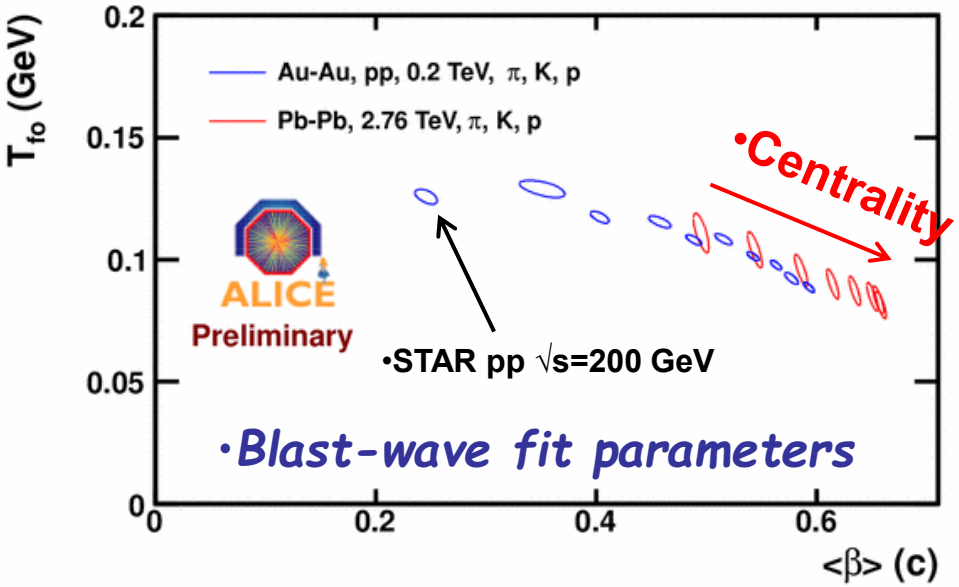
Radial flow a LHC (2)



- Le distribuzioni in p_T diventano più "piatte" (più "hard") al crescere della massa della particella e al crescere della centralità della collisione
  - ⇨ Effetto della combinazione tra moto di **agitazione termica** (che dipende dalla temperatura di freeze-out) e **moto collettivo** (radial flow) che dipende dalla massa della particella e dai gradienti di pressione

Radial flow a RHIC e LHC

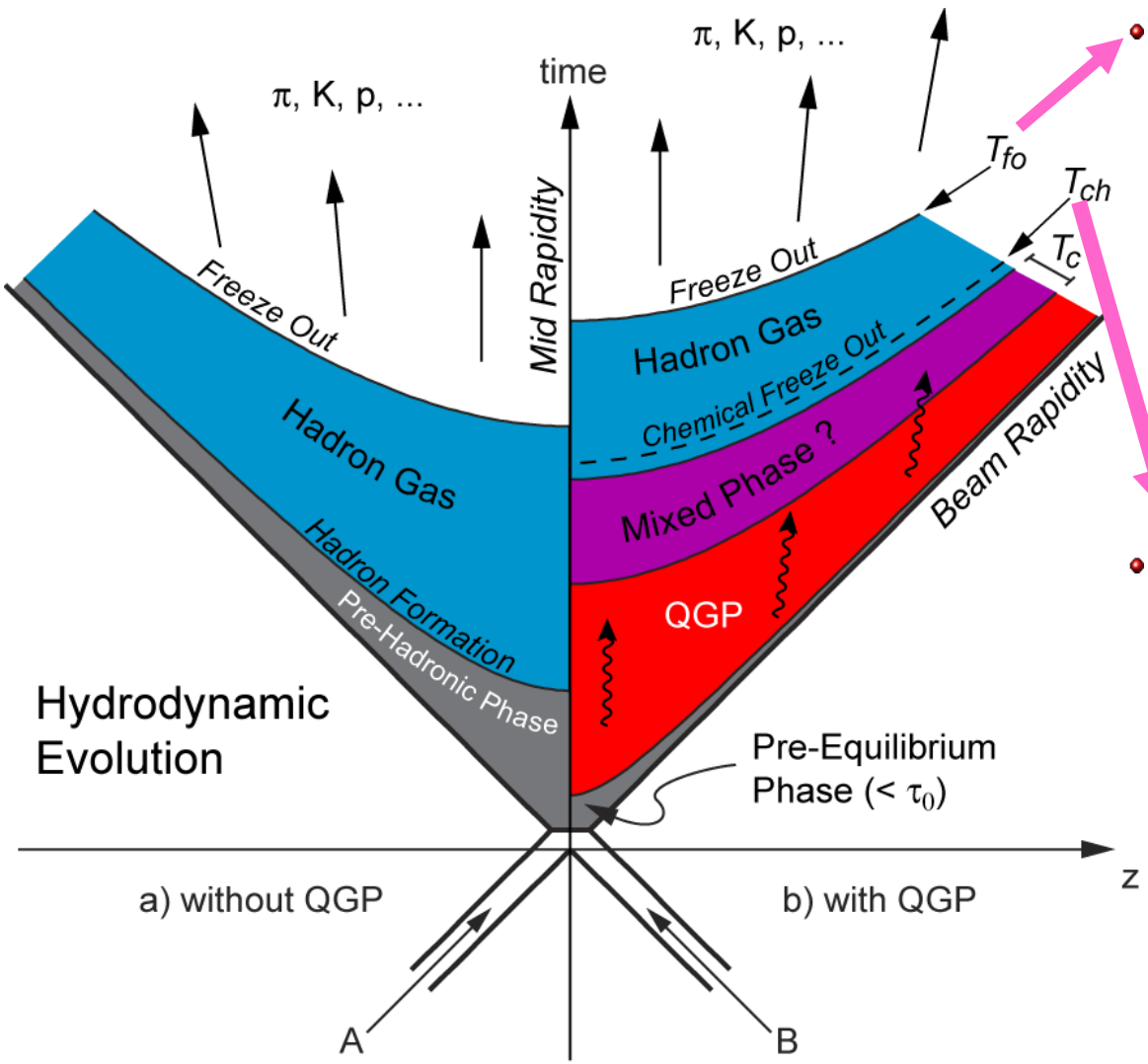




- Spettri misurati a LHC sono più hard di quelli misurati a RHIC
  - ⇨ Radial flow più forte a LHC

- Dal fit agli spettri si vede che la velocità del radial flow è maggiore del 10% in collisioni centrali a LHC rispetto a collisioni centrali a RHIC

Freeze-out chimico e freeze-out termico



- Freeze out termico
  - ⇨ Cessano le interazioni elastiche
  - ⇨ Si fissa la dinamica delle particelle ("momentum spectra")

T_{fo} ~ 110-130 MeV

- Freeze-out chimico
  - ⇨ Cessano le interazioni inelastiche
  - ⇨ Si fissano le abbondanze delle particelle ("chemical composition")

T_{chem} ~ 160 MeV

Evoluzione dinamica del sistema

- I fit agli spettri in p_T permettono di ricavare la temperatura T_{fo} e la velocità di espansione radiale $\beta_\perp$ al momento del thermal freeze-out e indicano che:
  - ⇨ la fireball creata in una collisione di ioni attraversa il freeze-out termico a una temperatura di 100-130 MeV
  - ⇨ Nell'istante del freeze-out si trova in uno stato di rapida espansione radiale collettiva, con una velocità dell'ordine di 0.5-0.7 volte la velocità della luce
- ATTENZIONE: i valori di T_{fo} e $\beta_\perp$ sono i risultati di un fit agli spettri e non è a priori garantito che i loro valori abbiano senso dal punto di vista fisico
  - ⇨ Per capire se i valori di temperatura di freeze-out e di velocità di flusso radiale hanno un significato fisico, bisogna verificare che siano riprodotti da modelli teorici basati sull'evoluzione dinamica del sistema →FLUIDODINAMICA

Fluidodinamica

Fluidodinamica

- Come la termodinamica, la fluidodinamica cerca di spiegare un sistema usando variabili macroscopiche (temperatura, pressione …) che riflettono il comportamento dei componenti microscopici del sistema
- Parametri microscopici del fluido:
  - ⇨ Libero cammino medio tra due collisioni (λ)
  - ⇨ Velocità media di agitazione termica delle particelle (v_{THERM})
- Parametri macroscopici del fluido:
  - ⇨ Dimensione del sistema (L)
  - ⇨ Velocità del fluido (v_{FLUID})
  - ⇨ Pressione (p)
  - ⇨ Densità del fluido (ρ)
  - ⇨ Velocità del suono nel fluido: $c_S = \sqrt{dp/d\rho}$
  - ⇨ Viscosità: $\eta \sim \lambda v_{THERM}$

Fluidodinamica in collisioni di ioni

- Dopo la collisione si crea un gas denso di particelle
  - ⇨ Dimensioni dell'ordine della regione di overlap dei nuclei
  - ⇨ Il sistema è fortemente interagente: il libero cammino medio λ è piccolo rispetto alle dimensioni L del sistema → raggiunge l'equilibrio termodinamico velocemente
- A un certo istante τ_{equ} il sistema raggiunge l'equilibrio termodinamico
  - ⇨ Si può usare la fluidodinamica per un liquido ideale
- Il fluido si espande, la densità diminuisce e quindi aumenta il libero cammino medio λ e aumenta la dimensione del sistema
- A un certo istante τ_{fo} il libero cammino medio λ diventa dello stesso ordine di grandezza della dimensione del sistema
  - ⇨ Non si può più assumere il liquido ideale
  - ⇨ Questo istante viene chiamato Freeze-out termico (o cinetico) ed è caratterizzato dalla temperatura di freeze-out T_{fo}

Equazioni della fluidodinamica

- Le equazioni della fluidodinamica sono le **leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto**
- In caso di fluido in moto con velocità relativistiche, le equazioni di conservazione del momento e dell'energia/massa si scrivono in forma tensoriale come:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{con} \qquad T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$$

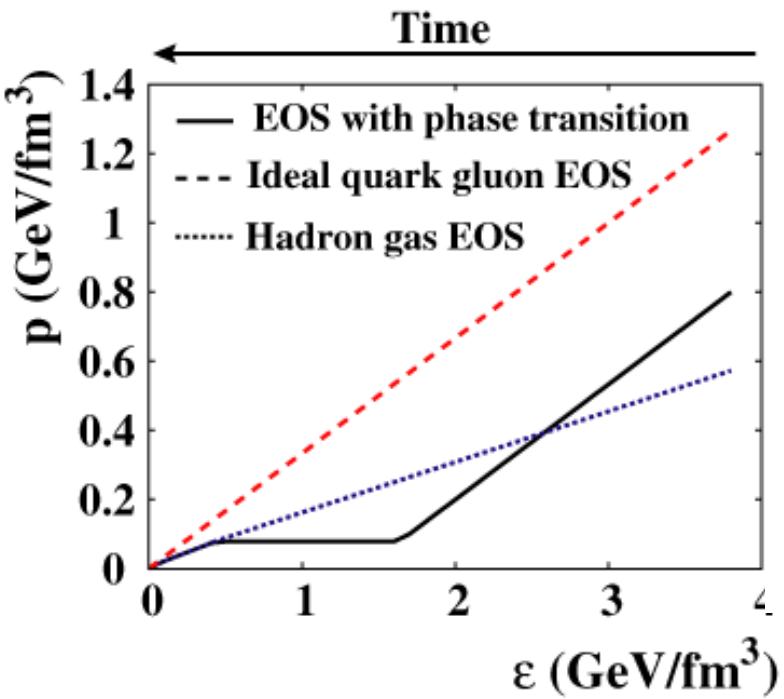
- A queste si aggiunge una equazione di continuità che rappresenta la conservazione del numero barionico:

$$\partial_\mu j_B^\mu = 0 \qquad \text{con} \qquad j^\mu = n_B u^\mu$$

- Sono quindi 5 equazioni differenziali alle derivate parziali con 6 incognite (ε, p , n_B e le 3 componenti della velocità)

Equazione di stato

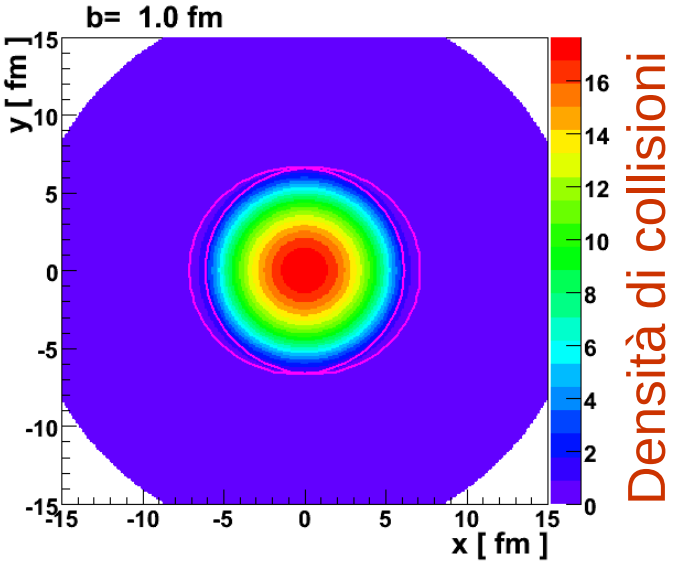
- Per chiudere il sistema delle 5 equazioni di conservazione di energia, impulso e numero barionico serve un'ulteriore relazione
- Si deve quindi usare un'equazione di stato per la materia nucleare che metta in relazione la pressione e la densità di energia del sistema

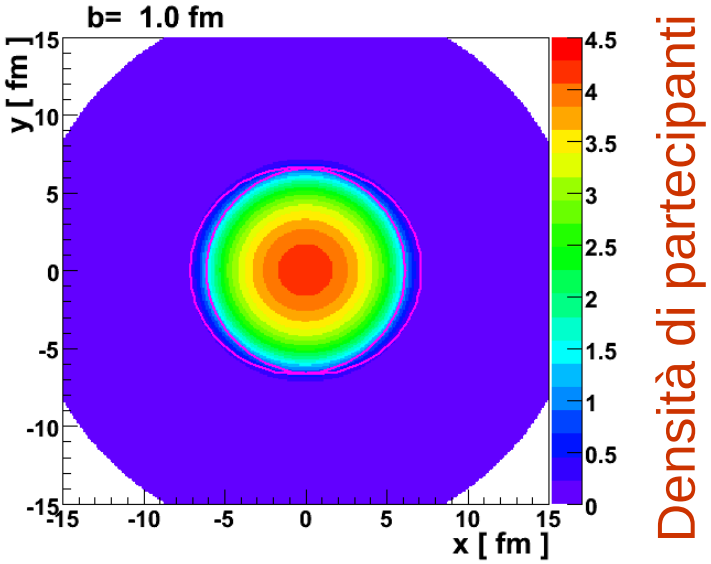


- Esempio: equazione di stato dal bag model con transizione di fase del prim'ordine
  - ⇨ Per **$T<T_c$**: equazione di stato di un gas di adroni non interagenti
  - ⇨ Per **$T>T_c$**: equazione di stato di un gas di quark e gluoni non interagenti a massa nulla con bag-pressure B ($\varepsilon=3p+4B$)

Condizioni iniziali

- Nelle prime fasi dell'evoluzione della fireball il sistema non è in equilibrio, quindi non si può applicare la fluidodinamica
- Bisogna quindi iniziare l'evoluzione fluidodinamica a un tempo τ_{equ} a partire dallo stato del sistema (= distribuzioni spaziali di energia e entropia) al tempo τ_{equ}
- La modellizzazione delle condizioni iniziali può essere fatta con:
  - ⇨ Codici Monte Carlo che descrivono le cascate partoniche (UrQMD, AMPT)
  - ⇨ Ricavare la densità di energia e di entropia dalle densità di partecipanti e collisioni calcolate con il modello di Glauber



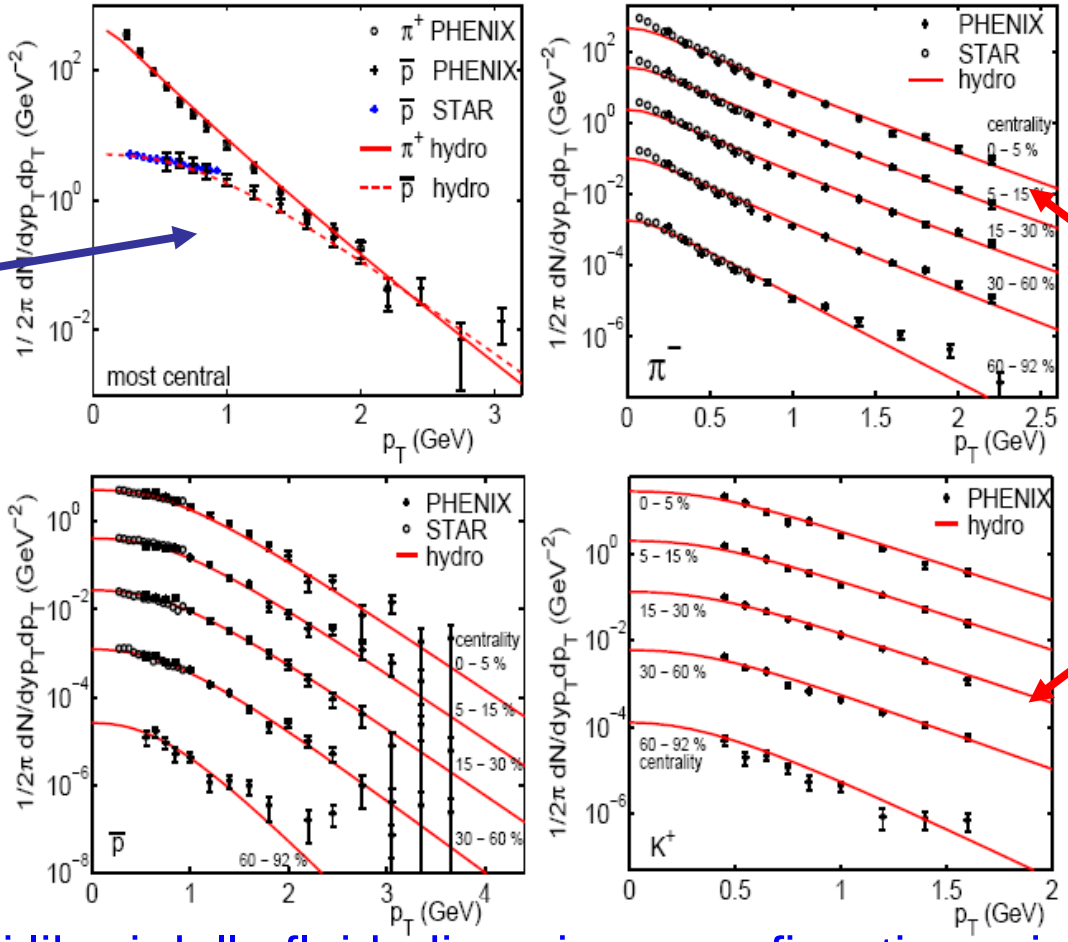


Freeze-out termico

- L'evoluzione idrodinamica termina quando il libero cammino medio delle particelle diventa dell'ordine delle dimensioni del sistema e quindi il sistema non è in grado di mantenersi in equilibrio termodinamico
- Il termine dell'evoluzione idrodinamica viene normalmente descritto secondo le prescrizioni di Cooper-Frye
  - ⇨ Si postula una transizione immediata di tutte le particelle all'interno di un elemento di fluido da una situazione di equilibrio termico (libero cammino medio = zero) a una di espansione libera (libero cammino medio $\rightarrow\infty$)
  - ⇨ La densità di energia al momento del freeze-out è uno dei parametri dei modelli idrodinamici che viene ottimizzato per riprodurre i dati sperimentali

Fluidodinamica e radial flow (1)

Gli spettri di pioni e antiprotoni in eventi centrali fissano i parametri del modello



Tutti gli altri spettri sono calcolati senza altri parametri liberi

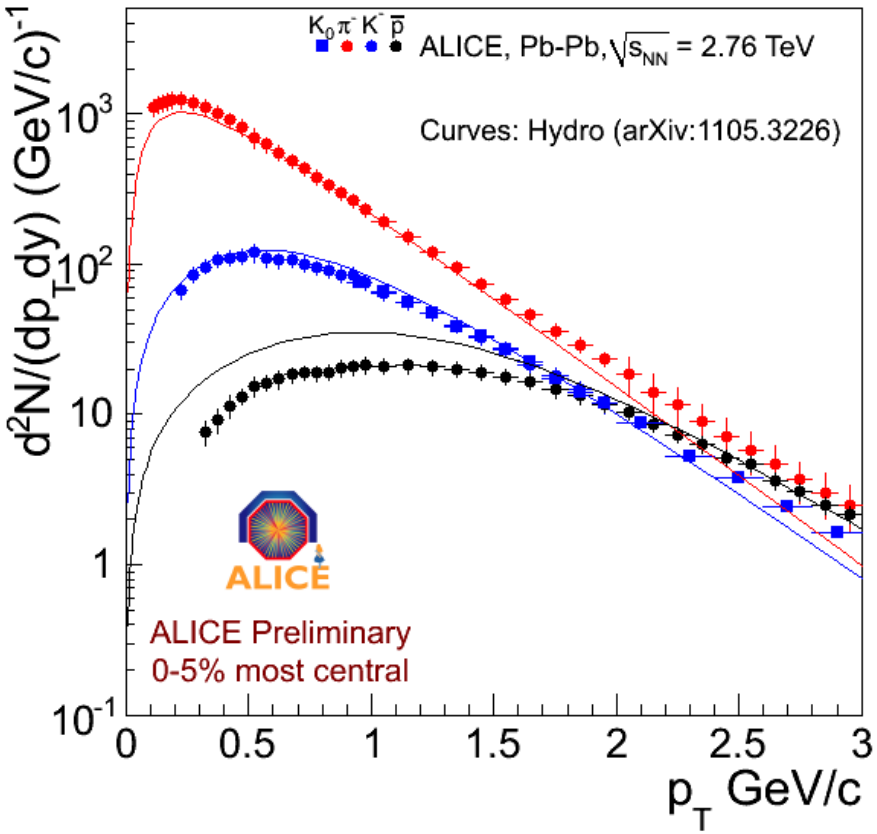
- I parametri liberi della fluidodinamica sono fissati per riprodurre gli spettri in p_T di pioni e antiprotoni per collisioni centrali
- Una volta che i parametri sono stati fissati per pioni e protoni in collisioni centrali, le distribuzioni in p_T alle altre centralità e per gli altri adroni sono calcolati senza inserire altri parametri.

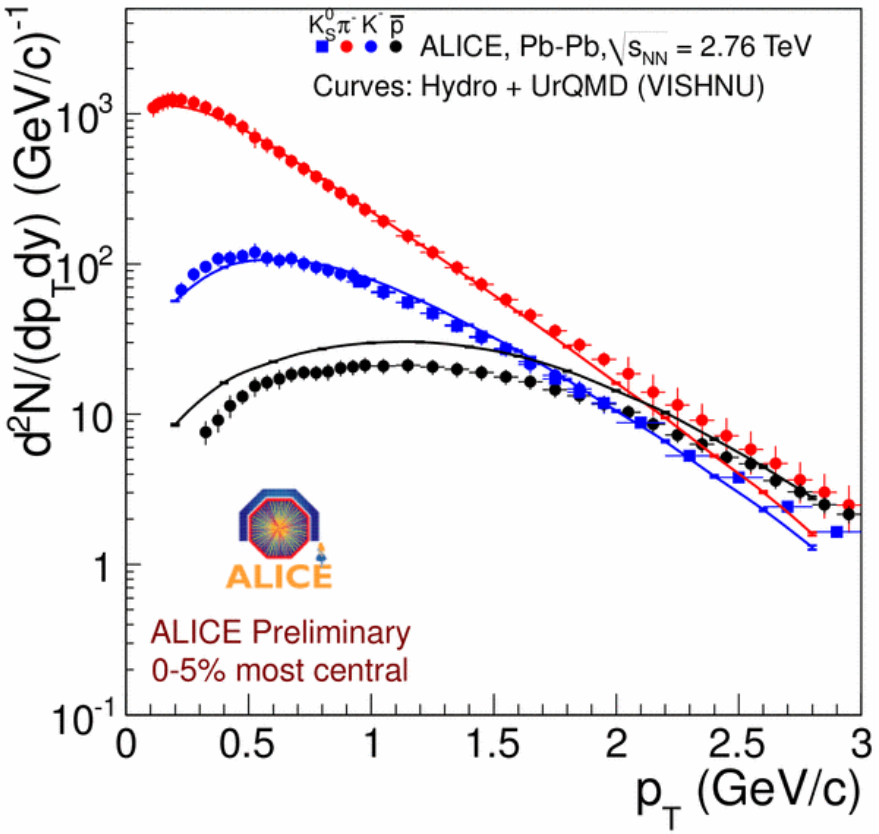
Fluidodinamica e radial flow (2)

	SPS	RHIC 1	RHIC 2
$\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$ (GeV)	17	130	200
s_{eq} (fm^{-3})	43	95	110
T_{eq} (MeV)	257	340	360
τ_{eq} (fm/c)	0.8	0.6	0.6

- I parametri inseriti nell'evoluzione fluidodinamica dipendono dall'energia della collisione
- Ad esempio per collisioni Au-Au a $\sqrt{s}$=130 GeV
  - ⇨ τ_{equ} = 0.6 fm/c $\Rightarrow T_{equ}$ = 340 MeV $\Rightarrow \varepsilon_{equ}$ = 25 GeV/fm^3
  - ⇨ s_{equ} = 95 fm^{-3}
  - ⇨ ε_{fo} = 0.075 GeV/fm^3 $\Rightarrow T_{fo}$ = 130 MeV
- Il tempo per equilibrare il sistema diminuisce al crescere di $\sqrt{s}$

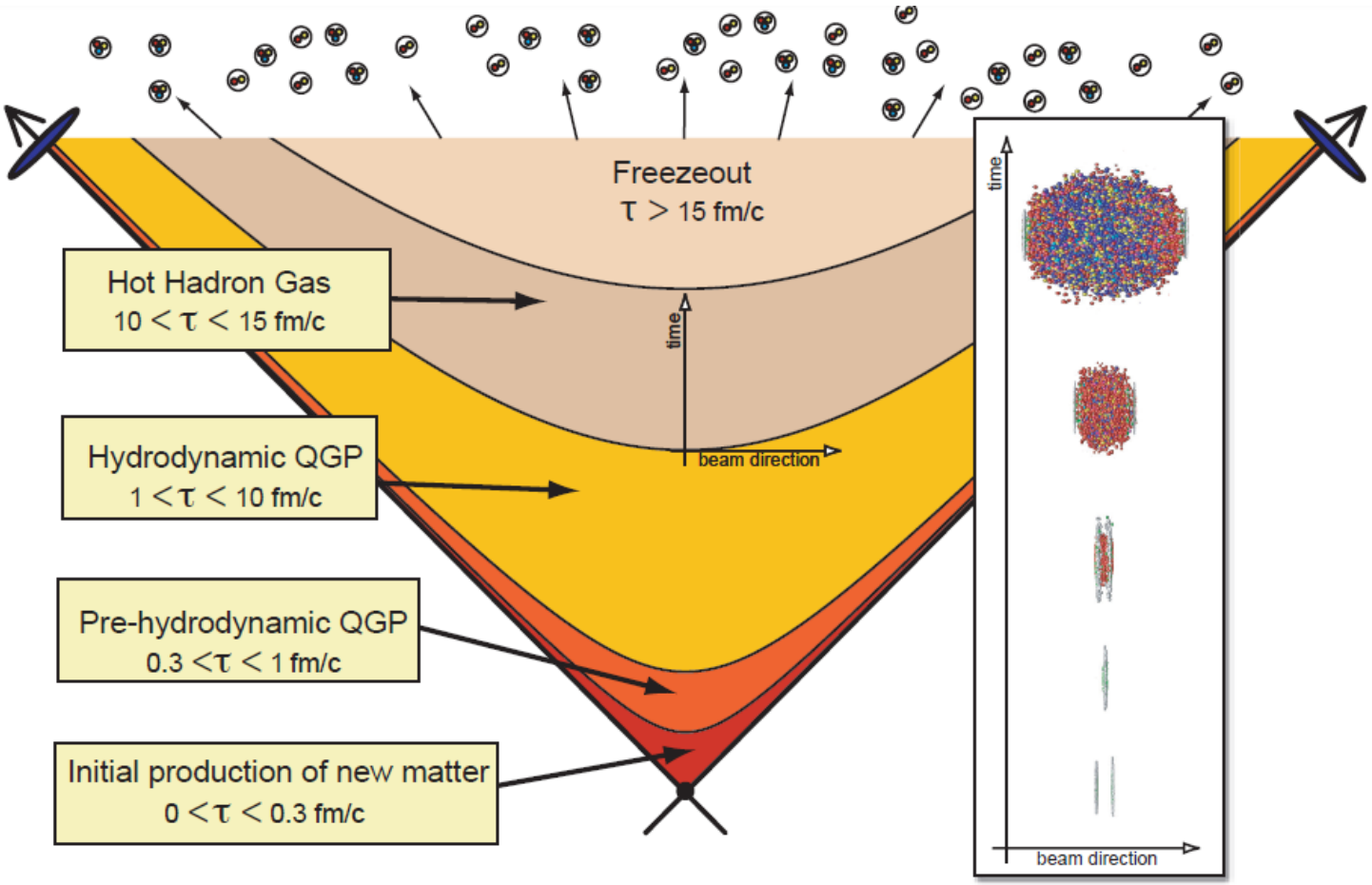
Fluidodinamica e radial flow a LHC





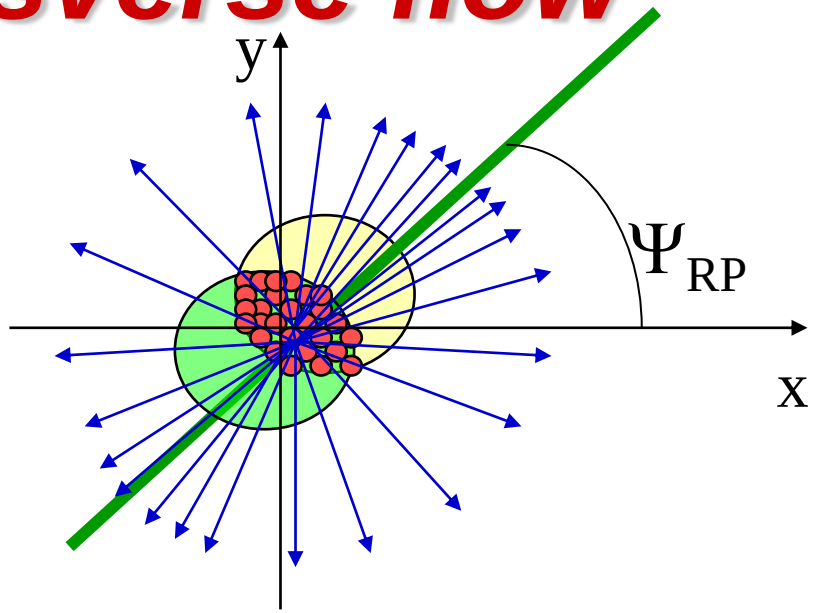
- Predizione idrodinamica basata sull'estrapolazione dei parametri da RHIC
  - ⇨ OK per pioni e kaoni, per i protoni non sono riprodotti nè la forma nè lo yield
- Idrodinamica per il QGP + cascata adronica (= modello microscopico) per le fasi successive all'adronizzazione
  - ⇨ OK per pioni e kaoni, per i protoni la froma dello spettro è riprodotta correttamente

Evoluzione fluidodinamica



Altri tipi di moto collettivo

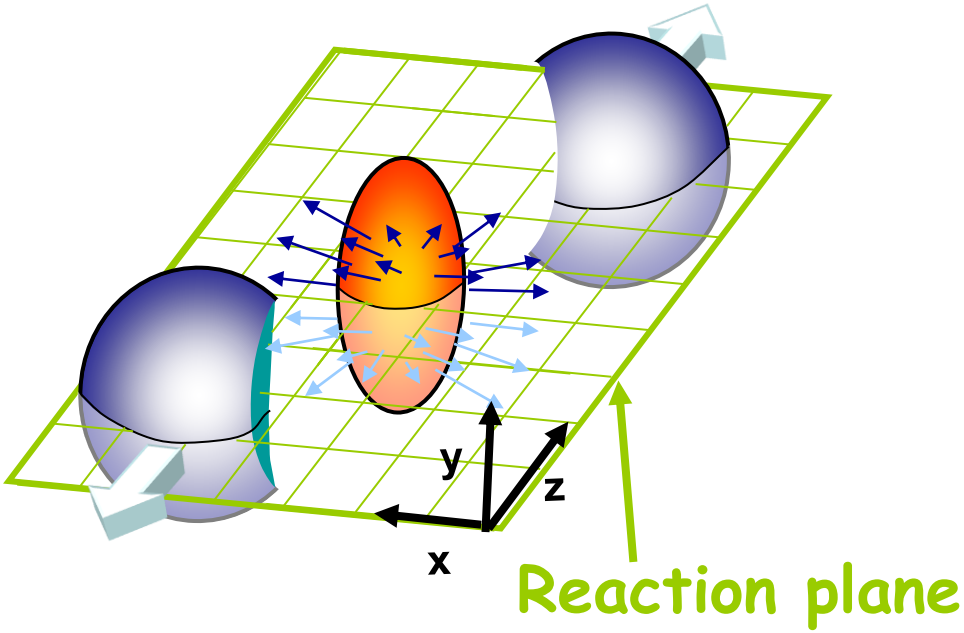
Anisotropic transverse flow

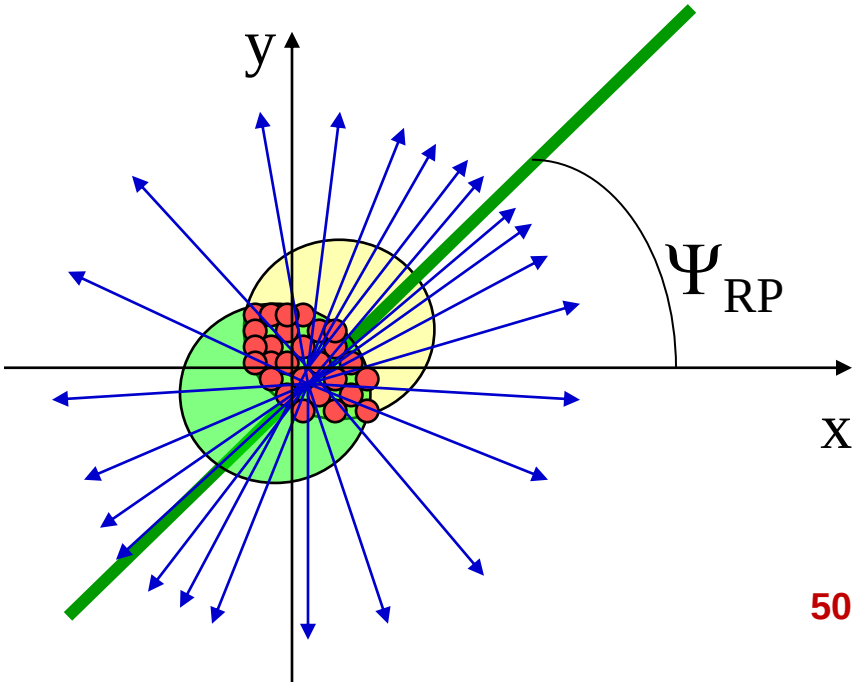


- In collisioni di ioni il parametro di impatto genera una direzione preferenziale nel piano trasverso
  - ⇨ Il piano della reazione (**reaction plane)** è il piano definito dal parametro di impatto e la direzione del fascio
- L'anisotropic transverse flow è una **correlazione** tra l'angolo azimutale [$=\tan^{-1}(p_y/p_x)$] delle particelle prodotte e il parametro di impatto (cioè il reaction plane)
- Si genera un anisotropic flow se i momenti delle particelle nello stato finale dipendono non solo dalle condizioni fisiche **locali** nel loro punto di produzione, ma anche dalla geometria **globale** dell'evento
  - ⇨ L'anisotropic flow è una segnatura non ambigua di un comportamento collettivo

Piano della reazione

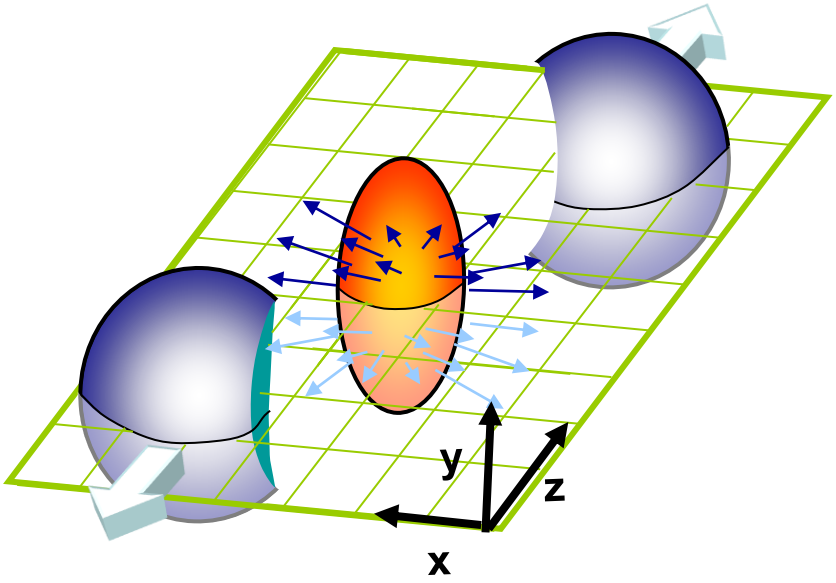
- L'anisotropic transverse flow è quindi una correlazione tra la direzione (= momento) delle particelle prodotte e il parametro di impatto della collisione
  - ⇨ Il piano definito dal parametro di impatto e dalla direzione del fascio si chiama piano della reazione
  - ⇨ L'angolo azimutale del vettore parametro di impatto nel piano trasverso si indica con Ψ_{RP}





Anisotropic transverse flow

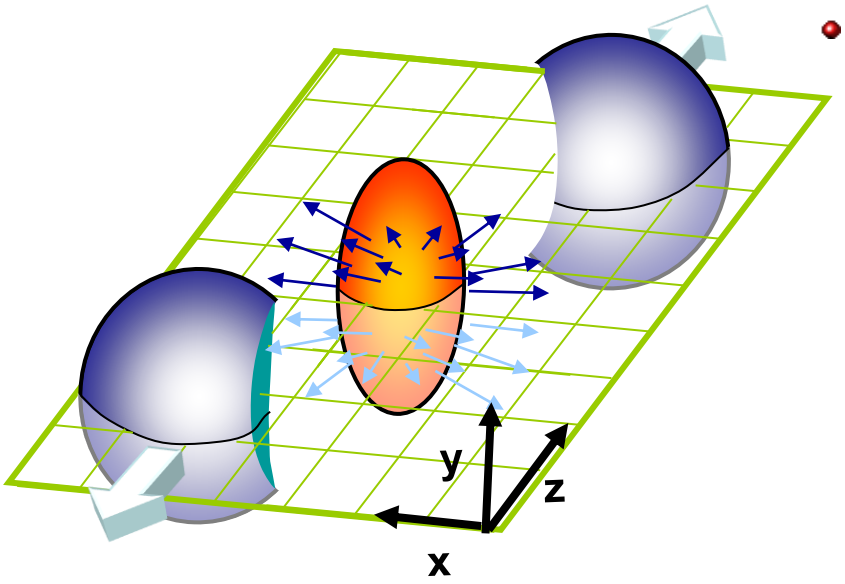
- **Correlazione** tra le velocità delle particelle prodotte e il parametro di impatto
- In collisioni con b≠0 (non centrali) si crea una fireball con un'anisotropia geometrica
  - ⇨ La regione di overlap ha una forma ellissoidale



- Dal punto di vista macroscopico:
  - ⇨ I gradienti di pressione (e quindi le forze che spingono le particelle) nel piano trasverso sono anisotropi (= dipendenti da φ)
    - ✓ ***Il gradiente di pressione è maggiore nel piano x,z (lungo il parametro di impatto) che lungo y***
  - ⇨ La velocità del fluido dipende da φ
  - ⇨ La distribuzione azimutale delle particelle rivelate sarà anisotropa

Anisotropic transverse flow

- **Correlazione** tra le velocità delle particelle prodotte e il parametro di impatto
- In collisioni con b≠0 (non centrali) si crea una fireball con un'anisotropia geometrica
  - ⇨ La regione di overlap ha una forma ellissoidale



- Dal punto di vista microscopico:
  - ⇨ Le interazioni tra le particelle prodotte (se sufficientemente forti) possono convertire questa anisotropia geometrica iniziale in un'anisotropia nella distribuzione dei momenti delle particelle che può essere misurata

Anisotropic transverse flow

- Si parte dalle distribuzioni azimutali delle particelle rispetto al piano della reazione (φ- Ψ_{RP})
- Si usa uno sviluppo in serie di Fourier :

$$\frac{dN}{d(\phi - \Psi_{RP})} = \frac{N_0}{2\pi}\left(1 + 2v_1 \cos(\phi - \Psi_{RP}) + 2v_2 \cos\big(2(\phi - \Psi_{RP})\big) + \ldots\right)$$

⇨ I termini con i seni non sono presenti perché la distribuzione di particelle deve essere simmetrica (pari) rispetto a Ψ_{RP}

⇨ I coefficienti delle varie armoniche (v_1, v_2,…) descrivono le differenze rispetto a una distribuzione isotropa

⇨ Dalle proprietà delle serie di Fourier si ricava che:

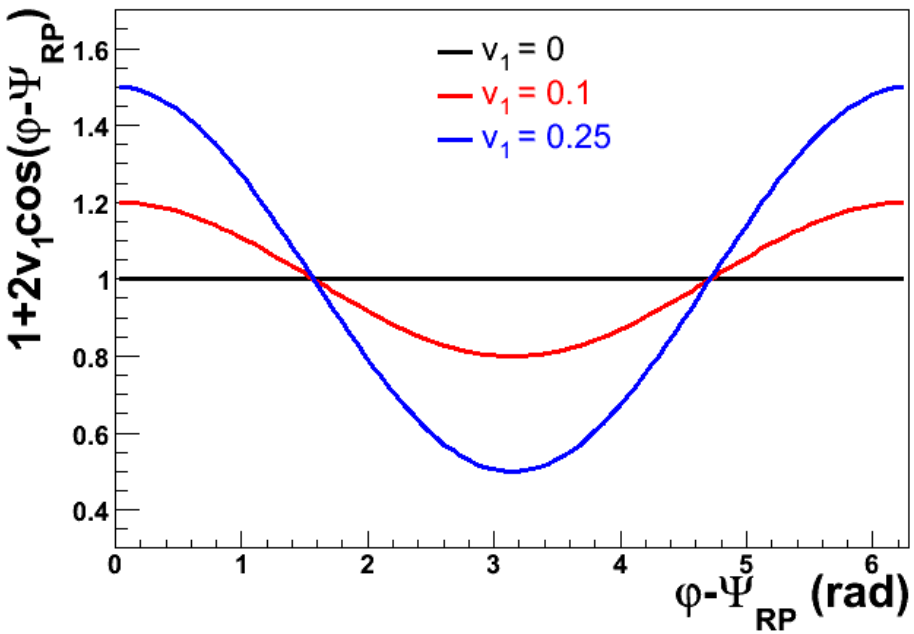
$$v_n = \langle \cos[n(\phi - \Psi_{RP})] \rangle$$

Coefficiente v_1: Directed flow

$$\frac{dN}{d(\phi - \Psi_{RP})} = \frac{N_0}{2\pi}\left(1 + 2v_1 \cos(\phi - \Psi_{RP}) + 2v_2 \cos\big(2(\phi - \Psi_{RP})\big) + \ldots\right)$$

Directed flow

$$v_1 = \langle \cos(\phi - \Psi_{RP}) \rangle$$



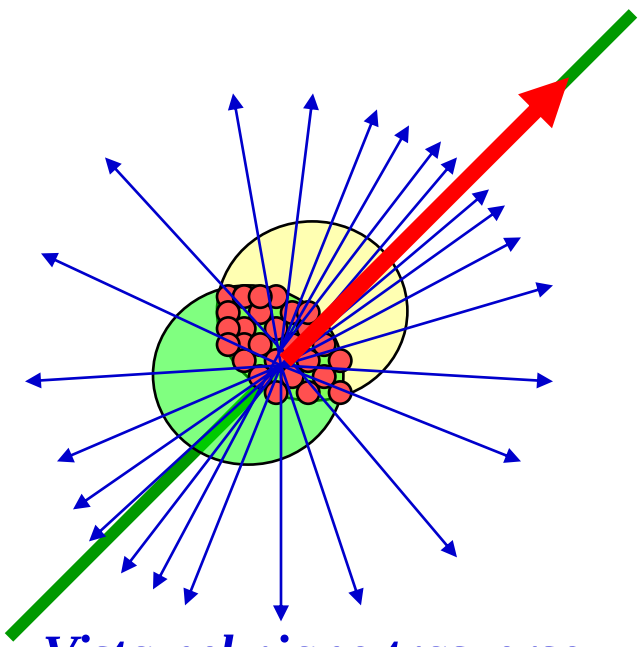
- Se $v_1 \neq 0$ c'è una differenza tra il numero di particelle dirette parallelamente (0°) e anti-parallelamente (180°) al parametro di impatto
- Il directed flow rappresenta quindi una direzione preferenziale di emissione delle particelle

Coefficiente v_1: Directed flow

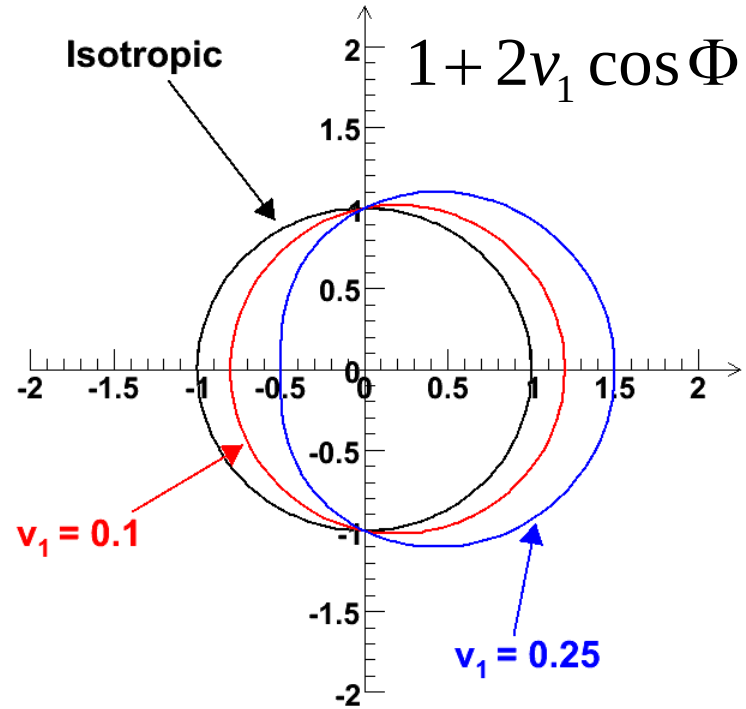
$$\frac{dN}{d(\phi - \Psi_{RP})} = \frac{N_0}{2\pi}\left(1 + 2v_1 \cos(\phi - \Psi_{RP}) + 2v_2 \cos\big(2(\phi - \Psi_{RP})\big) + \ldots\right)$$

Directed flow

$$v_1 = \langle \cos(\phi - \Psi_{RP}) \rangle$$



Vista nel piano trasverso



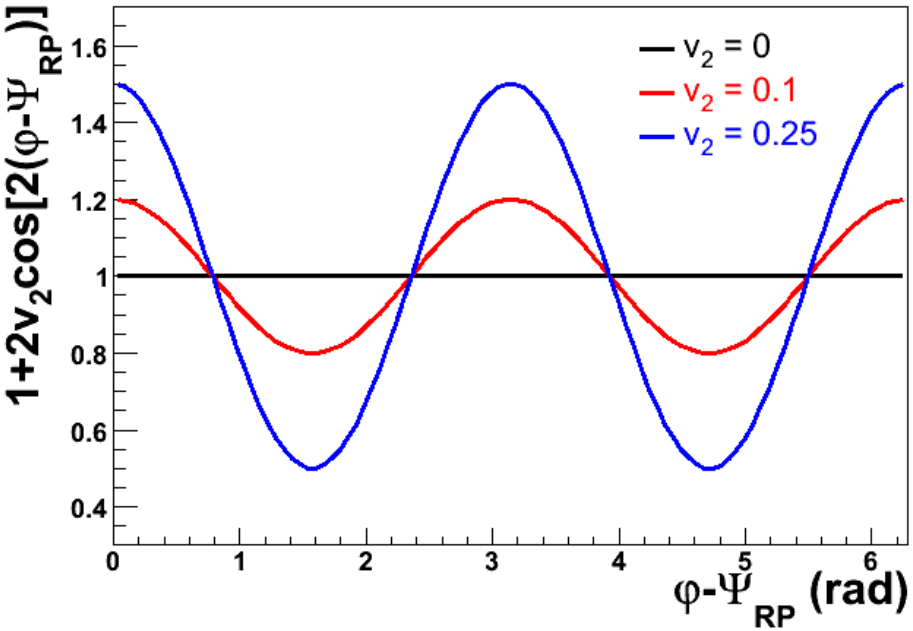
- Il directed flow rappresenta una traslazione della sorgente delle particelle nel piano trasverso

Coefficiente v_2: Elliptic flow

$$\frac{dN}{d(\phi - \Psi_{RP})} = \frac{N_0}{2\pi}\left(1 + 2v_1 \cos(\phi - \Psi_{RP}) + 2v_2 \cos\left(2(\phi - \Psi_{RP})\right) + \ldots\right)$$

Elliptic flow

$$v_2 = \langle \cos[2(\phi - \Psi_{RP})] \rangle$$



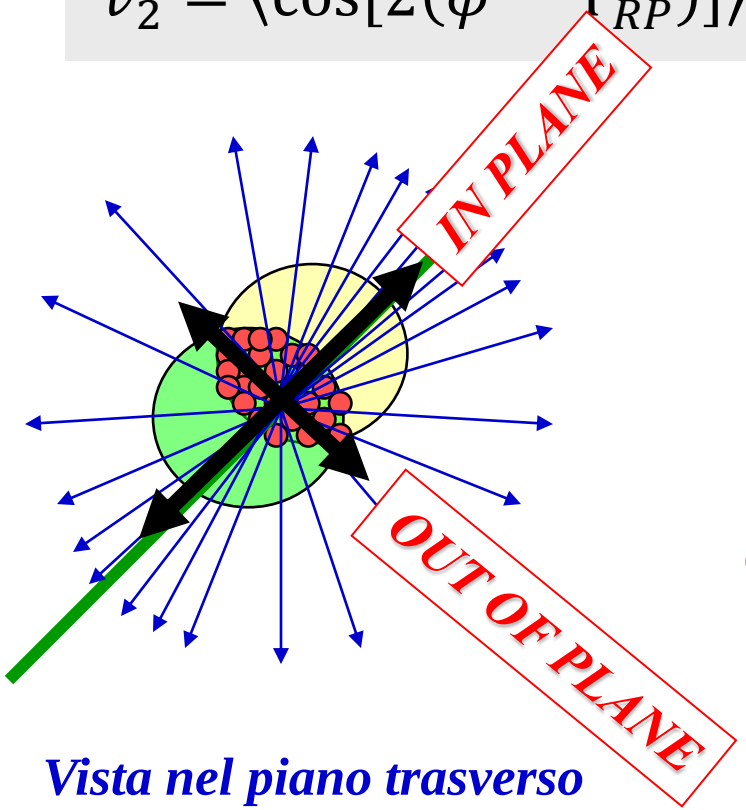
- Se $v_2 \neq 0$ c'è una differenza tra il numero di particelle dirette parallele (0° e 180°) e perpendicolari (90° e 270°) al parametro di impatto
- E' l'effetto che ci si aspetta dalla differenza tra i gradienti di pressione paralleli e ortogonali al parametro di impatto

Coefficiente v_2: Elliptic flow

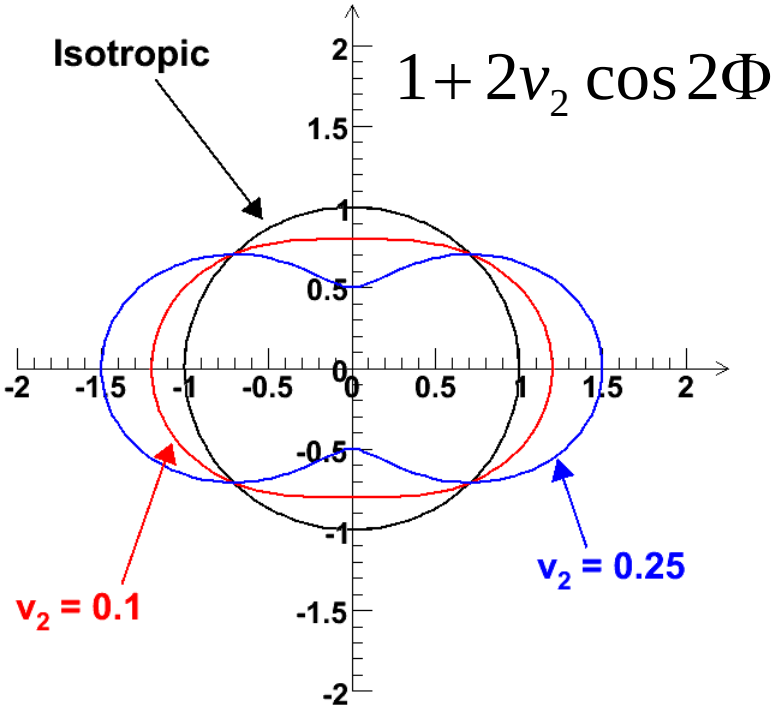
$$\frac{dN}{d(\phi - \Psi_{RP})} = \frac{N_0}{2\pi}\left(1 + 2v_1 \cos(\phi - \Psi_{RP}) + 2v_2 \cos\big(2(\phi - \Psi_{RP})\big) + \ldots\right)$$

Elliptic flow

$$v_2 = \langle \cos[2(\phi - \Psi_{RP})] \rangle$$



Vista nel piano trasverso



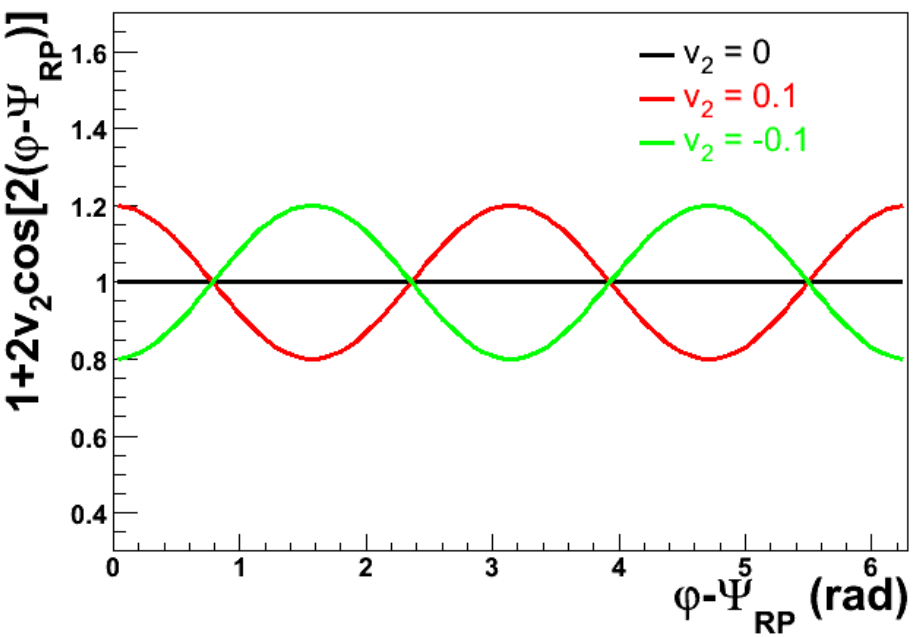
- L'elliptic flow rappresenta una deformazione ≈ ellittica della distribuzione delle particelle nel piano trasverso

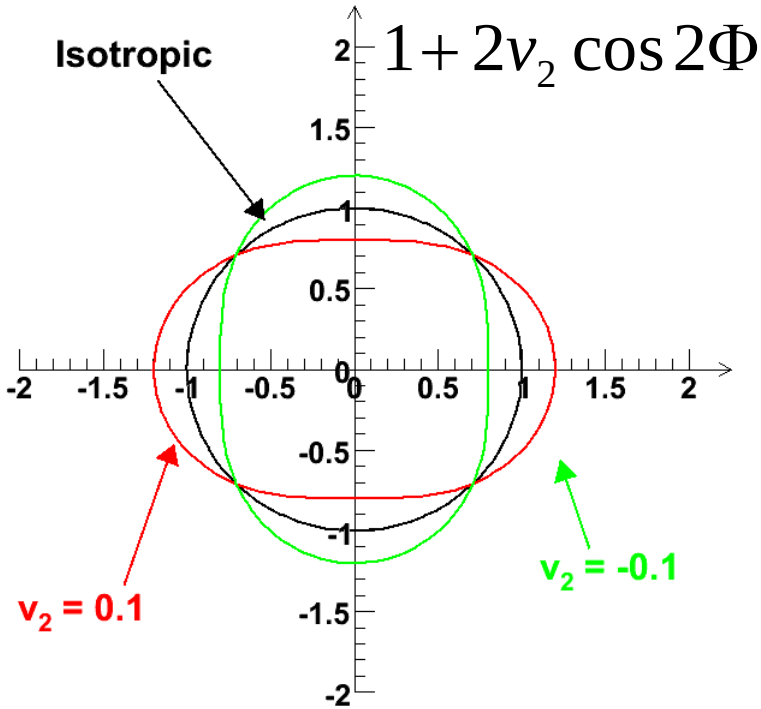
In plane vs. out of plane

$$\frac{dN}{d(\phi - \Psi_{RP})} = \frac{N_0}{2\pi}\left(1 + 2v_1 \cos(\phi - \Psi_{RP}) + 2v_2 \cos\left(2(\phi - \Psi_{RP})\right) + \ldots\right)$$

Elliptic flow

$$v_2 = \langle \cos[2(\phi - \Psi_{RP})] \rangle$$



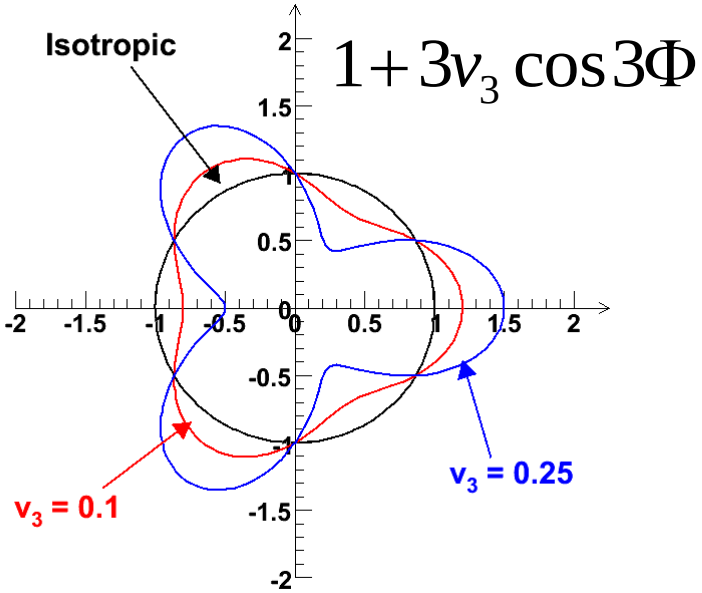


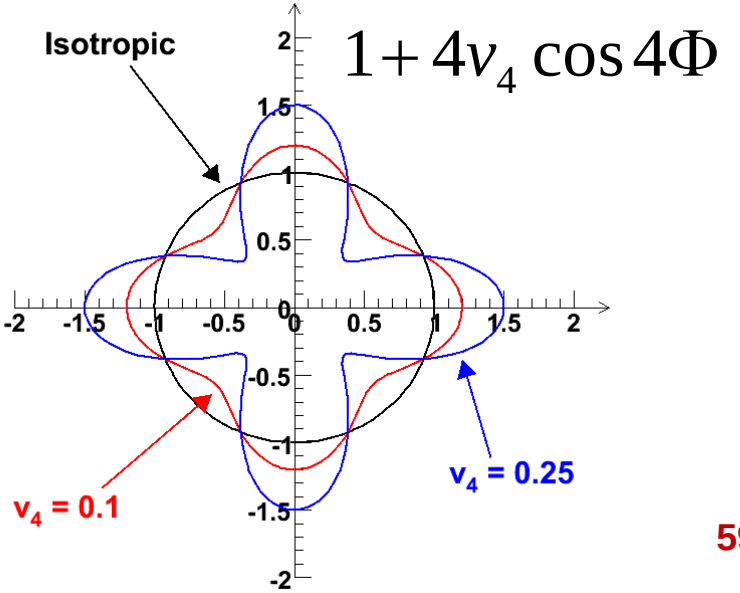
- $v_2 > 0$ → flow in-plane
- $v_2 < 0$ → flow out-of-plane

Armoniche superiori

$$\frac{dN}{d(\phi-\Psi_{RP})}=\frac{N_0}{2\pi}\left(1+2v_1\cos(\phi-\Psi_{RP})+2v_2\cos\big(2(\phi-\Psi_{RP})\big)+\dots\right)$$

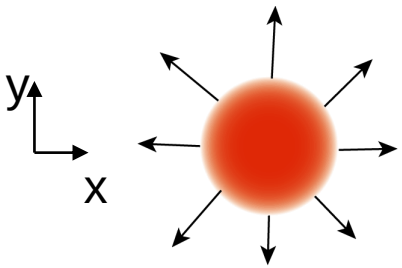
- Terza armonica: v_3
  - ⇨ Per collisioni di nuclei uguali deve essere $v_3 = 0$ (e così tutte le altre armoniche dispari) per ragioni di simmetria (salvo effetti dovuti a fluttuazioni della geometria iniziale)
- Quarta armonica: v_4
  - ⇨ Per grandi valori di v_2 deve essere ≠ 0 per riprodurre la geometria della regione di overlap.
  - ⇨ In caso di fluido ideale $v_4=0.5\ v_2^2$



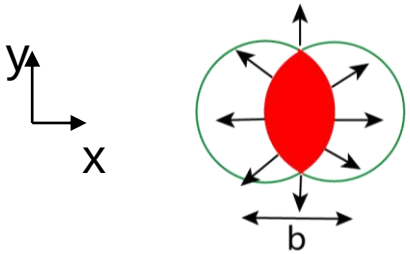


Tipi di flow in collisioni nucleari

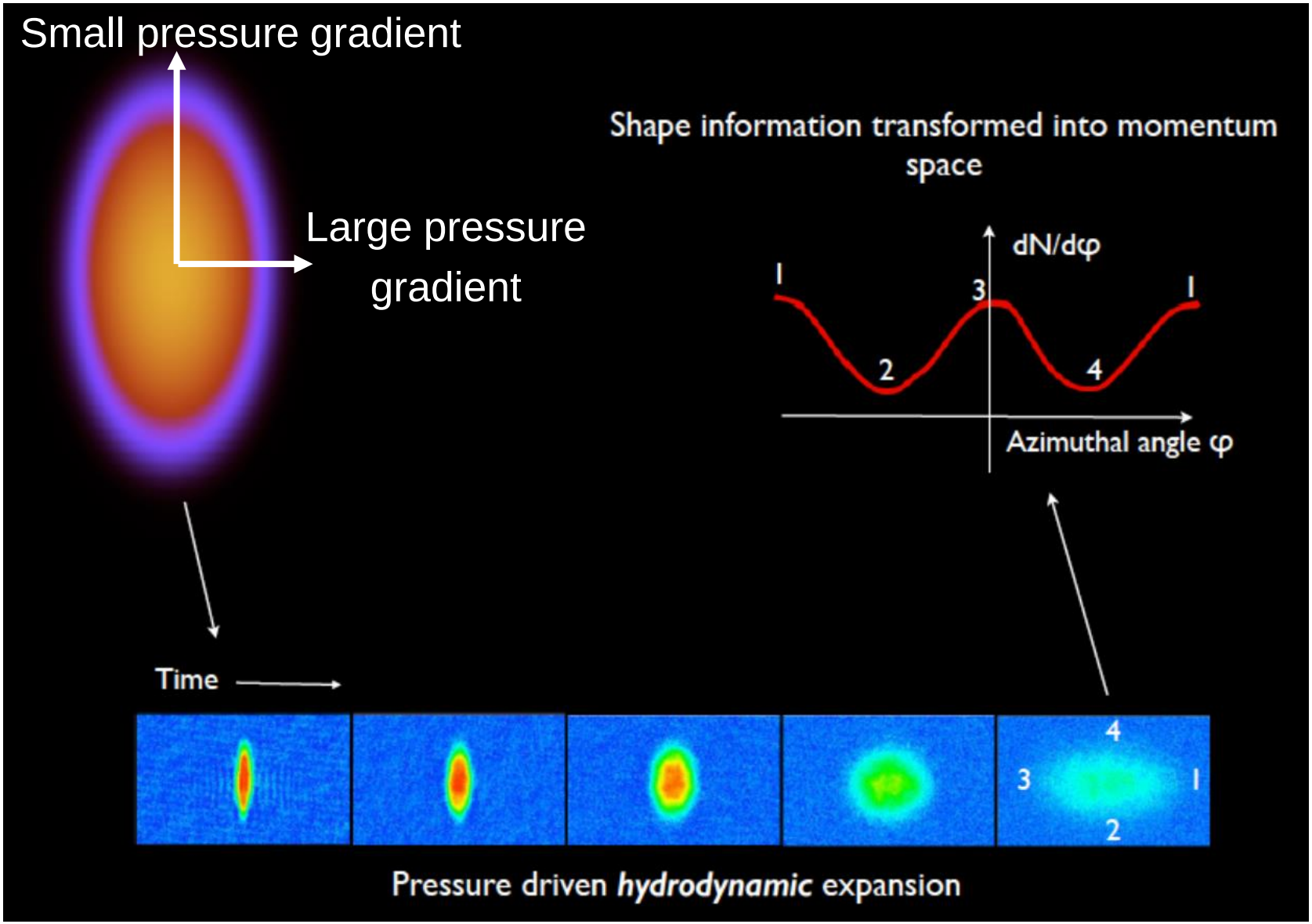
- Radial flow = flusso isotropo (i.e. indipendente dall'angolo azimutale φ) nel piano trasverso
  - ⇨Dovuto alla differenza di pressione tra l'interno e l'esterno della fireball
  - ⇨Unico tipo di moto collettivo per b=0
  - ⇨Osservabili sperimentali: p_T (m_T) spectra



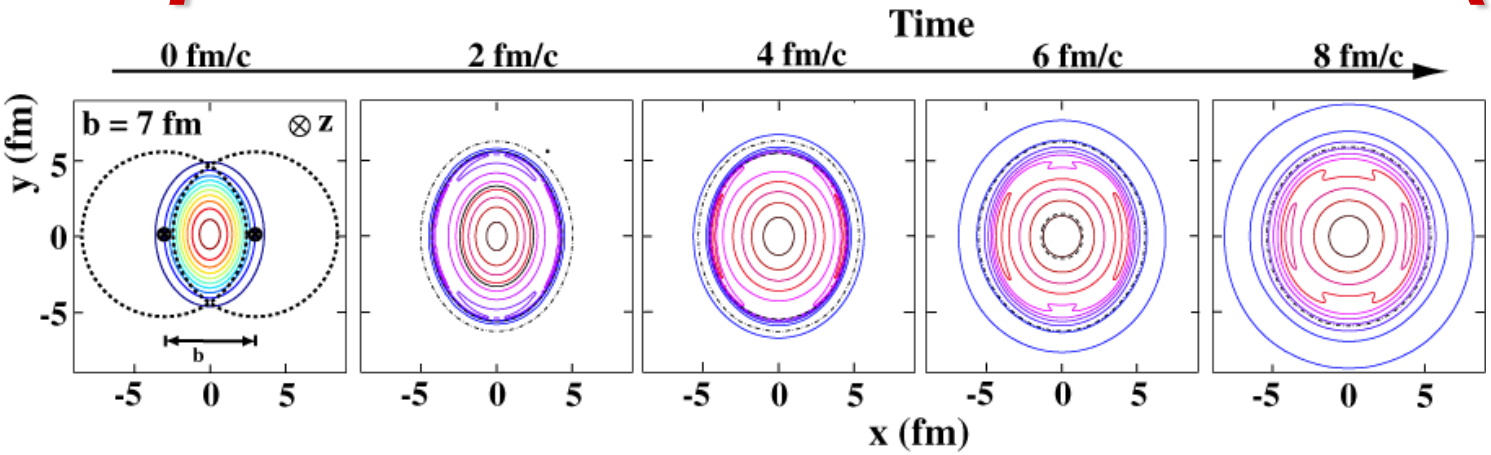
- Anisotropic transverse flow = dipendenza della velocità di flusso dall'angolo azimutale φ, tipica di collisioni con $b \neq 0$
  - ⇨Dovuti ai gradienti di pressione che si generano in seguito all'anisotropia geometrica della fireball
  - ⇨Osservabili sperimentali: distribuzioni azimutali delle particelle rispetto al piano di reazione, coefficienti di Fourier v_1 , v_2 , ….



Importanza dell'elliptic flow



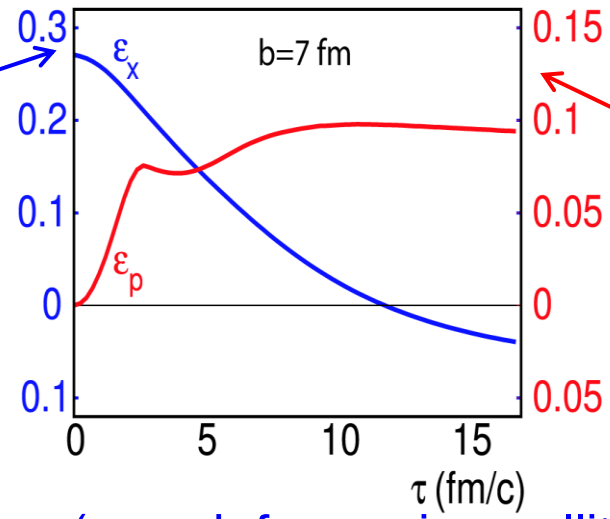
Elliptic flow - caratteristiche (1)



- L'anisotropia geometrica che è all'origine dell'elliptic flow si attenua con l'evoluzione del sistema
  - ⇨ Anche in caso di espansione libera (sistema non interagente) l'eccentricità della fireball diminuisce con l'aumentare della dimensione del sistema
- I gradienti di pressione che sono all'origine dell'elliptic flow sono più forti nei primi istanti dopo la collisione
- L'elliptic flow è quindi particolarmente sensibile all'equazione di stato (i.e. velocità del suono) del sistema nei primi istanti della collisione

Elliptic flow - caratteristiche (2)

ε_X = anisotropy in coordinate space



ε_p = anisotropy in momentum space

- L'anisotropia geometrica (ε_X = deformazione ellittica della fireball) diminuisce con il tempo
- L'anisotropia dei momenti (ε_P, che è quella che si misura):
  - ⇨ Si sviluppa velocemente nei primi istanti della collisione (τ < 2-3 fm/c), quando il sistema è nello stato di QGP
    - ✓ ***Effetto dell'equazione di stato del QGP che ha alta velocità del suono ($c_S^2 = dp/d\varepsilon = 1/3$) -> "hard equation of state"***
  - ⇨ Rimane costante durante la transizione di fase (2 < τ < 5 fm/c) che nell'equazione di stato usata nei modelli fluidodinamici è del prim'ordine
    - ✓ ***Effetto del "softening" dell'equazione di stato durante la transizione di fase ($c_S = 0$)***
  - ⇨ Aumenta ancora leggermente nella fase di gas adronico (τ < 5 fm/c)
    - ✓ ***In questa fase la velocità del suono è più bassa ($c_S^2 \approx 0.15$)***

Idrodinamica, equilibrio, viscosità

- L'idrodinamica assume che il fluido sia ovunque vicino all'equilibrio, ma è una teoria effettiva anche nei casi in cui ci sono piccoli gradienti nei campi di velocità e temperatura
  - ⇨ Nell'idrodinamica ideale (ordine zero) si ignorano i gradienti
    - ✓ ***Plasma isotropico nel sistema di riferimento di riposo del plasma***
  - ⇨ Nell'idrodinamica viscosa (prim'ordine): il **rapporto tra viscosità e entropia (η/s)** controlla quando rapidamente le ''sound waves'' o i gradienti presenti nelle condizioni iniziali sono dissipati in calore
  - ⇨ Confrontando i risultati dell'idrodinamica con le misure di anisotropic flow si possono quindi ottenere informazioni sulla viscosità del sistema (QGP e gas di adroni)
- NOTA: la goccia di QGP prodotto in collisioni di ioni si espande rapidamente
  - ⇨ Anche se la viscosità è bassa, i gradienti dovuti all'espansione implicano che le correzioni viscose sono importanti
  - ⇨ Anche se l'idrodinamica fornisce una buona descrizione del sistema a partire da un tempo τ~0.5 fm/c, il tempo necessario al fluido per raggiungere il completo equilibrio termico è più lungo

Elliptic flow: risultati sperimentali

v_2 vs. centralità a RHIC (1)

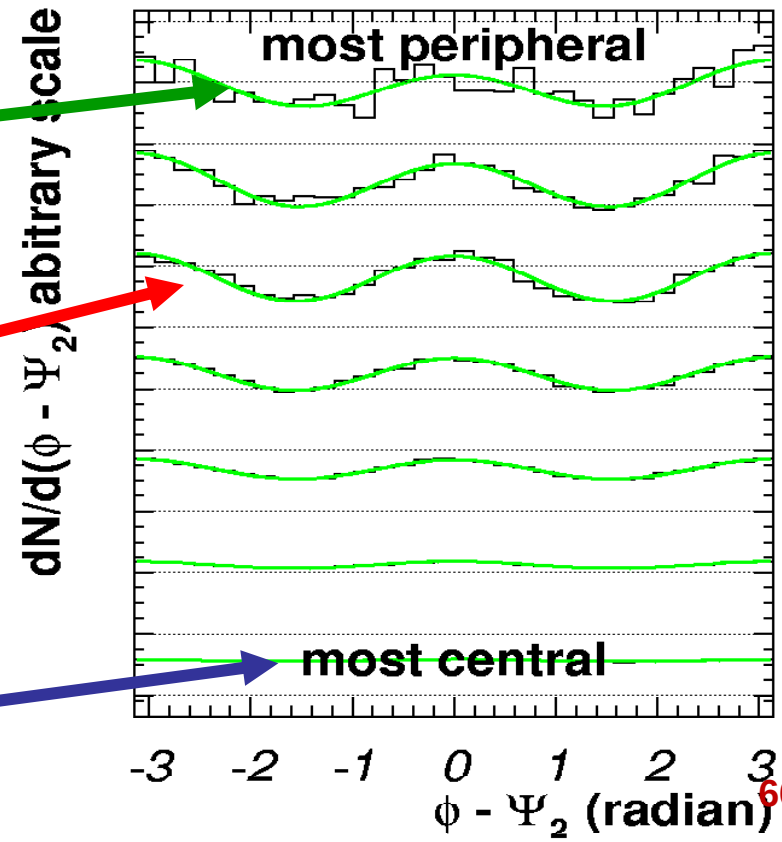
L'elliptic flow che si osserva dipende da:

- **Eccentricità** della regione di overlap
  - ⇨Diminuisce al crescere della centralità
- Quantità di **interazioni** subite dalle particelle
  - ⇨Aumenta al crescere della densità di particelle (e quindi della centralità)

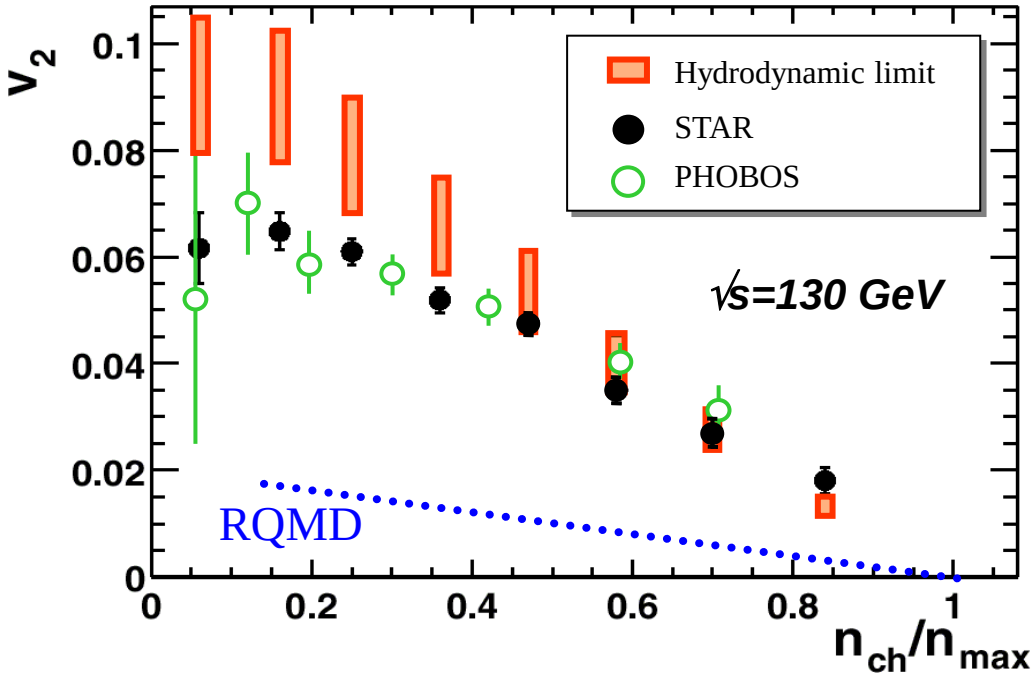
Collisioni molto periferiche:
eccentricità grande, poche re-interazioni
→v_2 piccolo

Collisioni semiperiferiche:
ci sono eccentricità e re-interazioni
→v_2 grande

Collisioni centrali:
eccentricità ≈ 0
→distribuzione ≈ isotropa ($v_2 \approx 0$)

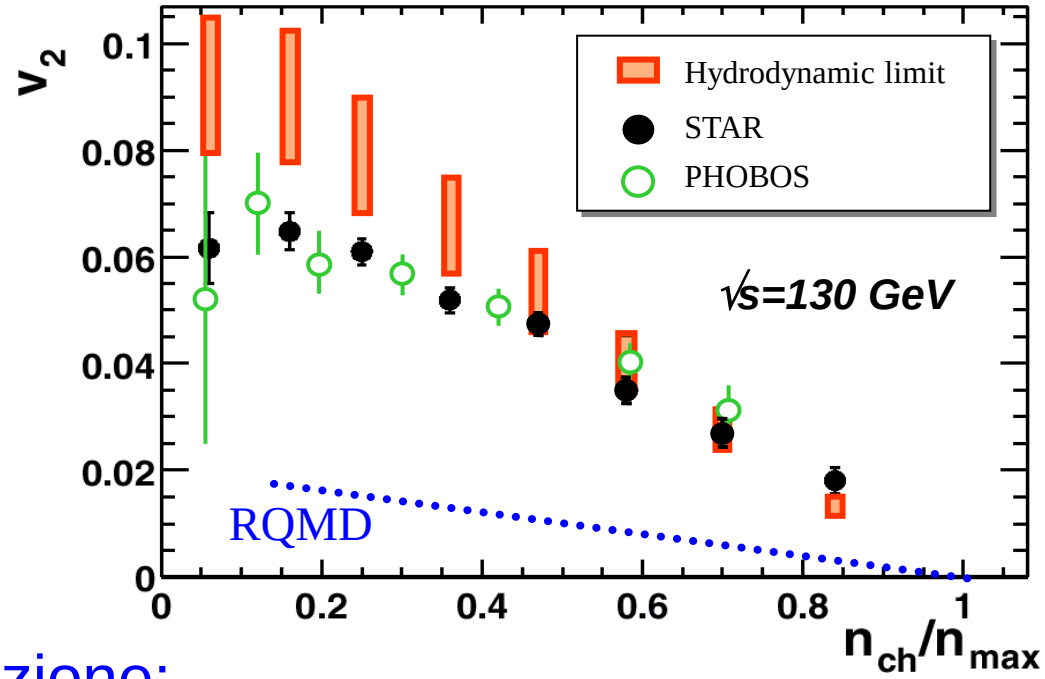


v_2 vs. centralità a RHIC (2)



- I valori di v_2 misurati sono ben descritti dalla fluidodinamica ideale (i.e. viscosità = 0) per collisioni centrali e semi-centrali usando i parametri estratti dagli spettri in p_T
- I modelli (e.g. RQMD) basati su una cascata adronica non riproducono l'elliptic flow osservato, che quindi sembra provenire da una fase partonica (= deconfinata)

v_2 vs. centralità a RHIC (3)



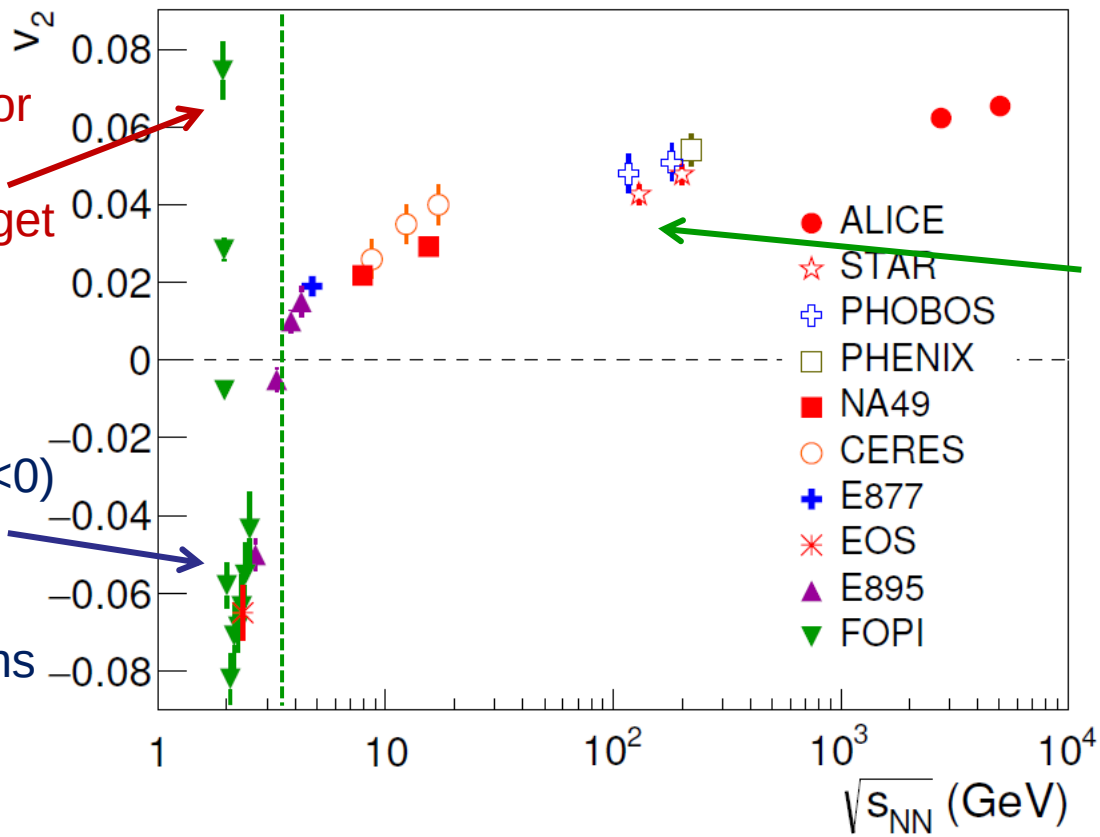
- Interpretazione:
  - ⇨ In collisioni semi-centrali si ha una termalizzazione rapida (τ_{equ}≈0.6–1 fm/c) e il sistema creato è un fluido (quasi) ideale
  - ⇨ Per collisioni più periferiche (fireball più piccola e meno interagente) la termalizzazione è incompleta e/o più lenta
- Da notare che il limite idrodinamico è quello di un fluido perfetto, l'effetto della viscosità è di ridurre l'elliptic flow

Elliptic flow vs. √s

- In collisioni semi-centrali (20-30%) v_2 aumenta del 30% da RHIC a LHC
  - ⇨più di quanto previsto dai calcoli di idrodinamica ideale
  - ⇨in accordo con i modelli che includono correzioni viscose

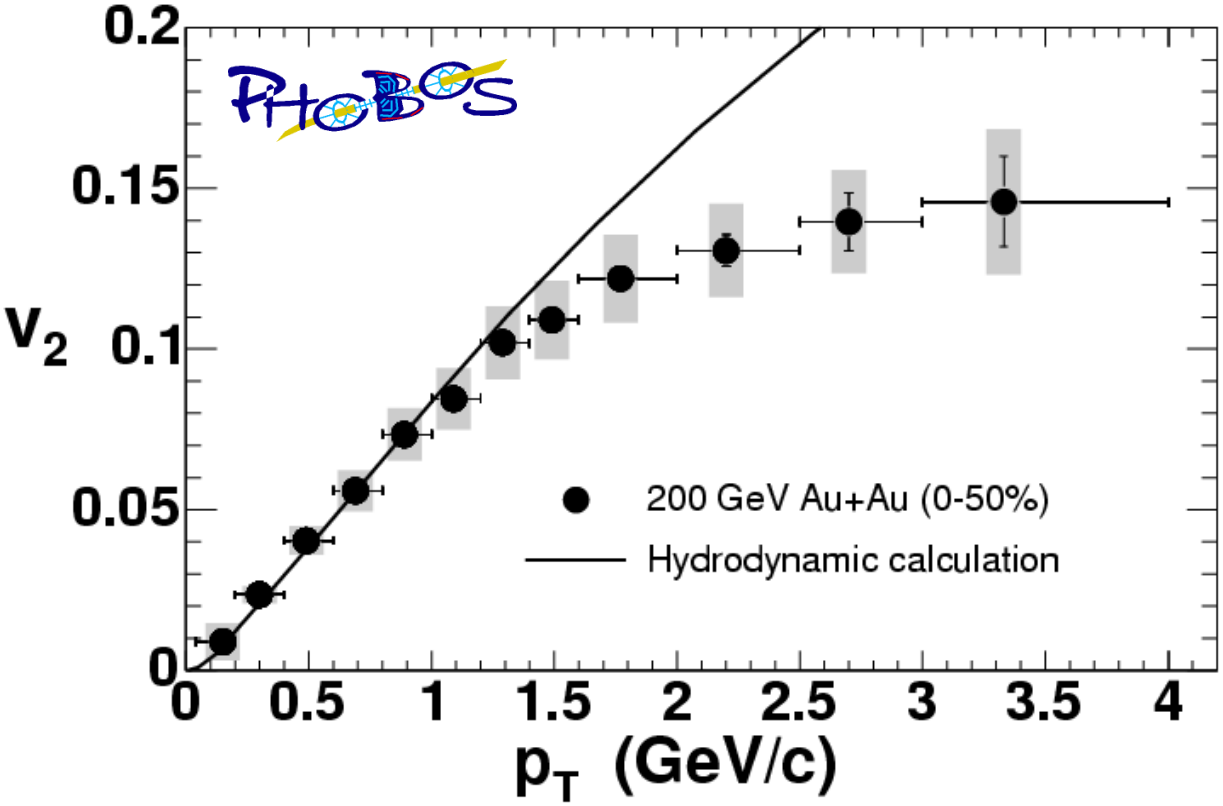
In-plane v_2 (>0) for very low √s: projectile and target form a rotating system

Out-of-plane v_2 (<0) for low √s, due to absorption by spectator nucleons



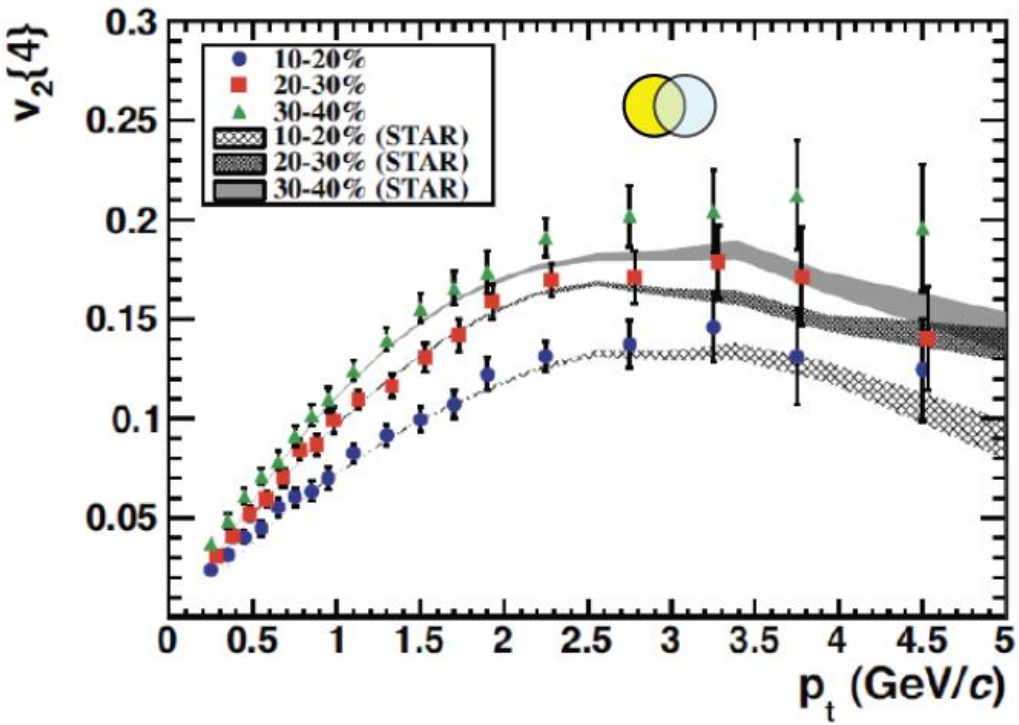
In-plane v_2 (>0) at relativistic energies (AGS and above) driven by pressure gradients (collective hydrodynamics)

v_2 vs. p_T a RHIC



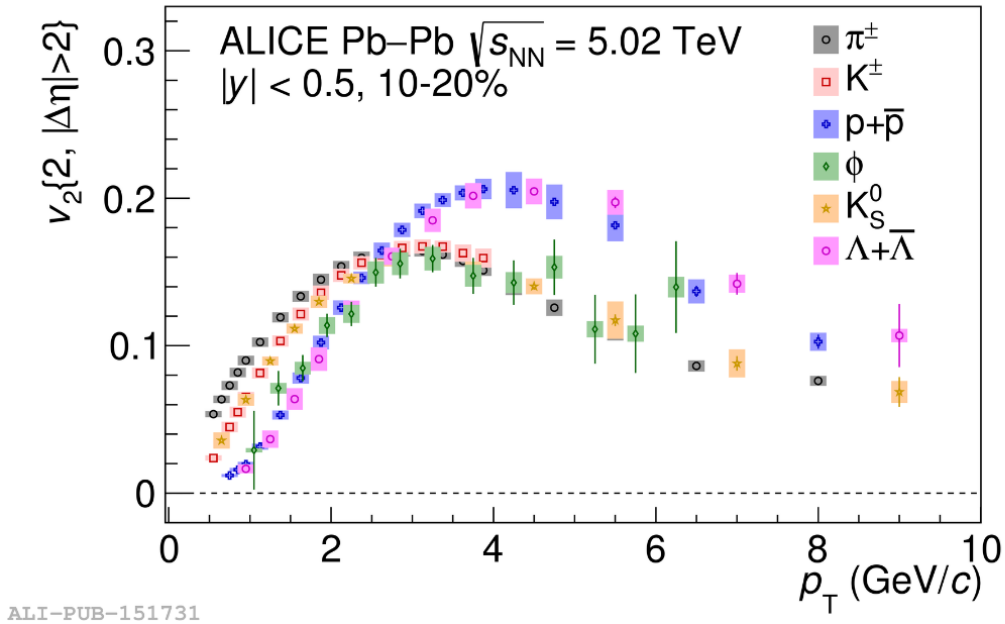
- A basso p_T la fluidodinamica ideale riproduce i dati
- Ad alto p_T i dati si discostano dall'andamento previsto
  - ⇨ Spiegazione naturale: le particelle ad alto p_T sfuggono velocemente dalla fireball senza subire abbastanza re-scattering e termalizzare, quindi la fluidodinamica non è applicabile

Elliptic flow: da RHIC a LHC



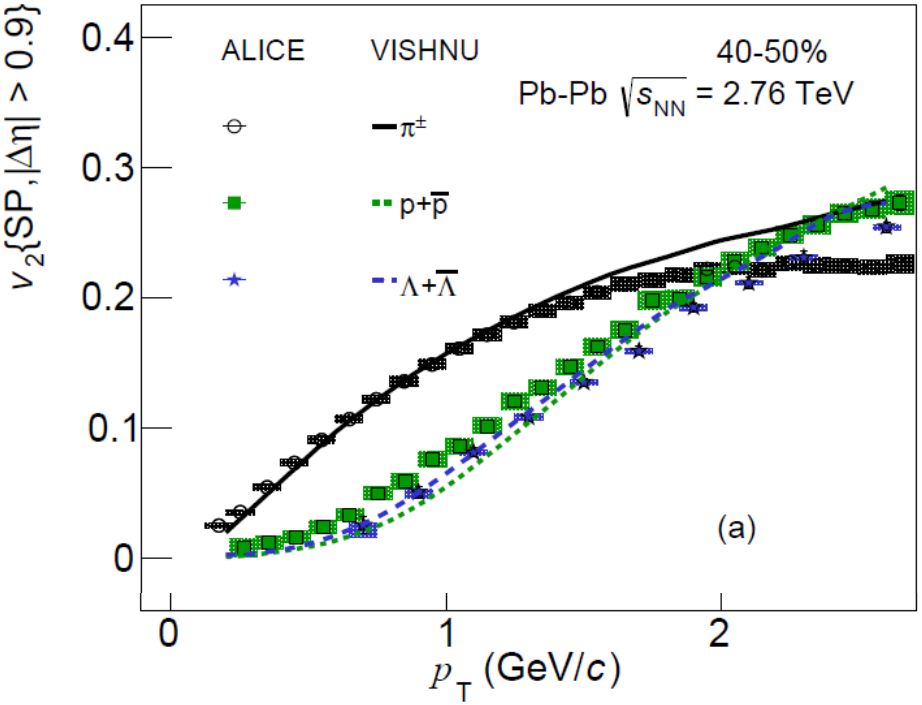
- v_2 vs. p_T non cambia entro le incertezze tra $\sqrt{s_{NN}}$=200 GeV e 2.76 TeV
  - ⇨ L'aumento del 30% dell'elliptic flow integrato su p_T è quindi dovuto al fatto che $\langle p_T \rangle$ è più grande a LHC a causa del maggior radial flow

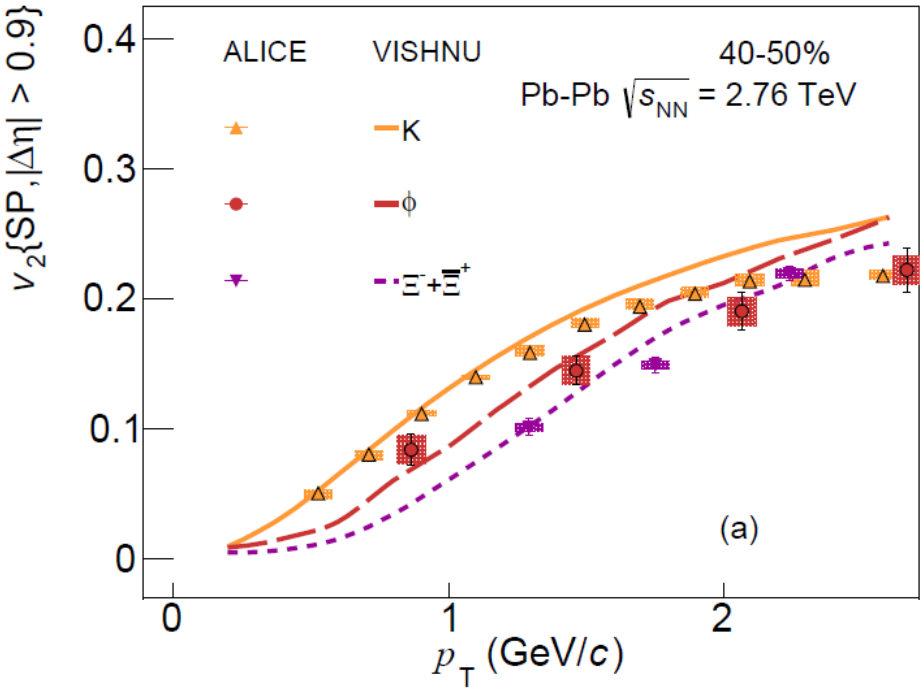
v_2 per particelle identificate



- A basso p_T (<2 GeV/c): gerarchia dei v_2 secondo la massa degli adroni -> dovuta all'interplay tra radial e elliptic flow
  - ⇨ Il radial flow tende a spingere adroni di basso p_T verso p_T maggiori, "svuotando" la regione di basso p_T
  - ⇨ Questo "svuotamento" è:
    - ✓ ***Maggiore in-plane (maggiori gradienti di pressione) che out-of-plane -> riduce v_2***
    - ✓ ***Maggiore per particelle di massa maggiore -> mass ordering***
- A più alto p_T (>2.5 GeV/c) i valori di v_2 si raggruppano per mesoni vs. barioni, cioè secondo il numero di quark costituenti dell'adrone
  - ⇨ Indicazione che l'origine del flow è a livello partonico

v_2 per particelle identificate





- La fluidodinamica è in grado di riprodurre anche la dipendenza di v_2 dalla massa della particella a basso p_T

Conclusioni

- Nelle collisioni di ioni a energie relativistiche si osserva la **presenza di moti collettivi** (radial e anisotropic flow)
  - ⇨ L'**evoluzione idrodinamica** di un fluido (quasi) ideale riproduce le misure di radial ed elliptic flow usando un'equazione di stato con transizione di fase da QGP a gas di adroni
  - ⇨ La fireball raggiunge rapidamente le condizioni per cui si può usare una descrizione idrodinamica
  - ⇨ Il flow è uno dei "pezzi di puzzle" usati per affermare che in collisioni di ioni si forma uno "**Strongly interacting QGP**" (sQGP)
- La conversione dell'anisotropia geometrica iniziale in anisotropia dei momenti finali è particolarmente sensibile alla viscosità del fluido
  - ⇨ Il confronto dati-fluidodinamica favorisce valori bassi di η/s
  - ⇨ La viscosità è sicuramente "exceptionally low", ma una stima precisa del suo valore è affetta da incertezze perché a seconda delle condizioni iniziali (puro Glauber vs. modelli con saturazione di gluoni nello stato iniziale) si devono usare valori di viscosità diversi nell'idrodinamica per riprodurre i dati
  - ⇨ Gli studi sulle armoniche di ordine superiore (v_3, v_4) e sulle fluttuazioni di v_2 evento per evento possono fornire informazioni utili per definire meglio le condizioni iniziali e la viscosità del fluido

Esercizio: semplice calcolo del mass ordering

“Mass ordering”

- Una semplice spiegazione per la presenza di una gerarchia in v_2 dipendente dalla massa della particella (mass ordering) si può derivare dalla distribuzione di Boltzmann usata per il modello della blast wave

$$\frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} \propto e^{-\frac{p^\mu u_\mu}{T}}$$

- Per particelle con p_L=0 e p_T parallelo alla velocità del fluido:

$$p^\mu u_\mu = m_T u_0(\phi) - p_T u(\phi)$$

  ⇨ Dove nella velocità del fluido si è inserita una modulazione della velocità di espansione radiale dipendente dall’angolo azimutale

- Nel caso di modulazione ellittica della velocità di radial flow

$$u(\phi) = u + 2\alpha \cos(2\phi)$$

  ⇨ in cui u è la velocità mediata su φ. Quindi:

$$u_0(\phi) = \sqrt{1 + u^2(\phi)} = \sqrt{1 + u^2 + 4\alpha u \cos(2\phi) + \ldots} \approx u_0 + 2\alpha\beta \cos(2\phi)$$

“Mass ordering”

- Sostituendo nella distribuzione di Boltzmann:

$$\frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} \propto e^{-\frac{p^\mu u_\mu}{T}} = e^{\frac{-m_T u_0(\phi)+p_T u(\phi)}{T}} = e^{\frac{1}{T}[-m_T(u_0+2\alpha\beta\cos 2\phi)+p_T(u+2\alpha\cos 2\phi)]} =$$

$$= e^{\frac{1}{T}[-m_T u_0+p_T u]} e^{\frac{1}{T}[2\alpha(p_T-\beta m_T)\cos 2\phi]} = \frac{dN}{p_T dp_T dy} e^{\frac{1}{T}[2\alpha(p_T-\beta m_T)\cos 2\phi]}$$

- La modulazione α è piccola, quindi si può sviluppare in serie l’esponenziale:

$$\frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy} \propto \left[1 + 2\frac{\alpha(p_T - \beta m_T)}{T}\cos 2\,\phi + \ldots\right]$$

⇨ E quindi:

$$v_2 = \frac{\alpha}{T}(p_T - \beta m_T)$$

⇨ v_2 aumenta circa linearmente con p_T

⇨ A parità di p_T, m_T aumenta e v_2 diminuisce al crescere della massa

Appendice: equazioni di Eulero

Equazioni della fluidodinamica

- Le equazioni della fluidodinamica sono le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto
- Nel caso di collisioni di ioni andranno scritte per il caso di un fluido
  - ⇨ In moto non stazionario (cioè la velocità in un punto non è costante nel tempo)
  - ⇨ Compressibile (la velocità del fluido >> della velocità del suono nel fluido)
  - ⇨ Relativistico (la velocità collettiva è dell'ordine di 0.5c)
  - ⇨ Ideale, cioè non viscoso
    - ✓ ***Quest'ultima assunzione serve a semplificare il problema, ma ci sono da qualche anno modelli idrodinamici con viscosita'***
- Un fluido di questo tipo è descritto dalle equazioni di Eulero e dalla legge di conservazione della massa che ricaveremo nel caso non relativistico

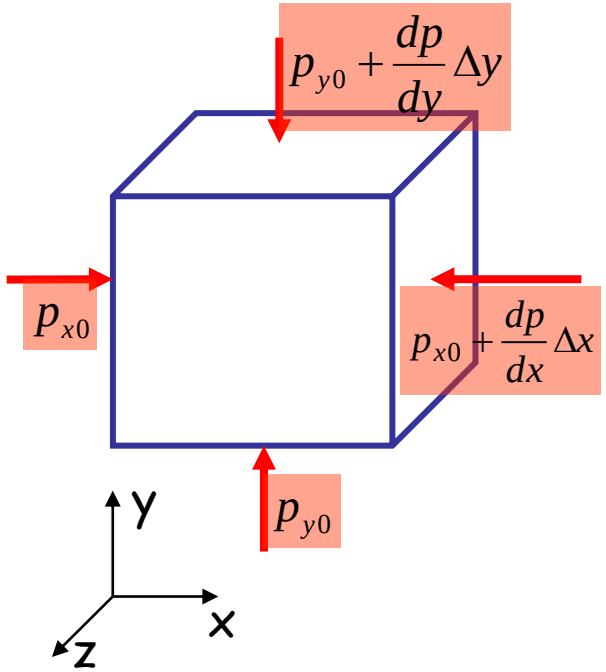
Equazioni del moto di Eulero (1)

- Forza di pressione esercitata su un elemento di fluido $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$:

$$F_x = p_{x0}\Delta y\Delta z - (p_{x0} + \frac{dp}{dx}\Delta x)\Delta y\Delta z = -\frac{dp}{dx}\Delta V$$

$$F_y = p_{y0}\Delta x\Delta z - (p_{y0} + \frac{dp}{dy}\Delta y)\Delta x\Delta z = -\frac{dp}{dy}\Delta V$$

$$F_z = p_{z0}\Delta x\Delta y - (p_{z0} + \frac{dp}{dz}\Delta z)\Delta x\Delta y = -\frac{dp}{dz}\Delta V$$



- La forza di pressione per unità di volume sarà quindi:

$$f_p = -\nabla p$$

Equazioni del moto di Eulero (2)

- Se le uniche altre forze cha agiscono sul fluido sono quelle gravitazionali, si può scrivere la legge di Newton F=ma come:

$$-\nabla p + \rho g = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Derivata della velocità rispetto al tempo

Forza di pressione

Forza di gravità

⇨ dove D/Dt rappresenta la derivata totale della velocità (che dipende da t, x, y e z) rispetto al tempo e vale:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

Equazioni del moto di Eulero (3)

- Le equazioni di Eulero sono quindi:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

⇨ Sono 3 equazioni non lineari alle derivate parziali che rappresentano la conservazione del momento

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g_x$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g_y$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z$$

- In caso di fluido stazionario e incompressibile le equazioni di Eulero si riducono a quella di Bernoulli
- In caso di fluido viscoso le equazioni sono quelle (più complicate) di Navier-Stokes

Equazione di continuità

- Conservazione della massa
  - ⇨ La variazione nel tempo dt della massa del fluido all'interno di un volume V è:

$$\frac{dm}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt} dV$$

  - ⇨ Se non ci sono pozzi o sorgenti, questa deve essere uguale al flusso di massa che entra/esce dalla superficie esterna del volume V

$$\Phi_M = -\int \rho \vec{v} d\vec{S} = \xrightarrow[\text{teorema della divergenza}]{} = -\int \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

dove il segno – è dovuto al fatto che d**S** è diretto verso l'esterno e quindi se la velocità **v** è diretta verso l'esterno (flusso uscente) la massa nel volume V diminuisce (dm/dt negativo)

  - ⇨ Quindi:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$