

Esercitazioni Fisica

Corso di Laurea in Chimica

A.A. 2016-2017

Esercitatore: Marco Regis¹

I riferimenti a pagine e numeri degli esercizi sono relativi al libro Jewett and Serway “Principi di Fisica”, primo volume, V edizione.

Esercizio 1 (Problema 5 pag. 64, Capitolo 2)

Il grafico posizione-tempo per una particella che si muove lungo l’asse x è mostrato in Figura P2.7. (a) Trovare la velocità media nell’intervallo di tempo da $t = 1.5$ s a $t = 4.0$ s. (b) Determinare la velocità istantanea a $t = 2.0$ s, misurando la pendenza della retta tangente mostrata nel grafico. (c) Per quale valore di t la velocità è zero?

(Velocità istantanea)

Soluzione

La media temporale di una variabile v è data in generale da $\langle v \rangle = \int_{\Delta t} v dt / \Delta t$. Sapendo che $v = dx/dt$ si ottiene $\langle v \rangle = \Delta x / \Delta t$, dove Δx è la variazione di x nell’intervallo di tempo Δt . Considerando i dati del problema si ha

¹Per domande scrivere a regis@to.infn.it. Ringrazio anche per segnalazioni di refusi o sviste.

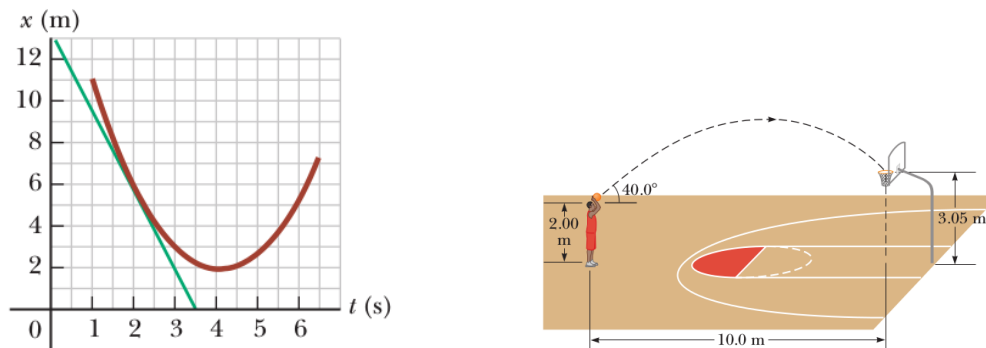


Figura P2.7 (sinistra) e Figura P3.47 (destra).

$\Delta x = 2.0 \text{ m} - 8.0 \text{ m} = -6.0 \text{ m}$ e $\Delta t = 4.0 \text{ s} - 1.5 \text{ s} = 2.5 \text{ s}$, da cui $\langle v \rangle = 2.4 \text{ m/s}$.

Una retta è descritta dall'equazione $x = at + b$. Determiniamo, per la curva in figura, l'incognita a (cioè la pendenza della curva che è anche la velocità istantanea a $t = 2.0 \text{ s}$) considerando i punti $x = 0 \text{ m}$ e $t = 0 \text{ s}$. Il primo è verificato a $t = 3.5 \text{ s}$, mentre il secondo a $x = 13 \text{ m}$. Si ottiene quindi: $0 = a \cdot 3.5 \text{ s} + b$ e $13 \text{ m} = b$, da cui $a = -13 \text{ m}/(3.5 \text{ s}) = -3.7 \text{ m/s}$.

La velocità si annulla quando la derivata della curva di x è zero (cioè in corrispondenza di massimi o minimi), essendo la definizione di velocità $v = dx/dt$. Ciò accade a $t = 4.0 \text{ s}$.

Esercizio 2 (Problema 26 pag. 66, Capitolo 2)

Una particella si muove lungo l'asse x . La sua posizione è data dall'equazione $x = 2.00 + 3.00t - 4.00t^2$ con x espresso in metri e t in secondi. Determinare (a) la sua posizione nell'istante in cui cambia verso e (b) la sua velocità quando ritorna nella posizione che aveva per $t = 0$.

(Moto uniformemente accelerato unidimensionale)

Soluzione

Cominciamo col ricavare l'espressione della velocità:

$$v = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t, \quad (1)$$

espressa in m/s. Quando la particella cambia verso la velocità è nulla, e ciò avviene al tempo $t_1 = 3/8$ s. Sostituendo t_1 nell'equazione della posizione si ha:

$$x_1 = (2 + 3 \frac{3}{8} - 4 (\frac{3}{8})^2) \text{m} = 2.56 \text{m}. \quad (2)$$

All'istante iniziale $t = 0$, la particella si trova in $x_0 = 2.00$ m. Possiamo ricavare il tempo in cui si trova in tale posizione da:

$$2 = 2 + 3t - 4t^2 \rightarrow t_2 = 0 \text{ s e } t_2 = 0.750 \text{ s}. \quad (3)$$

Scartando ovviamente la prima soluzione che corrisponde all'istante iniziale, sostituiamo t_2 nell'espressione della velocità trovando $v = (3 - 8 \cdot 0.75) \text{m/s} = -3.00 \text{m/s}$.

Esercizio 3 (Problema 30 pag. 66, Capitolo 2)

Una palla da baseball viene colpita in modo tale da viaggiare dritta verso l'alto dopo essere stata colpita dalla mazza. Uno spettatore osserva che ci vogliono 3.00 s perchè la palla raggiunga la sua massima altezza. Calcolare (a) la sua velocità iniziale e (b) l'altezza raggiunta.

(Moto uniformemente accelerato unidimensionale)

Soluzione

Le equazioni del moto uniformemente accelerato unidimensionale sono:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v = v_0 + a t. \quad (4)$$

Scegliamo il sistema di riferimento tale che $y_0 = 0$ e rivolto verso l'alto. Notiamo che l'accelerazione è data dall'accelerazione di gravità $a = -g =$

-9.80m/s^2 (il segno negativo è dovuto al verso opposto rispetto al verso dell'asse y).

Quando la palla raggiunge la sua massima altezza (a $t_1 = 3.00$ s) la velocità è nulla, da cui si ha:

$$0 = v_0 - g t_1 \rightarrow v_0 = g t_1 = 29.4 \text{ m/s.}$$

Sostituendo i valori di t_1 e v_0 nell'equazione della posizione si ha l'altezza massima raggiunta:

$$y_{max} = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 44.1 \text{ m.} \quad (5)$$

Esercizio 4 (Tutorato)

Al tempo $t = 0$, una particella in moto nel piano xy con accelerazione costante ha una velocità $\vec{v}_i = 3.00\vec{i} - 2.00\vec{j}$ m/s all'origine. A $t = 3.00$ s, la sua velocità è $\vec{v}_f = 9.00\vec{i} + 7.00\vec{j}$ m/s. Trovare l'espressione dell'accelerazione \vec{a} della particella a un generico istante t , le sue coordinate, il modulo e la direzione.

(Vettore accelerazione in due dimensioni)

Soluzione

Dal testo sappiamo che in questo problema l'accelerazione è un vettore costante

$$\text{da cui si ha: } \vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = (2.00\vec{i} + 3.00\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$a_x = 2.00 \text{ m/s}^2, \quad a_y = 3.00 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 3.61 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = \arctan(a_y/a_x) = 56.3^\circ.$$

Esercizio 5 (Problema 3 pag. 91, Capitolo 3)

Una particella inizialmente posta nell'origine ha un'accelerazione $\mathbf{a} = 3.00\mathbf{j}$ m/s² e velocità iniziale $\mathbf{v}_0 = 5.00\mathbf{i}$ m/s. Trovare vettori posizione e velocità ad un generico istante t e coordinate e modulo della velocità della particella a $t = 2.00$ s.

(Moto bidimensionale uniformemente accelerato)

Soluzione

Notiamo che l'accelerazione è un vettore costante. Quindi posizione e velocità sono date dalle equazioni del moto uniformemente accelerato:

$$\mathbf{r} = \mathbf{0} + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 = 5.00 \text{ m/s} t \mathbf{i} + 1.50 \text{ m/s}^2 t^2 \mathbf{j} \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t = 5.00 \text{ m/s} \mathbf{i} + 3.00 \text{ m/s}^2 t \mathbf{j}. \quad (7)$$

Al tempo $t = 2.00 \text{ s}$, la velocità è $\mathbf{v} = 5.00 \text{ m/s} \mathbf{i} + 6.00 \text{ m/s} \mathbf{j}$ e quindi componenti e modulo sono dati da:

$$v_x = 5.00 \text{ m/s} \quad (8)$$

$$v_y = 6.00 \text{ m/s} \quad (9)$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 7.81 \text{ m/s}. \quad (10)$$

Esercizio 6 (Problema 24 pag. 93, Capitolo 3)

Uno pneumatico di raggio 0.500 m ruota con una velocità angolare costante di 200 giri/min . Trovare la velocità e l'accelerazione di un sassolino posto nel battistrada.

(Moto circolare uniforme)

Soluzione

Si tratta di un moto circolare uniforme, quindi con velocità costante in modulo e tangenziale al moto, e con accelerazione tangenziale nulla. La distanza percorsa dal sassolino ad ogni giro di ruota è data dalla circonferenza della ruota (essendo il sassolino sul battistrada): $2\pi R = \pi \text{ m/giro}$. Il modulo della velocità è dunque:

$$v = 200 \text{ giri/min} \pi \text{ m/giro} = 200 \pi \text{ m/min} = 10.5 \text{ m/s}.$$

L'accelerazione è centripeta ossia è diretta verso il centro e il modulo è dato da:

$$a_c = v^2/R = 219 \text{ m/s}^2.$$

Esercizio 7 (Problema 27 pag. 93, Capitolo 3)

Un satellite si muove secondo un'orbita circolare a 600 km dalla superficie terrestre della Terra dove l'accelerazione di gravità è 8.21 m/s^2 . Assumere il raggio della Terra pari a 6400 km. Determinare la velocità del satellite e il tempo richiesto per completare un giro attorno alla Terra (ossia il periodo del satellite).

(Moto circolare uniforme)

Soluzione

Si tratta di un moto circolare uniforme, quindi descritto da un'accelerazione radiale e da velocità costante in modulo e tangenziale al moto. L'accelerazione radiale è data dall'accelerazione di gravità. Il modulo di tale accelerazione si può scrivere come v^2/R (dove R è la distanza tra il satellite e il centro della Terra). Il modulo della velocità è dunque dato da:

$$v = \sqrt{a R} = \sqrt{a (d + R_T)} = \sqrt{8.21 \text{ m/s}^2 (600 + 6400) 10^3 \text{ m}} = 7.58 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

Lo spazio percorso in un giro dal satellite è dato da $s = 2\pi (d + R_T)$. Essendo il modulo della velocità costante si può calcolare il periodo attraverso l'espressione:

$$T = s/v = 2\pi (d + R_T) / \sqrt{a (d + R_T)} = 2\pi \sqrt{(d + R_T)/a} = 5.80 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

Esercizio 8 (Problema 7 pag. 91, Capitolo 3)

La velocità di un proiettile quando raggiunge la sua massima altezza è metà della sua velocità quando si trova a metà della sua massima altezza. Qual è l'angolo di lancio del proiettile?

(Moto del proiettile)

Soluzione

Scomponendo il moto nelle due direzioni, orizzontale x e verticale y , notiamo che si tratta di moto uniforme lungo x (ossia l'accelerazione è nulla) e moto

uniformemente accelerato lungo y con accelerazione $a = -g$ (scegliendo un sistema di riferimento con l'asse y che cresce verso l'alto). Le componenti della velocità sono dunque $v_x = v_0 \cos \theta$ e $v_y = v_0 \sin \theta - g t$ e il modulo della velocità è dato dall'usuale $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Quando il proiettile raggiunge l'altezza massima h si ha $v_y = 0$ e quindi $v_h = v_x = v_0 \cos \theta$. A metà della massima altezza la velocità vale $v_{h/2} = 2 v_h$ e può essere espressa attraverso:

$$v_{h/2}^2 = (v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - g t_{h/2})^2$$

da cui si ricava:

$$3 v_0^2 \cos^2 \theta = v_0^2 \sin^2 \theta + g^2 t_{h/2}^2 - 2 v_0 \sin \theta g t_{h/2}. \quad (1)$$

Si può vedere che l'altezza massima è data dall'espressione $h = (v_0 \sin \theta)^2 / (2g)$.

Quindi scrivendo l'equazione del moto uniformemente accelerato lungo y per $y = h/2$ si ha:

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{4g} = v_0 \sin \theta t_{h/2} - \frac{g}{2} t_{h/2}^2. \quad (2)$$

Moltiplicando per $2g$ l'equazione (2) e sommandola all'equazione (1) otteniamo:

$$3 v_0^2 \cos^2 \theta + v_0^2 / 2 \sin^2 \theta = v_0^2 \sin^2 \theta,$$

da cui si ha $\tan \theta = \sqrt{6}$ ossia $\theta = \arctan \sqrt{6} = 67.8^\circ$.

Esercizio 9 (Problema 47 pag. 94, Capitolo 3)

Un giocatore di basket alto 2.00 m è fermo sul campo da gioco a 10.0 m dal canestro. Se egli lancia la palla ad un angolo di 40.0° rispetto all'orizzontale, quale dovrebbe essere la velocità iniziale di lancio per fare canestro senza colpire il tabellone? Il canestro è a 3.05 m di altezza.

(Moto del proiettile)

Soluzione

Scomponiamo il moto nelle due direzioni, orizzontale x e verticale y . Il moto lungo x è uniforme, ossia non ci sono forze (accelerazioni) in gioco. Lungo y invece si ha un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = -g$ (scegliendo un sistema di riferimento con l'asse y che cresce verso l'alto). Prendiamo l'origine nel punto da cui viene lanciata la palla (da cui $x_0 = 0$ e

$y_0 = 0$). Le relative equazioni sono:

$$x_f = 0 + v_{x,i} t \quad (11)$$

$$y_f = 0 + v_{y,i} t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (12)$$

dove le proiezioni della velocità lungo gli assi sono $v_{x,i} = v_i \cos \theta$ e $v_{y,i} = v_i \sin \theta$. Ricavando il tempo dalla prima equazione $t = x_f / (v_i \cos \theta)$, la seconda equazione diventa:

$$y_f = x_f \tan \theta - \frac{1}{2} g \frac{x_f^2}{v_i^2 \cos^2 \theta};$$

da cui possiamo ricavare la velocità, notando che per fare canestro bisogna raggiungere l'altezza $y_f = h_C - h_G = (3.05 - 2.00) \text{ m} = 1.05 \text{ m}$:

$$v_i = \sqrt{\frac{g/2}{-y_f + x_f \tan \theta} \frac{x_f}{\cos \theta}} = 10.7 \text{ m/s.}$$

Esercizio 10 (Problema 6 pag. 119, Capitolo 4)

Tre forze, $\mathbf{F}_1 = (-2.00\mathbf{i} + 2.00\mathbf{j}) \text{ N}$, $\mathbf{F}_2 = (5.00\mathbf{i} - 3.00\mathbf{j}) \text{ N}$ e $\mathbf{F}_3 = (-45.0\mathbf{i}) \text{ N}$, agiscono su un corpo imprimendo un'accelerazione di modulo 3.75 m/s^2 . Trovare: a) direzione e verso di \mathbf{a} . b) massa del corpo. c) se il corpo è inizialmente fermo, modulo e componenti di \mathbf{v} dopo $t = 10.0 \text{ s}$.

(Leggi di Newton e moto uniformemente accelerato)

Soluzione

La seconda legge di Newton afferma che l'accelerazione di un corpo è data da $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, dove \mathbf{F} è la risultante delle forze agenti sul corpo stesso. Direzione e verso di \mathbf{a} sono quindi uguali a direzione e verso di \mathbf{F} . Quest'ultima è data da:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = [(-2.00 + 5.00 - 45.0)\mathbf{i} + (2.00 - 3.00)\mathbf{j}] \text{ N} = (-42.0\mathbf{i} - 1.00\mathbf{j}) \text{ N.}$$

Le componenti di \mathbf{F} lungo gli assi sono quindi $F_x = -42.0 \text{ N}$ e $F_y = -1.00 \text{ N}$. Essendo $F_x = |\mathbf{F}| \cos \theta$ e $F_y = |\mathbf{F}| \sin \theta$, si ha $\theta = \arctg(F_y/F_x) = \arctg(a_y/a_x)$. Questa definizione ci fornisce la direzione. Però, siccome $\tan \theta = \tan(\theta + \pi)$, per il verso bisogna controllare il segno delle componenti del vettore (ed eventualmente aggiungere 180°). In questo caso infatti \mathbf{F} è rivolto nel terzo quadrante, quindi si aggiungono 180° e $\theta = 181.36^\circ$.

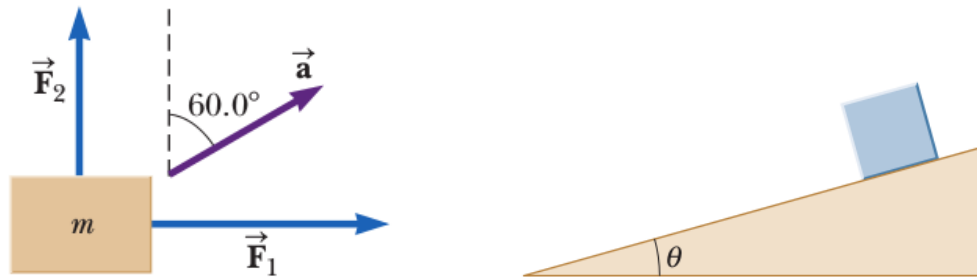


Figura P4.29 (sinistra) e Figura P4.31 (destra).

Per calcolare la massa del corpo possiamo utilizzare $m = |\mathbf{F}|/|\mathbf{a}|$, dove $|\mathbf{a}| = 3.75 \text{ m/s}^2$ e $|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 42.0 \text{ N}$, da cui si ottiene $m = 11.2 \text{ kg}$.

La forza è costante e dunque anche l'accelerazione e il moto è uniformemente accelerato. L'espressione della velocità è $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$. Considerando il corpo inizialmente fermo:

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{a}t = (-3.75\mathbf{i} - 0.0892\mathbf{j}) \text{ m/s}^2 t.$$

A $t = 10.0 \text{ s}$, si ottiene $v_x = -37.5 \text{ m/s}$ e $v_y = -0.892 \text{ m/s}$. Il modulo è dato da $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 37.5 \text{ m/s}$.

Esercizio 11 (Problema 29 pag. 121, Capitolo 4)

Un corpo di massa 1.00 kg si muove con una accelerazione di 10.0 m/s^2 in direzione 60.0° nord-est (vedi Figura P4.29). La forza \mathbf{F}_2 agente sul corpo ha un modulo di 5.00 N e direzione nord. Determinare il modulo e la direzione della seconda forza \mathbf{F}_1 agente sul corpo. (*Leggi di Newton*)

Soluzione

Dalla seconda legge di Newton si ha $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m\mathbf{a}$ che scritta in componenti diventa:

$$F_{1x} + F_{2x} = m a_x = m a \cos(30.0^\circ)$$

$$F_{1y} + F_{2y} = m a_y = m a \sin(30.0^\circ)$$

da cui notando che $F_{2x} = 0$ e utilizzando i dati forniti nel testo $m = 1.00 \text{ kg}$, $a = 10.0 \text{ m/s}^2$ e $F_{2y} = F_2 = 5.00 \text{ N}$ si ha:

$$F_{1x} = m a \cos(30.0^\circ) = 8.66 \text{ N}$$

$$F_{1y} = m a/2 - F_{2y} = 5.00 \text{ N} - 5.00 \text{ N} = 0.$$

La forza \mathbf{F}_1 può quindi essere descritta attraverso $\mathbf{F}_1 = F_{1x} \mathbf{i} = 8.66 \text{ N} \mathbf{i}$ ed ha modulo $F_1 = 8.66 \text{ N}$ e direzione est.

Esercizio 12 (Problema 31 pag. 121, Capitolo 4)

Un blocco su un piano inclinato liscio con inclinazione di 20.0° possiede una velocità iniziale di 5.00 m/s (Figura P4.31). Di quanto scivola in salita il blocco lungo il piano prima di arrestarsi?

(Piano inclinato liscio)

Soluzione

Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo al piano inclinato con l'origine posta all'inizio del piano ($x_i = 0$) e direzione positiva verso la salita. La forza gravitazionale può essere scomposta nella direzione ortogonale al piano $F_{g,y} = -|\mathbf{F}| \cos \theta$ (controbilanciata dalla reazione del piano) e nella direzione parallela $F_{g,x} = -|\mathbf{F}| \sin \theta$. Quest'ultima causa il rallentamento del blocco fino a farlo arrestare. L'accelerazione è data da $a_x = F_{g,x}/m = -g \sin \theta$. Utilizzando l'equazione (valida in caso di moto uniformemente accelerato come quello considerato):

$$v_{f,x}^2 = v_{i,x}^2 + 2 a_x (x_f - x_i)$$

e ponendo $v_{f,x} = 0$, otteniamo:

$$x_f = \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{g \sin \theta} = 3.73 \text{ m.}$$

Esercizio 13 (Problema 49 pag. 123, Capitolo 4)

Tre blocchi sono in contatto uno con l'altro su una superficie orizzontale senza attrito (vedi Figura P4.49). Una forza orizzontale \mathbf{F} è applicata a m_1 . Se $m_1 = 2.00 \text{ kg}$, $m_2 = 3.00 \text{ kg}$, $m_3 = 4.00 \text{ kg}$ e $F = 18.0 \text{ N}$, tracciare un diagramma di corpo libero per ogni blocco e trovare: a) l'accelerazione dei blocchi, b) la forza risultante su ciascun blocco c) il modulo delle forze di contatto fra i blocchi.

(Leggi di Newton)



Figura P4.49.

Soluzione

I tre blocchi si muovono come un unico sistema di massa $M = m_1 + m_2 + m_3$ soggetto alla forza \mathbf{F} . L'accelerazione è quindi $a = F/M = F/(m_1 + m_2 + m_3) = 2.00 \text{ m/s}^2$. Dalla seconda legge di Newton sappiamo che per ogni blocco i deve valere $F_i = m_i a_i$, dove F_i è la forza risultante. In questo caso $a_i = a$ e le tre forze hanno modulo $F_1 = 4.00 \text{ N}$, $F_2 = 6.00 \text{ N}$, $F_3 = 8.00 \text{ N}$ e direzione parallela al moto. Espandendo la forza risultante di ciascuno blocco nelle varie forze in gioco possiamo ricavare le forze di contatto (si vedano i diagrammi di corpo libero in Figura P4.49). Per il primo blocco $F_1 = F - F_{12}$, per il secondo si ha $F_2 = F_{12} - F_{23}$, mentre per il terzo $F_3 = F_{23}$. Quindi $F_{12} = 14.0 \text{ N}$ e $F_{23} = 8.00 \text{ N}$.

Esercizio 14 (Problema 9 pag. 148, Capitolo 5)

Un blocco di 3.00 kg parte da fermo alla sommità di un piano inclinato di 30.0° e scorre per una distanza di 2.00 m giù per il piano in 1.50 s . Trovare: a) accelerazione blocco, b) forza di attrito agente sul blocco, c) coefficiente attrito dinamico fra blocco e piano, d) la velocità del blocco dopo 2.00 m .

(Piano inclinato scabro)

Soluzione

Definiamo un sistema di riferimento con asse x parallelo al piano e concorde al moto (cioè diretto verso il basso) e asse y perpendicolare al piano. Prendiamo l'origine in corrispondenza del punto di partenza del blocco. Lungo la direzione x si ha un moto uniformemente accelerato, in quanto le forze in gioco sono l'attrazione gravitazionale e l'attrito, entrambe costanti nel tempo (e che quindi genereranno un'accelerazione costante):

$$x_f = x_i + v_i t + a/2 t^2 = a/2 t^2 \text{ che implica } a = 2 x_f / t^2 = 2 \cdot 2.00 \text{ m} / (1.50 \text{ s}^2) = 1.78 \text{ m/s}^2.$$

La seconda legge di Newton per la componente x delle forze è $F_{g,x} - f_a = m a$, dove $F_{g,x} = m g \sin \theta$ è la componente parallela al piano della forza di gravità e f_a è la forza di attrito (parallela e opposta al moto del blocco). Si può dunque ricavare:

$$f_a = m g \sin \theta - m a = 9.37 \text{ N}.$$

Il modello di attrito che viene qui considerato descrive la forza attraverso l'espressione $f_a = \mu n$, dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico e n è il modulo della reazione vincolare del piano. Quest'ultimo può essere ricavato dall'equilibrio delle forze lungo y (dove non c'è moto quindi $a_y = 0$): $n = F_{g,y} = m g \cos \theta$. Per il coefficiente di attrito dinamico si ha $\mu_d = f_a / n = f_a / (m g \cos \theta) = 0.368$. Come detto il moto è uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, cioè $v_f = v_i + a t = a t$. Per percorrere 2.00 m il blocco impiega 1.50 s e quindi $v_f = 1.78 \text{ m/s}^2 \cdot 1.50 \text{ s} = 2.67 \text{ m/s}$.

Esercizio 15 (Problema 10 pag. 148, Capitolo 5)

Una passeggera all'aeroporto trasporta la sua valigia del peso di 20.0 kg a velocità costante, agendo su una cinghia che forma un angolo θ con l'orizzontale (Figura P5.10). La donna esercita sulla cinghia una forza di 35.0 N mentre la forza di attrito sulla valigia è di 20.0 N.

- Disegna il diagramma di corpo libero per la valigia.
- Che angolo forma la cinghia con l'orizzontale?
- Qual è la forza di reazione normale esercitata dal suolo sulla valigia?

(Forze di attrito)

Soluzione

Nel diagramma di corpo libero compaiono quattro forze: la forza esercitata dalla donna \mathbf{F}_d (diretta a nord-est con un angolo θ rispetto all'orizzontale), la forza di attrito \mathbf{F}_a (parallela al piano e opposta alla direzione del moto), la forza gravitazionale \mathbf{F}_g (diretta verso il basso) e la reazione vincolare del pavimento \mathbf{n} (diretta verso l'alto, essendo il piano orizzontale). Dalla seconda legge di Newton e sapendo che la velocità è costante, ossia l'accelerazione è nulla si ha $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ che scritta in componenti (rispetto a un sistema di riferimento cartesiano con asse x parallelo al pavimento e asse y ortogonale ad esso) risulta:

$$\sum_i F_{ix} = F_d \cos \theta - F_a = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = n + F_d \sin \theta - F_p = 0$$

Dalla prima equazione si ricava $\theta = \arccos(F_a/F_d) = \arccos(20.0/35.0) = 55.1^\circ$. Dalla seconda equazione si ottiene $n = F_p - F_d \sin \theta = m g - F_d \sin \theta = 167 \text{ N}$.

Esercizio 16 (Problema 20 pag. 149, Capitolo 5)

Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, un elettrone ruota su una traiettoria circolare attorno ad un protone. La velocità dell'elettrone è approssimativamente $2.20 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Trovare (a) la forza agente sull'elettrone quando esso ruota su un'orbita circolare di raggio $0.530 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ e (b) l'accelerazione centripeta dell'elettrone.

(Moto circolare uniforme)

Soluzione

Siamo in un caso di moto circolare uniforme, per cui la forza ha solamente componente radiale (centripeta), ma non tangenziale alla traiettoria. Il modulo della forza è quindi dato da $F = m a_c$, dove $a_c = v^2/R$ è il modulo dell'accelerazione centripeta. Usando i dati del problema si ottiene $a_c = 9.13 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2$ e $F = 8.32 \cdot 10^{-8} \text{ N}$ (avendo usato il valore della massa dell'elettrone $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$).

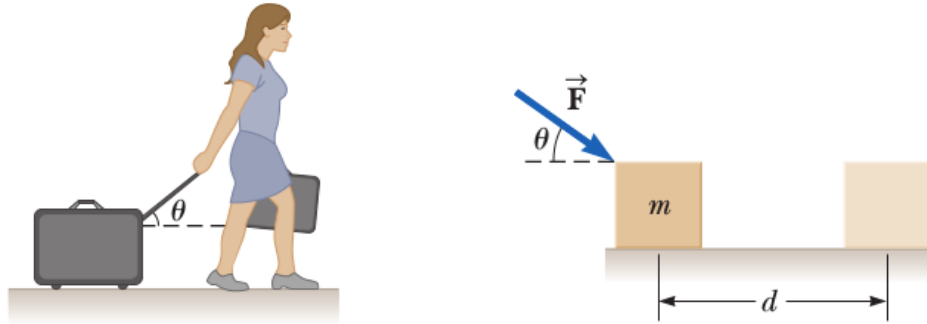


Figura P5.10 (sinistra) e Figura P6.3 (destra).

Esercizio 17 (Problema 29 pag. 150, Capitolo 5)

Una piccola sfera di massa 3.00 g è rilasciata dalla quiete a $t = 0$ in una bottiglia di shampo liquido. Si osserva che la velocità limite è $v_l = 2.00$ cm/s. Trovare:

- la costante b di $\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$, dove \mathbf{R} è la forza di attrito
- il tempo τ' necessario per raggiungere $0.632 v_l$
- il valore della forza di attrito quando la sferetta raggiunge v_l .

(Forza di attrito dipendente dalla velocità)

Soluzione

Dalla seconda legge di Newton si ha $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{R}$. Quando la sfera raggiunge la velocità limite, la velocità rimane costante, ossia l'accelerazione diventa nulla. Si ha quindi $0 = mg - bv_l$, da cui $b = mg/v_l = 1.47$ kg/s.

Risolviendo l'equazione differenziale data dalla seconda legge di Newton $dv/dt = g - bv/m$ si ottiene $v = v_l(1 - \exp(-t/\tau))$, dove $v_l = mg/b$ e $\tau = m/b$. Per $v = 0.632 v_l$ si ha $0.632 v_l = v_l(1 - \exp(-\tau'/\tau))$ da cui $\tau' = \tau = m/b = 2.04 \cdot 10^{-3}$ s.

Il modulo della forza di attrito per $v = v_l$ è dato da $|\mathbf{R}| = bv_l = 2.94 \cdot 10^{-2}$ N.

Esercizio 18 (Problema 31 pag. 150, Capitolo 5)

Del materiale di imballaggio viene fatto cadere da un'altezza di 2.00 m al suolo. Fino a quando raggiunge la sua velocità limite la sua accelerazione è data da $a = g - bv$. Quando il materiale è caduto di 0.500 m, esso raggiunge la velocità limite e impiega altri 5.00 s per raggiungere il suolo. (a) Qual è il valore della costante b ? (b) Qual è l'accelerazione per $t = 0$ s? (c) Qual è l'accelerazione quando la velocità è di 0.150 m/s?

(Moto in presenza di forza di attrito dipendente dalla velocità)

Soluzione

In questo moto in cui la forza di attrito dipende dalla velocità, al crescere di quest'ultima cresce la forza di opposizione al moto facendo diminuire l'accelerazione fino ad annullarla. Quindi inizialmente la velocità cresce per poi divenire costante a partire dal momento in cui essa è talmente grande da far sì che l'attrito contro-bilanci l'accelerazione gravitazionale. Nel problema in questione questo avviene dopo che il corpo è caduto di 0.500 m, quindi nella seconda parte del moto (per una distanza $d = (2.00 - 0.500) \text{ m} = 1.50 \text{ m}$ e un tempo $t_2 = 5.00 \text{ s}$) il corpo segue un moto uniforme da cui:

$$v_l = d/t_2 = 1.50 \text{ m}/5.00 \text{ s} = 0.300 \text{ m/s}.$$

Inoltre da $a = 0$, si ricava

$$b = g/v_l = 9.80 \text{ m/s}^2/0.300 \text{ m/s} = 32.7 \text{ s}^{-1}.$$

Il corpo parte da fermo, ossia a $t = 0$ la velocità è nulla da cui si ha $a(t = 0) = g = 9.80 \text{ m/s}^2$ per quanto riguarda il modulo dell'accelerazione, la quale è diretta come l'accelerazione di gravità (cioè verticalmente e verso il basso).

Per un valore generico di v compreso tra 0 e v_l , l'accelerazione è data da $a = g - bv$ (dove \vec{a} ha la stessa direzione e verso di \vec{g}), da cui:

$$a(v = 0.150 \text{ m/s}) = 9.80 \text{ m/s}^2 - 32.7 \cdot 0.150 \text{ m/s}^2 = 4.90 \text{ m/s}^2.$$

Esercizio 19 (Problema 35 pag. 150, Capitolo 5)

Quando una meteora si trova ad una distanza dalla superficie terrestre pari a 3.00 volte il raggio della Terra, quanto vale l'accelerazione di caduta libera dovuta alla gravità agente su di essa?

(Forze fondamentali della natura)

Soluzione

La legge di gravitazione universale di Newton ci dice che un corpo di massa m è attratto dalla Terra con una forza di modulo pari a $F_g = G \frac{m_T m}{r^2}$, dove $m_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg² e r è la distanza del corpo dal centro della Terra. In questo caso, il corpo si trova ad una distanza dalla superficie terrestre pari a $3.00 R_T$ ossia la distanza dal centro della Terra risulta essere $r = 4.00 R_T$ (con $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m). Considerando l'accelerazione di caduta libera data da $a = F_g/m$ e sostituendo i valori numerici si ottiene $a = 0.613$ m/s². L'accelerazione è diretta verso il centro della Terra.

(Più velocemente il problema si sarebbe potuto risolvere notando che l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre è $g = G \frac{m_T}{R_T^2} = 9.80$ m/s² e siccome $r = 4.00 R_T$ l'accelerazione che si sta cercando è $a = g/16$.)

Esercizio 20 (Problema 3 pag. 186, Capitolo 6)

Un blocco di massa 2.50 kg viene spinto per 2.20 m lungo un tavolo orizzontale liscio da una forza costante di 16.0 N diretta a 25.0° al di sotto dell'orizzontale, come mostrato in Figura P6.3. Determinare il lavoro: a) della forza applicata, b) della forza normale esercitata dal tavolo, c) della forza di gravità, d) della forza risultante sul blocco.

(Lavoro di una forza costante)

Soluzione

Nel caso di forza costante (in senso spaziale, cioè indipendente dalla posizione) il lavoro è dato dal prodotto scalare $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{x} = F \Delta x \cos \theta$, dove θ è l'angolo tra forza e spostamento. Le tre forze considerate nei punti a), b) e c) sono tutte costanti. Si ha quindi:

a) $W_{app} = F_{app} \Delta x \cos 25.0^\circ = 31.9$ J

b) $W_n = n \Delta x \cos 90.0^\circ = 0$

c) $W_g = F_g \Delta x \cos 90.0^\circ = 0$

d) $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{x} = (\mathbf{F}_{app} + \mathbf{n} + \mathbf{F}_g) \cdot \Delta \mathbf{x} = F_{app} \Delta x \cos 25.0^\circ = W_{app} = 31.9 \text{ J}$.

Nei passaggi di cui sopra si è utilizzato il fatto che forza normale e forza di gravità sono verticali, ossia ortogonali al moto su un piano orizzontale.

Esercizio 21 (Problema 14 pag. 186, Capitolo 6)

La forza agente su di una particella varia come mostrato in Figura P6.14. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza sulla particella quando essa si muove (a) da $x = 0$ a $x = 8.00 \text{ m}$, (b) da $x = 8.00 \text{ m}$ a $x = 10.0 \text{ m}$ e (c) da $x = 0$ a $x = 10.0 \text{ m}$

(Lavoro di una forza variabile)

Soluzione

La definizione di lavoro è attraverso l'integrale $W = \int F_x dx$. In generale, l'integrale di una curva fornisce l'area sottesa dalla curva stessa. Quindi possiamo calcolare il lavoro come l'area sottesa dalla curva di F_x . Ricordando che l'area di un triangolo è $b \cdot h/2$ (dove b è la base e h è l'altezza) si ha:

(a) $W_a = 8.00 \text{ m} \cdot 6.00 \text{ N}/2 = 24.0 \text{ J}$.

(b) $W_b = (10.0 - 8.00) \text{ m} \cdot (-3.00 \text{ N})/2 = -3.00 \text{ J}$.

(c) $W_c = W_a + W_b = (24.0 - 3.00) \text{ J} = 21.0 \text{ J}$.

Notare che nell'ultimo passaggio si è utilizzata la proprietà degli integrali $\int_a^c F_x dx = \int_a^b F_x dx + \int_b^c F_x dx$.

Esercizio 22 (Problema 17 pag. 187, Capitolo 6)

Quando una massa di 4.00 kg è appesa verticalmente a una molla di massa trascurabile che obbedisce alla legge di Hooke, la molla si allunga di 2.50 cm . Se si toglie la massa di 4.00 kg , a) di quanto si allungerà la molla se si sospende ad essa una massa di 1.50 kg e b) quanto lavoro deve compiere un agente esterno per allungare la stessa molla di 4.00 cm dalla sua posizione di equilibrio?

(Lavoro molla)

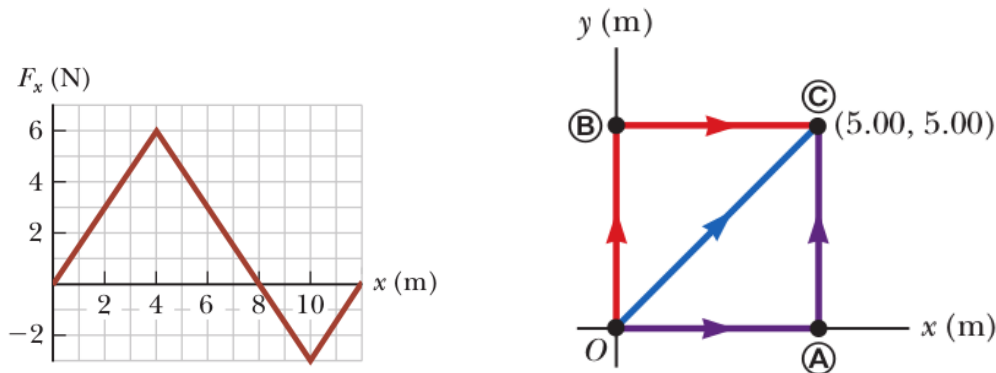


Figura P6.14 (sinistra) e Figura P6.42 (destra).

Soluzione

Utilizziamo la legge di Hooke $F_m = -kx$ e la seconda legge di Newton (equilibrio tra forza peso e forza della molla) $F_g + F_m = 0$ per determinare la costante elastica $k = m_1 g/x_1 = 1.57 \cdot 10^3 \text{ rmkg/s}^2$. Quando si appende la seconda massa $m_2 g = kx_2$ da cui $x_2 = m_2 g/k = x_1 m_2/m_1 = 0.938 \text{ cm}$.

Il lavoro compiuto da una molla si calcola attraverso l'integrale $W_m = \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = -k/2 (x_f^2 - x_i^2)$. La forza praticata è uguale in modulo e direzione e opposta in verso rispetto alla forza della molla, per cui $W_{est} = -W_m$. Partendo dalla posizione di equilibrio ($x_i = 0$), il lavoro per allungare la molla fino a $x_f = 4.00 \text{ cm}$ è $W_{est} = k/2 \cdot x_f^2 = 1.25 \text{ J}$.

Esercizio 23 (Problema 17 pag. 183 - Edizione IV)

Occorrono 4.00 J di lavoro per allungare di 10.0 cm dalla posizione di riposo una molla che obbedisce alla legge di Hooke. Determinare il lavoro aggiuntivo necessario per allungare la molla di altri 10.0 cm.

(Lavoro molla)

Soluzione

Dalla legge di Hooke $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ si può calcolare il lavoro compiuto da una molla attraverso l'integrale $W_m = \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = -k/2 (x_f^2 - x_i^2)$.

La forza praticata è uguale in modulo e direzione e opposta in verso rispetto alla forza della molla, per cui $W_{app} = -W_m$. La molla parte dalla posizione di riposo, cioè $x_i = 0$. Il lavoro per il primo allungamento è dato da $W_{app,1} = k/2 \cdot x_{f,1}^2$, mentre il lavoro per l'allungamento totale è $W_{app,2} = k/2 \cdot (x_{f,1} + \Delta x)^2$. Notando che $\Delta x = x_{f,1} = 10.0$ cm, si ottiene $W_{app,2} = k/2 \cdot 4x_{f,1}^2 = 4W_{app,1}$. Il lavoro aggiuntivo necessario è dunque $\Delta W = W_{app,2} - W_{app,1} = 3W_{app,1} = 12.0$ J.

Esercizio 24 (Problema 31 pag. 188, Capitolo 6)

Una particella di 0.600 kg ha una velocità di 2.00 m/s nel punto A e un'energia cinetica di 7.50 J nel punto B. Qual è la sua energia cinetica nel punto A e la sua velocità nel punto B? Qual è il lavoro totale svolto sulla particella quando essa si sposta da A a B?

(Teorema dell'energia cinetica)

Soluzione

Dalla definizione di energia cinetica $K = mv^2/2$ si ottiene $K_A = mv_A^2/2 = 1.20$ J e $v_B = \sqrt{2K_B/m} = 5.00$ m/s. Per il teorema dell'energia cinetica, il lavoro totale compiuto dalle forze esterne sulla particella è uguale alla variazione dell'energia cinetica della particella:

$$W = \Delta K = K_B - K_A = 6.30 \text{ J.}$$

Esercizio 25 (Problema 36 pag. 184 - Edizione IV)

Uno sciatore di massa 70.0 kg viene fatto risalire da una fune tramite una funivia a motore. a) Quanto lavoro è richiesto per tirarlo su per una distanza di 60.0 m con una pendenza di 30.0° (poniamo senza attrito) e a una velocità costante di 2.00 m/s? b) Quanta potenza è richiesta per questo compito?

(Potenza)

Consideriamo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo al pendio. La componente della forza gravitazionale lungo x è $-mg \sin \theta$. Essendo

la velocità costante, l'accelerazione è nulla, e dalla seconda legge di Newton $T + F_{g,x} = 0$ si ottiene che la forza esercitata dalla fune è pari a $T = m g \sin \theta$. Tale forza è parallela e concorde al moto e dunque $P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = T v = m g v \sin \theta = 686 \text{ W}$. La relazione tra potenza e lavoro è $P = W/\Delta t$. Essendo un moto uniforme $\Delta t = d/v = 60.0\text{m}/2.00\text{m/s} = 30.0 \text{ s}$ e $W = P \Delta t = 2.06 \cdot 10^4 \text{ J}$.

Esercizio 26 (Problema 42 pag. 185 - Edizione IV)

Un battitore lancia una palla di 0.150 kg alla velocità di 40.0 m/s e a un angolo iniziale di 30.0°. Qual è l'energia cinetica della palla nel punto più alto della traiettoria?

(Energia cinetica)

Soluzione

Siamo in un caso di moto del proiettile e scomponendo il moto lungo le due direzioni si ha orizzontalmente un moto uniforme (velocità costante), mentre un moto uniformemente accelerato lungo la verticale. Quando la palla raggiunge il punto più alto la componente verticale della velocità si annulla. Il modulo della velocità è quindi dato dalla componente orizzontale ed essendo quest'ultima costante, sarà uguale al suo valore iniziale. L'energia cinetica è quindi:

$$K = m v_x^2/2 = m/2 (v \cos \theta)^2 = 90.0 \text{ J}.$$

Esercizio 27 (Problema 37 pag. 188, Capitolo 6)

Un oggetto di massa 5.75 kg passa dall'origine al tempo $t = 0$ in modo che la componente x della sua velocità è 5.00 m/s mentre la sua componente y vale -3.00 m/s. (a) Qual è l'energia cinetica del corpo in questo istante? (b) A $t = 2.00 \text{ s}$, la particella si trova in $x = 8.50 \text{ m}$ ed $y = 5.00 \text{ m}$. Quale forza costante ha agito sul corpo durante questo intervallo di tempo? (c) Qual è la velocità della particella a $t = 2.00 \text{ s}$?

(Energia cinetica)

Soluzione

Le componenti della velocità all'istante iniziale sono $v_{x0} = 5.00$ m/s e $v_{y0} = -3.00$ m/s, da cui il modulo $v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$. L'energia cinetica è definita da $K = \frac{1}{2}m v^2$, quindi all'istante iniziale vale $K_i = \frac{1}{2}m (v_{x0}^2 + v_{y0}^2) = 97.8$ J. Essendo la forza (e quindi l'accelerazione) costante in tempo, il moto è uniformemente accelerato in entrambe le dimensioni x e y . Possiamo quindi scrivere:

$$x_f = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \rightarrow a_x = \frac{2}{t^2} (x_f - v_{x0} t)$$
$$y_f = v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \rightarrow a_y = \frac{2}{t^2} (y_f - v_{y0} t)$$

Ponendo $t = 2.00$ s, si ottiene $F_x = m a_x = -4.31$ N e $F_y = m a_y = 31.6$ N e dunque $\mathbf{F} = (-4.31 \mathbf{i} + 31.6 \mathbf{j})$ N. Per determinare la velocità si possono usare le equazioni del moto uniformemente accelerato oppure il teorema dell'energia cinetica. Prendendo quest'ultima strada, calcoliamo prima il lavoro effettuato dalla forza. Essendo la forza costante, si ha che $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$, dove $\Delta \mathbf{r} = (8.50 \mathbf{i} + 5.00 \mathbf{j})$ m, e quindi $W = F_x \Delta r_x + F_y \Delta r_y = 121$ J. Dal teorema dell'energia cinetica $W = \Delta K = K_f - K_i$, possiamo quindi scrivere $K_f = W + K_i$ e infine $v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(W + K_i)} = 8.73$ m/s.

Esercizio 28 (Problema 39 pag. 188, Capitolo 6)

Una pietra di massa 0.20 kg viene mantenuta ad 1.3 m al di sopra della superficie libera dell'acqua contenuta in un pozzo dove successivamente viene lasciato cadere. Il pozzo ha una profondità di 5.0 m. Relativamente alla superficie libera dell'acqua, qual è l'energia potenziale gravitazionale del sistema pietra-Terra (a) prima che la pietra venga rilasciata e (b) quando raggiunge il fondo del pozzo? (c) Qual è la variazione di energia potenziale gravitazionale del sistema dal rilascio fino al raggiungimento del fondo del pozzo?

(Energia potenziale)

Soluzione

Utilizziamo l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale di una particella $U_g = m g h$, dove, in questo caso, per h si intende l'altezza riferita alla

superficie libera dell'acqua, come richiesto dal problema. Nella situazione (a) otteniamo $U_g^a = m g \cdot 1.3 \text{ m} = 2.5 \text{ J}$. Nella situazione (b) invece si ha $U_g^b = m g \cdot (-5.0 \text{ m}) = -9.8 \text{ J}$. La variazione di energia potenziale gravitazionale del sistema dal rilascio fino al raggiungimento del fondo del pozzo è data dalla somma $\Delta U_g = U_g^{fin} - U_g^{in} = U_g^b - U_g^a = -12 \text{ J}$. Notare il segno negativo, che significa che l'energia potenziale gravitazionale è diminuita.

Esercizio 29 (Problema 40 pag. 189, Capitolo 6)

Un bambino del peso di 400 N si trova su un'altalena sostenuta da funi di lunghezza pari a 2.00 m. Calcolare l'energia potenziale gravitazionale del sistema bambino-Terra relativa alla posizione più bassa del bambino quando:

- le funi sono orizzontali
- le funi formano un angolo di 30.0° con la verticale
- il bambino si trova sul fondo della traiettoria circolare.

(Energia potenziale)

Soluzione

L'energia potenziale gravitazionale di un sistema che si trova ad un'altezza y (in questo caso riferita alla posizione più bassa del bambino) è: $U_g = m g y$, dove $m g$ è il peso del corpo. Quest'ultimo vale 400 N. L'altezza nei tre casi è data da $y_a = 2.00 \text{ m}$, $y_b = 2.00 \text{ m} (1 - \cos 30.0^\circ) = 0.268 \text{ m}$ e $y_c = 0$.

Si può quindi derivare:

$$U_g^a = 400 \text{ N} \cdot 2.00 \text{ m} = 800 \text{ J}, U_g^b = 400 \text{ N} \cdot 0.268 \text{ m} = 107 \text{ J} \text{ e } U_g^c = 0 \text{ J}.$$

Esercizio 30 (Problema 43 pag. 189, Capitolo 6)

Una forza che agisce su una particella che si muove sul piano xy è data da $\mathbf{F} = (2y \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}) \text{ N}$, dove x e y sono espressi in metri. La particella si muove dall'origine alla posizione finale di coordinate $x = 5.00 \text{ m}$ e $y = 5.00 \text{ m}$, come in Figura P6.42. Calcolare il lavoro compiuto da \mathbf{F} lungo i tre percorsi OAC, OBC, OC. Determinare se \mathbf{F} è conservativa.

(Forze conservative e non conservative)

Soluzione

Definiamo lo spostamento infinitesimo come $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$. Dalla definizione di lavoro si ha $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (F_x dx + F_y dy)$. Nel nostro caso specifico: $W = \int (2y dx + x^2 dy)$, espresso in Joule. Valutiamo tale integrale lungo i tre percorsi:

a) in OA, $dy = 0$ e $W_{OA} = \int_0^{5.00} 2y dx = 2y x \Big|_{x=0, y=0}^{x=5.00, y=0} = 0$.

in AC, $dx = 0$ e $W_{AC} = \int_0^{5.00} x^2 dy = x^2 y \Big|_{x=5.00, y=0}^{x=5.00, y=5.00} = 125 \text{ J}$.

$W_{OAC} = W_{OA} + W_{AC} = 0 + 125 \text{ J} = 125 \text{ J}$.

b) in OB, $dx = 0$ e $W_{OB} = \int_0^{5.00} x^2 dy = x^2 y \Big|_{x=0, y=0}^{x=0, y=5.00} = 0$.

in BC, $dy = 0$ e $W_{BC} = \int_0^{5.00} 2y dx = 2y x \Big|_{x=0, y=5.00}^{x=5.00, y=5.00} = 50.0 \text{ J}$.

$W_{OBC} = W_{OB} + W_{BC} = 0 + 50.0 \text{ J} = 50.0 \text{ J}$.

c) Nel percorso OC la traiettoria è data dalla diagonale del quadrato, cioè dalla bisettrice del primo quadrante, ossia $y = x$ e quindi $dy = dx$. Sostituendo in $W = \int (2y dx + x^2 dy)$ si ottiene $W_{OC} = \int_0^{5.00} (2x + x^2) dx = (x^2 + x^3/3) \Big|_0^{5.00} = 66.7 \text{ J}$.

La forza non è conservativa visto che il lavoro effettuato dipende dal percorso.

Esercizio 31 (Problema 47 pag. 189, Capitolo 6)

Una forza conservativa $F_x = (2x + 4) \text{ N}$ agisce su una particella di 5.00 kg , essendo x espresso in m. Quando la particella si muove lungo l'asse x da $x_1 = 1.00 \text{ m}$ a $x_2 = 5.00 \text{ m}$, calcolare (a) il lavoro svolto da questa forza, (b) la variazione di energia potenziale del sistema e (c) la sua energia cinetica nel punto $x_2 = 5.00 \text{ m}$, se la sua velocità è pari a 3.00 m/s nel punto $x_1 = 1.00 \text{ m}$.

(Forze conservative e Energia Potenziale)

Soluzione

Il lavoro è definito come l'integrale della forza per lo spostamento. In questo caso si ha: $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} (2x + 4) dx \text{ J} = [(x_2^2 + 4x_2) - (x_1^2 + 4x_1)] \text{ J} = (45.0 - 5.00) = 40.0 \text{ J}$.

Per una forza conservativa vale $F_x = -dU/dx$ e quindi il lavoro è uguale alla variazione di energia potenziale cambiata di segno:
 $\Delta U = -W = -40.0 \text{ J}$.

Essendo il sistema isolato e la forza conservativa, l'energia meccanica totale si conserva: $\Delta K + \Delta U = 0$, da cui:
 $K_f = \frac{1}{2}m v_f^2 = -\Delta U + \frac{1}{2}m v_i^2 = 40.0 \text{ J} + \frac{1}{2}5.00 \cdot 9.00 \text{ J} = 62.5 \text{ J}$.

Esercizio 32 (Problema 50 pag. 189, Capitolo 6)

Un sistema consiste di tre particelle, ciascuna di massa 5.00 g, poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato 30.0 cm. (a) Calcolare l'energia potenziale gravitazionale del sistema. (b) Se le particelle sono lasciate libere simultaneamente, dove collideranno?

(Energia potenziale gravitazionale)

Soluzione

L'energia potenziale gravitazionale totale del sistema è data dalla somma delle energie potenziali di ogni possibile coppia del sistema:

$$U_{\text{ sistema }} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G \frac{m_1 m_2}{l} - G \frac{m_1 m_3}{l} - G \frac{m_2 m_3}{l} = -3 G \frac{m^2}{l} = -3 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \frac{(5 \cdot 10^{-3})^2 \text{ kg}^2}{0.300 \text{ m}} = -1.67 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Essendo la forza gravitazionale diretta lungo la bisettrice degli angoli del triangolo ed uguale in modulo per le tre particelle, queste si incontreranno all'intersezione delle bisettrici data (notare che questo è un caso particolare dovuto al fatto che sia le 3 masse sia le 3 distanze sono uguali fra loro) da:

$$d = h/2 = \sqrt{l^2 - (l/2)^2}/2 = \sqrt{3}l/4 = 13.0 \text{ cm}.$$

Esercizio 33 (Problema 51 pag. 189, Capitolo 6)

Un satellite terrestre ha una massa di 100 kg e si trova ad un'altezza di $2.00 \cdot 10^6 \text{ m}$. a) Qual è l'energia potenziale del sistema satellite-Terra? b) Qual è il modulo della forza gravitazionale esercitata dalla Terra sul satellite? c) Quale forza esercita il satellite sulla Terra?

(Forza gravitazionale)

Soluzione

L'energia potenziale gravitazionale associata a un sistema di due corpi 1 e 2 è definita come $U_g = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ dove r è la distanza reciproca. In questo caso la distanza r è la distanza del satellite dal centro della Terra, ossia $r = h + R_T$, dove h è la distanza del satellite dalla superficie terrestre e R_T è il raggio della Terra. Conoscendo il valore di $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ e la massa e il raggio della Terra ($m_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e $R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$, $m_s = 5.98 \cdot 10^{24}$), l'energia potenziale risulta:

$$U_g = -G \frac{m_s m_T}{h + R_T} = -4.77 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

Il modulo della forza gravitazionale della Terra sul satellite è dato da $F_{TS} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = G \frac{m_s m_T}{(h + R_T)^2} = 569 \text{ N}$.

Per il terzo principio della dinamica, il satellite esercita sulla Terra una forza uguale in modulo e direzione a F_{TS} , ma opposta in verso (cioè diretta verso il satellite).

Esercizio 34 (Problema 52 pag. 189, Capitolo 6)

Quanta energia è necessaria per allontanare una massa di 1000 kg dalla superficie terrestre ad un'altezza doppia del raggio della Terra?

(Energia potenziale gravitazionale)

Soluzione

L'energia potenziale gravitazionale associata al sistema massa-Terra è $U_g = -G m_T m/r$. Considerando la differenza di energia potenziale tra i due punti R_T e $3 R_T$ (quest'ultimo da $R_T + 2 R_T$) si ha:

$$E = \Delta U_g = U_g^f - U_g^i = -G \frac{m_T m}{3 R_T} + G \frac{m_T m}{R_T} = G \frac{2 m_T m}{3 R_T} = 4.18 \cdot 10^{10} \text{ J,}$$

dove si sono usati i valori $R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$, $m_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$.

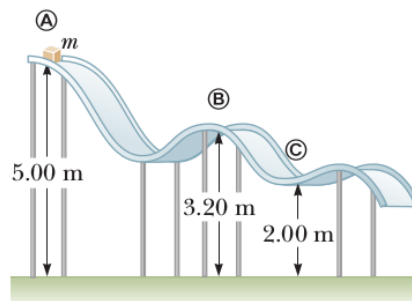
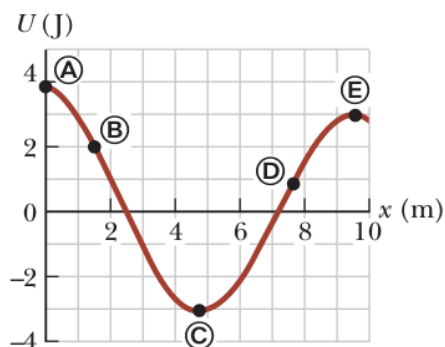


Figura P6.54 (sinistra) e Figura P7.6 (destra).

Esercizio 35 (Problema 54 pag. 190, Capitolo 6)

Per la curva di energia potenziale in Figura P6.54): a) Determinare se la forza F_x è positiva, negativa o nulla nei vari punti. b) Indicare i punti di equilibrio stabile, instabile o indifferente. c) Fare uno schizzo grossolano della curva F_x in funzione di x da $x = 0$ a $x = 9.5$.

(Diagrammi di energia)

Soluzione

Per una forza conservativa vale $F_x = -dU/dx$. In A ed E si hanno punti di massimo del potenziale quindi la derivata è nulla e $F_x = 0$. In B la funzione è decrescente quindi la derivata è negativa e $F_x > 0$. In C si ha un punto di minimo, che implica $F_x = 0$. In D la funzione cresce, la derivata è positiva e $F_x < 0$.

A ed E sono punti di equilibrio instabile (ossia massimi del potenziale), mentre C è un punto di equilibrio stabile (minimo del potenziale).

Per disegnare la curva, occorre partire dalle considerazioni che in A, C ed E la forza è nulla, in B è positiva e in D è negativa. Inoltre studiando la derivata seconda della curva di U , che corrisponde alla derivata di F cambiata di segno, si nota che la curva della forza cresce subito dopo A, ha un massimo (flesso in U), decresce, dopo C diventa negativa per raggiungere un minimo (flesso tra C e D) e tornare a crescere.

Esercizio 36 (Problema 13 pag. 222, Capitolo 7)

Una slitta di massa m , che si trova in un lago gelato, riceve una spinta che le comunica una velocità iniziale di 2.00 m/s. Il coefficiente di attrito dinamico tra la slitta e il ghiaccio è 0.100. Mediante considerazioni energetiche trovare la distanza percorsa dalla slitta prima di fermarsi.

(Attrito dinamico)

Soluzione

La forza di attrito trasforma l'energia cinetica in energia interna, ossia, dalla conservazione dell'energia e in assenza di forze esterne, si ha che la variazione dell'energia cinetica ΔK è uguale al lavoro svolto dalle forze di attrito W_d : $\Delta K = -f_d d$ ($W_d = -f_d d$ essendo la forza di attrito costante lungo il percorso). La forza di attrito è data da $f_d = \mu_d n$, dove n è la forza normale che in questo caso è uguale e opposta alla forza peso, per cui il modulo è $n = m g$.

Per calcolare la distanza percorsa dalla slitta prima di fermarsi consideriamo la variazione di energia cinetica da K_i a $K_f = 0$:

$$\Delta K = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2} m v_i^2 = -f_d d = -\mu_d m g d,$$

da cui si ricava:

$$d = \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{\mu_d g} = \frac{2.00 \text{ m}^2/\text{s}^2}{0.100 \cdot 9.80 \text{ m/s}^2} = 2.04 \text{ m}.$$

Esercizio 37 (Problema 6 pag. 221, Capitolo 7)

Una particella di massa $m = 5.00$ kg è lasciata libera nel punto A ($h_A = 5.00$ m) e scivola senza attrito sulla guida mostrata in Figura P7.6. Determinare (a) la velocità della particella nei punti B ($h_B = 3.20$ m) e C ($h_C = 2.00$ m), (b) il lavoro totale fatto dalla forza gravitazionale quando la particella si sposta da A a C.

(Energia Potenziale)

Soluzione

Questo problema si risolve notando che, in assenza di attrito, siamo in un caso di sistema isolato, per cui l'energia meccanica totale del sistema si conserva. Avremo quindi $E_A^{mecc} = E_B^{mecc} = E_C^{mecc}$. Per questo sistema, l'energia meccanica è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale $E^{mecc} = K + U$. Nei tre punti si ha:

$$E_A^{mecc} = K_A + U_A = 0 + m g h_A = m g h_A$$

$$E_B^{mecc} = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B$$

$$E_C^{mecc} = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h_C .$$

Eguagliando l'energia meccanica nel punto A con l'energia meccanica nei punti B e C si può ricavare la velocità in questi punti: $v_B = \sqrt{2 g (h_A - h_B)} = \sqrt{2 \cdot 9.80 \text{ m/s}^2 \cdot 1.80 \text{ m}} = 5.94 \text{ m/s}$
 $v_C = \sqrt{2 g (h_A - h_C)} = \sqrt{2 \cdot 9.80 \text{ m/s}^2 \cdot 3.00 \text{ m}} = 7.67 \text{ m/s} .$

Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale (che è conservativa) è dato dalla variazione di energia potenziale cambiata di segno (come si evince dalle relazioni $F = -dU/dx$ e $dW = F dx$) e quindi:

$$W_{AC} = -U_C + U_A = m g (h_A - h_C) = 147 \text{ J}.$$

Esercizio 38 (Problema 21 pag. 222, Capitolo 7)

Un blocco di 5.00 kg viene fatto salire lungo un piano inclinato con una velocità iniziale di $v_i = 8.00 \text{ m/s}$ (Figura P7.21). Il blocco si ferma dopo aver percorso 3.00 m lungo il piano, che è inclinato di $\theta = 30.0^\circ$ rispetto all'orizzontale, come indicato nella figura. Per questo moto determinare: (a) la variazione di energia cinetica del blocco, (b) la variazione di energia potenziale del sistema blocco-Terra, (c) la forza d'attrito esercitata sul blocco (considerata costante). (d) Qual è il valore del coefficiente di attrito dinamico?

(Variazioni Energia Meccanica)

Soluzione

Dalla definizione di energia cinetica $K = m v^2/2$, ricaviamo la sua variazione tra istante iniziale (dove $v_i = 8.00$ m/s) e istante finale (dove $v_f = 0$): $\Delta K = K_f - K_i = 0 - m v_i^2/2 = -160$ J. L'energia potenziale gravitazionale del sistema blocco-Terra è data da $U_g = m g h$, dove h è l'altezza rispetto a un certo livello di riferimento (che noi scegliamo essere il suolo). Inizialmente il blocco si trova a $h_i = 0$ mentre al momento dell'arresto è ad un'altezza $h_f = d \sin \theta = 1.50$ m. La variazione dell'energia potenziale del sistema è quindi $\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = m g h_f - 0 = 73.5$ J.

Essendo il sistema isolato la sua variazione di energia meccanica è data dal lavoro svolto dalla forza di attrito, ossia (in caso di forza costante): $\Delta K + \Delta U = -F_a d$. Dai calcoli appena svolti si ha $\Delta K + \Delta U = -86.5$ J, da cui il modulo della forza di attrito $F_a = -(\Delta K + \Delta U)/d = 28.8$ N. La direzione è parallela al piano e il verso opposto al moto.

La forza di attrito dinamico può essere modellizzata attraverso $F_a = \mu_d |\mathbf{n}|$, dove \mathbf{n} è la reazione normale esercitata dal piano sul blocco, in modulo pari a $|\mathbf{n}| = m g \cos \theta = 42.4$ N. Il coefficiente di attrito dinamico vale quindi $\mu_d = F_a/|\mathbf{n}| = 0.679$.

Esercizio 39 (Problema 29 pag. 223, Capitolo 7)

Un Marine del peso di 820 N durante un allenamento sale su una corda verticale di 12.0 m a una velocità costante in 8.00 s. Qual è la potenza emessa?

(Potenza)

Consideriamo la definizione di potenza $P = dW/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. In questo caso la forza \mathbf{F} esercitata dal Marine è opposta alla forza gravitazionale (data dal suo peso) e in modulo vale $F = 820$ N. La velocità \mathbf{v} è concorde alla forza e in modulo vale $v = 12.0\text{m}/8.00\text{s} = 1.50\text{m/s}$. Essendo forza e velocità parallele, la potenza risulta semplicemente $P = F v = 1.23$ kW.

Esercizio 40 (Problema 71 pag. 227, Capitolo 7)

Un blocco di 10.0 kg è lasciato libero in un punto A, ad altezza 3.00 m, come mostrato in Figura P7.71. La pista è priva di attrito, fatta eccezione per

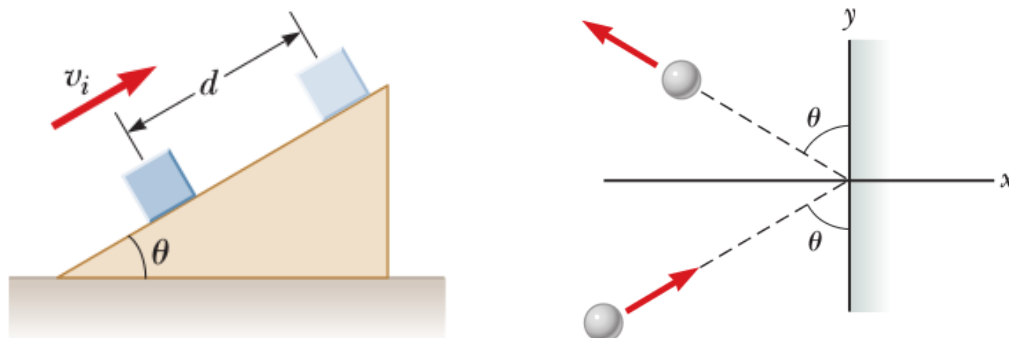


Figura P7.21 (sinistra) e Figura P8.9 (destra).

il tratto tra i punti B e C, lungo 6.00 m. Il blocco scende lungo la guida, colpisce una molla di costante elastica $k = 2250 \text{ N/m}$, determinandone una compressione di 0.300 m rispetto alla sua lunghezza di equilibrio, prima del momentaneo arresto. Determinare il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e la superficie scabra tra i punti B e C.

(Conservazione dell'energia)

Soluzione

Per risolvere il problema, scomponiamo il moto del blocco in tre fasi. La prima è tra A e B, la seconda tra B e C, e la terza tra C e la compressione della molla. Nella prima fase l'energia meccanica si conserva per cui $K_A + U_A^g = K_B + U_B^g$, dove U^g è l'energia potenziale gravitazionale del sistema e K è l'energia cinetica. Inizialmente il blocco è fermo, quindi $K_A = 0$. Considerando il livello del suolo come livello zero dell'energia potenziale gravitazionale si ha $U_B^g = 0$, da cui si deduce $U_A^g = K_B$, con $U_A^g = mgh$ (con $h = 3.00 \text{ m}$) e $K_B = \frac{1}{2}mv_B^2$.

Nella seconda fase il piano scabro determina una riduzione della velocità del blocco. La variazione dell'energia cinetica è pari al lavoro compiuto dalla forza di attrito ($K_C - K_B = W_d$), per cui $\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu_d d m g$, dove si è usato il modulo della forza di attrito dato da $f_d = \mu_d |\mathbf{n}|$ (con $|\mathbf{n}| = mg$) e il lavoro della forza di attrito pari a $W_d = -f_d d$ (con $d = 6.00 \text{ m}$). Il coefficiente di attrito dinamico è quindi dato da: $\mu_d = (K_B - K_C)/(d m g)$

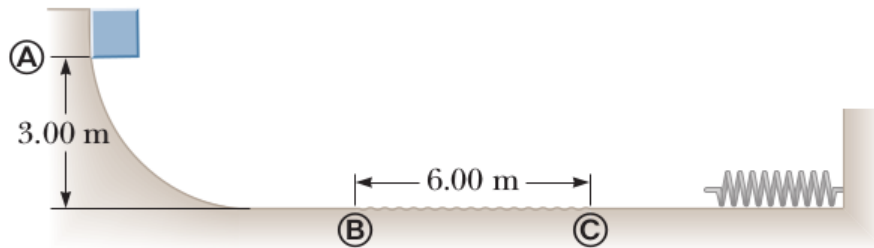


Figure 8: Figura P7.71.

Nella terza fase, durante la compressione della molla, vale nuovamente la conservazione dell'energia meccanica, dove ora l'energia potenziale in gioco è quella elastica $U^e = \frac{1}{2}k \Delta x^2$. Prima del contatto con la molla $U_C^e = 0$ e $K_C = \frac{1}{2}m v_C^2$, mentre alla massima compressione l'energia cinetica è nulla (perchè il blocco è fermo) e $U_f^e = \frac{1}{2}k \Delta x^2$ con $\Delta x = 0.300$ m. Si ha quindi $K_C = U_f^e$.

Considerando ora insieme le informazioni ottenute per le varie fasi possiamo scrivere:

$$\mu_d = (K_B - K_C)/(d m g) = (U_A^g - U_f^e)/(d m g) = (m g h - \frac{1}{2}k \Delta x^2)/(d m g) = 0.328.$$

Esercizio 41 (Problema 9 pag. 266, Capitolo 8)

Una palla di acciaio di massa 3.00 kg colpisce un muro con velocità di 10.0 m/s ad un angolo di $\theta = 60.0^\circ$ rispetto alla superficie. Essa rimbalza con la stessa velocità e con lo stesso angolo (Figura P8.9). Se la palla rimane a contatto con il muro per 0.200 s, qual è la forza media esercitata dalla parete sulla palla?

(Quantità di moto)

Soluzione

Dalla definizione di quantità di moto $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ si può facilmente ricavare l'espressione della forza media $\mathbf{F}_m = \Delta \mathbf{p} / \Delta t$. La soluzione del problema passa quindi per il calcolo della variazione della quantità di moto della palla

$\Delta \mathbf{p} = m(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i)$ data dalla variazione della velocità. Il modulo della velocità rimane invariato dopo l'urto e vale $v = 10.0$ m/s. Le componenti rispetto a un sistema cartesiano (con l'asse y parallelo al muro e diretto verso l'alto e l'asse x entrante nel muro) sono:

$$v_{ix} = v \sin \theta, \quad v_{iy} = v \cos \theta$$

$$v_{fx} = -v \sin \theta, \quad v_{fy} = v \cos \theta.$$

La variazione di velocità risulta: $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i = -2v \sin \theta \mathbf{i}$. Di conseguenza la variazione di quantità di moto vale $\Delta \mathbf{p} = -2vm \sin \theta \mathbf{i}$ e la forza media $\mathbf{F}_m = -2vm \sin \theta \mathbf{i} / \Delta t = -260 \mathbf{i}$ N.

Esercizio 42 (Problema 11 pag. 266, Capitolo 8)

L'andamento della forza che agisce su una palla da baseball quando è colpita dalla mazza è mostrato in Figura P8.11. Da questo grafico, calcolare (a) l'impulso impresso alla palla, (b) la forza media esercitata sulla palla e (c) la forza massima esercitata sulla palla.

(Impulso)

Soluzione

Il teorema dell'impulso lega l'impulso alla forza risultante: $\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} dt \mathbf{F}$. Quindi il modulo dell'impulso è fornito dall'area sottesa dalla curva della forza in figura (perchè tale area è proprio ciò che si ottiene dal calcolo dell'integrale). Essendo la curva in questione un triangolo, l'area è data da base x altezza/2. Nel nostro caso base = $\Delta t = 1.5$ ms e altezza = $F_{max} = 18$ kN. Il modulo dell'impulso impresso alla palla è $|\mathbf{I}| = \Delta t F_{max} / 2 = 13.5$ N s. La forza media è data da $\mathbf{F}_m = 1/\Delta t \int_{t_i}^{t_f} dt \mathbf{F}$, quindi il modulo è $|\mathbf{F}_m| = |\mathbf{I}|/\Delta t = 9.00$ kN. La forza massima esercitata sulla palla è data dal massimo della curva della forza, cioè $F_{max} = 18.0$ kN.

Esercizio 43 (Problema 15 pag. 267, Capitolo 8)

Un vagone ferroviario di massa 2.50×10^4 kg si muove con velocità 4.00 m/s. Esso urta e si aggancia ad altri tre vagoni ferroviari, della sua stessa massa e che si muovono nello stesso verso e con velocità di 2.00 m/s. (a) Qual è la

velocità dei quattro vagoni dopo l'urto? (b) Quanta energia meccanica viene persa nell'urto?

(Urti anelastici)

Soluzione

Siamo in un caso di urto perfettamente anelastico. Il sistema formato dai quattro vagoni può essere considerato come un sistema isolato, per cui la quantità di moto totale del sistema si conserva: $\frac{d\mathbf{p}_{tot}}{dt} = 0$. La quantità di moto iniziale è data da $p_i = m v_{i,1} + 3 m v_{i,2}$ (con $v_{i,1} = 4.00$ m/s e $v_{i,2} = 2.00$ m/s), mentre quella finale è $p_f = (m + 3 m) v_f$. Imponendo $p_i = p_f$, si ottiene $v_f = (v_{i,1} + 3 v_{i,2})/4 = 2.50$ m/s.

In questo caso, l'energia meccanica è formata dalla sola energia cinetica. La variazione è quindi data da:

$$\Delta E_{mecc} = \Delta K = \frac{1}{2}(4m) v_f^2 - \frac{1}{2}m v_{i,1}^2 - \frac{1}{2}(3m) v_{i,2}^2 = -3.75 \times 10^4 \text{ J.}$$

Esercizio 44 (Problema 17 pag. 267, Capitolo 8)

Un pezzo di argilla di 12.0 g viene scagliato su un blocco di legno di 100 g, fermo su una superficie orizzontale. L'argilla si appiccica al blocco. Dopo l'urto, il blocco scivola per un tratto di 7.50 m prima di arrestarsi. Se il coefficiente d'attrito tra il blocco e la superficie è 0.650, qual è la velocità dell'argilla nell'istante precedente l'urto?

(Urti anelastici)

Soluzione

Il modulo della forza di attrito dinamico è dato da $F_a = \mu_d n$ dove n è il modulo della forza normale (reazione del piano). Essendo un piano orizzontale in questo caso si ha $n = m_s g$ e quindi $F_a = \mu_d m_s g$. Il moto con attrito che si sta considerando è quello del sistema argilla più blocco quindi $m_s = m_a + m_l$.

Il lavoro svolto dalla forza di attrito è dato da $W = -F_a \cdot d$, dove d è la distanza percorsa e il segno meno deriva dal fatto che la direzione della forza è opposta allo spostamento. L'energia totale del sistema si conserva e ciò

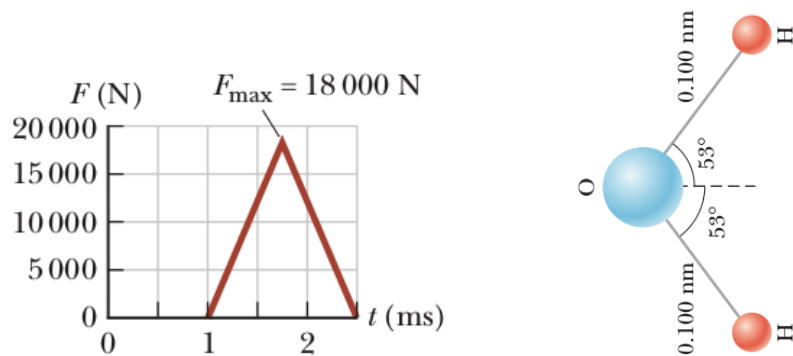


Figura P8.11 (sinistra) e Figura P8.36 (destra).

significa che l'energia cinetica iniziale del sistema è interamente trasformata in energia interna $\frac{1}{2}m v_s^2 = -W$. Da questa equazione si ricava l'espressione della velocità del sistema:

$$v_s = \sqrt{2 \mu_d g d}.$$

Dalla conservazione della quantità di moto in un sistema isolato (prima che agisca l'attrito) $m_a v_a = m_s v_s = (m_a + m_l) v_s$. Quindi si può calcolare la velocità dell'argilla nell'istante precedente l'urto come:

$$v_a = \frac{m_a + m_l}{m_a} v_s = \frac{m_a + m_l}{m_a} \sqrt{2 \mu_d g d} = 91.2 \text{ m/s}.$$

Esercizio 45 (Problema 36 pag. 268, Capitolo 8)

Una molecola di acqua è composta da un atomo di ossigeno e due atomi di idrogeno legati ad esso (Figura P8.36). L'angolo fra i due legami è 106° . Se i legami hanno una lunghezza di 0.100 nm, dove si trova il centro di massa della molecola?

(Centro di massa)

Soluzione

Dalla definizione di centro di massa $\mathbf{r}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / M$, dove $M = \sum_i m_i$, e mettendosi in un sistema di riferimento con l'ossigeno nell'origine si ha:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_O \mathbf{0} + m_H (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}{m_O + 2m_H} = \frac{m_H (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}{m_O + 2m_H}.$$

I due legami hanno la stessa lunghezza per cui $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = l = 0.100$ nm. Se il sistema di riferimento è tale che la molecola sia simmetrica rispetto all'asse x (vedi Figura P8.36) possiamo chiamare $\theta = 106^\circ/2 = 53.0^\circ$ l'angolo di ciascun atomo di idrogeno rispetto all'asse x e quindi:

$$r_{1x} = l \cos \theta ; r_{1y} = l \sin \theta$$

$$r_{2x} = l \cos \theta ; r_{2y} = -l \sin \theta$$

da cui si ottiene $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = 2l \cos \theta \mathbf{i}$.

Il centro di massa è quindi dato da (usando $m_O/m_H = 16$):

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{2l \cos \theta \mathbf{i}}{m_O/m_H + 2} = 6.69 \cdot 10^{-3} \text{ nm } \mathbf{i}.$$

Esercizio 46 (Problema 39 pag. 268, Capitolo 8)

Una particella di 2.00 kg ha una velocità $(2.00\mathbf{i} - 3.00\mathbf{j})$ m/s e una particella di 3.00 kg ha una velocità $(1.00\mathbf{i} + 6.00\mathbf{j})$ m/s. Trovare (a) la velocità del centro di massa e (b) la quantità di moto totale del sistema.

(Moto nel Centro di massa)

Soluzione

La velocità del centro di massa del sistema a due corpi è data da:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{[(4.00\mathbf{i} - 6.00\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} + 18.0\mathbf{j})] \text{ kg m/s}}{5.00 \text{ kg}} = (1.40\mathbf{i} + 2.40\mathbf{j}) \text{ m/s}.$$

Dalla definizione della quantità di moto totale del sistema $\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$ si ha $\mathbf{p} = m \mathbf{v}_{CM}$, e quindi:

$$\mathbf{p} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} = (7.00\mathbf{i} + 12.0\mathbf{j}) \text{ kg m/s}.$$

Esercizio 47 (Problema 11 pag. 344, Capitolo 10)

Un disco di 8.00 cm di raggio ruota intorno al suo asse alla velocità costante di 1200 giri/minuto. Calcolare: (a) la sua velocità angolare, (b) la velocità tangenziale di un punto che si trova a 3.00 cm dall'asse, (c) l'accelerazione radiale di un punto sul bordo del disco, (d) lo spazio complessivo percorso da un punto sul bordo in 2.00 s.

(Grandezze angolari)

Soluzione

Dalla definizione di velocità angolare si ha:

$$\omega = 2\pi f = 126 \text{ rad/s.}$$

La velocità angolare è uguale per tutti i punti del disco, da cui si può ottenere la velocità tangenziale di un punto che si trova a $r_1 = 3.00 \text{ cm}$ dall'asse: $v = \omega r_1 = 3.77 \text{ m/s}$.

L'accelerazione radiale a $r_b = 8.00 \text{ cm}$ è invece data da:

$$a_r = \omega^2 r_b = 1.26 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2,$$

e lo spazio totale percorso in $t = 2.00 \text{ s}$ è:

$$x_2 = r_b \theta_2 = r_b \omega t_2 = 20.1 \text{ m.}$$

Esercizio 48 (Problema 18 pag. 345, Capitolo 10)

Aste rigide di massa trascurabile giacenti lungo l'asse y collegano tre particelle (Figura P10.18). Il sistema ruota intorno all'asse x con una velocità angolare di 2.00 rad/s . Calcolare: (a) il momento d'inerzia rispetto all'asse x , (b) l'energia cinetica rotazionale totale, valutata dall'espressione $I\omega^2/2$, (c) la velocità tangenziale di ciascuna particella e (d) l'energia cinetica totale valutata dall'espressione $\sum_i m_i v_i^2/2$.

Paragonare le risposte per l'energia cinetica ottenute nei punti (b) e (d).

(Energia cinetica rotazionale)

Soluzione

Dalla definizione di momento d'inerzia $I = \sum_i m_i r_i^2$, in questo caso otteniamo

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = (4.00 \cdot 9.00 + 2.00 \cdot 4.00 + 3.00 \cdot 16.0) \text{ kg m}^2 = 92.0 \text{ kg m}^2.$$

Dal testo del problema sappiamo che $\omega = 2.00 \text{ rad/s}$, e l'energia cinetica rotazionale totale risulta $K_r = I\omega^2/2 = 184 \text{ J}$. Nel caso di corpo rigido la velocità tangenziale delle particelle è data da $v_i = r_i \omega$, da cui ricaviamo:

$$v_1 = 3.00 \text{ m} \cdot 2.00 \text{ rad/s} = 6.00 \text{ m/s,}$$

$$v_2 = 2.00 \text{ m} \cdot 2.00 \text{ rad/s} = 4.00 \text{ m/s,}$$

$$v_3 = 4.00 \text{ m} \cdot 2.00 \text{ rad/s} = 8.00 \text{ m/s.}$$

Calcolando l'energia cinetica totale valutata dall'espressione $K = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 + m_3 v_3^2/2$ otteniamo $K = 184$ J, come nella risposta al punto (b). Tale conclusione discende dal fatto che le due definizioni sono equivalenti come si può dimostrare sostituendo l'espressione $v_i = r_i \omega$ in $K = \sum_i m_i v_i^2/2$, da cui $K = \sum_i m_i r_i^2 \omega^2/2 = I \omega^2/2$ (e notando che non è presente moto traslazionale).

Esercizio 49 (Problema 25 pag. 346, Capitolo 10)

Una forza $\mathbf{F} = (2.00\mathbf{i} + 3.00\mathbf{j})$ N viene applicata ad un oggetto che può ruotare attorno ad un asse fisso, allineato con l'asse z del sistema di riferimento. La forza viene applicata al punto $\mathbf{r} = (4.00\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j})$ m. Trovare (a) il modulo del momento risultante delle forze rispetto all'asse z e (b) la direzione del vettore momento $\vec{\tau}$.

(Momento di una forza)

Soluzione

Dalla definizione di momento di una forza attraverso il prodotto vettoriale $\vec{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, si ottiene $|\vec{\tau}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta$. Il modulo di \mathbf{r} è dato da $|\mathbf{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{4.00^2 + 5.00^2}$ m = 6.40 m. L'angolo di \mathbf{r} rispetto all'asse x è dato da $\theta_r = \arctg(r_y/r_x) = 51.3^\circ$. Analogamente, il modulo di \mathbf{F} è dato da $|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{2.00^2 + 3.00^2}$ N = 3.61 N e l'angolo da $\theta_F = \arctg(F_y/F_x) = 56.3^\circ$.

L'angolo tra i due vettori è $\theta = |\theta_r - \theta_F| = 4.97^\circ$. Il modulo del momento risultante è quindi $|\vec{\tau}| = (6.40 \text{ m})(3.61 \text{ N})\sin 4.97^\circ = 2.00 \text{ N m}$.

Essendo i due vettori \mathbf{r} e \mathbf{F} definiti nel piano xy , il momento è diretto lungo z . Utilizzando la regola della mano destra si può vedere che il verso è lungo la direzione positiva, quindi $\vec{\tau} = 2.00\mathbf{k}$ N m.

Esercizio 50 (Problema 56 pag. 349, Capitolo 10)

Uno studente siede su uno sgabello ruotante tenendo due pesi, ciascuno di massa 3.00 kg (Figura P10.56). Quando le braccia sono estese orizzontalmente, i pesi si trovano a 1.00 m dall'asse di rotazione ed egli ruota con

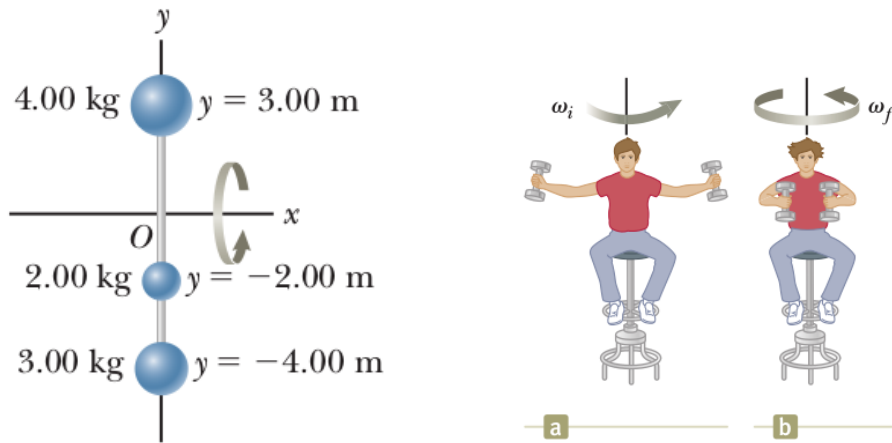


Figura P10.18 (sinistra) e Figura P10.56 (destra).

una velocità angolare di 0.750 rad/s . Il momento d'inerzia dello studente più lo sgabello è 3.00 kg m^2 e si assume costante. Lo studente avvicina i pesi orizzontalmente a 0.300 m dall'asse di rotazione. (a) Trovare la nuova velocità angolare dello studente. (b) Trovare l'energia cinetica del sistema in rotazione prima e dopo che lo studente avvicini i pesi.

(Conservazione momento angolare)

Soluzione

Siccome il momento delle forze esterne agenti sul sistema è nullo, il momento angolare del sistema si conserva $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f$. Siamo in un caso di corpo rigido che ruota nel piano x-y attorno ad un asse fisso (asse z). Quindi il modulo del momento angolare è dato da $L_z = I\omega$, dove I è il momento d'inerzia e ω è la velocità angolare. Dalla definizione di momento di inerzia $I = \sum_i m_i r_i^2$ possiamo calcolare i momenti di inerzia iniziale e finale:

$$I_i = I_s + I_{p,i} = 3.00 \text{ kg m}^2 + (3.00 \text{ kg} + 3.00 \text{ kg}) 1.00^2 \text{ m}^2 = 9.00 \text{ kg m}^2$$

$$I_f = I_s + I_{p,f} = 3.00 \text{ kg m}^2 + (3.00 \text{ kg} + 3.00 \text{ kg}) 0.300^2 \text{ m}^2 = 3.54 \text{ kg m}^2.$$

Dalla conservazione del momento angolare è ora immediato ricavare la velocità angolare finale:

$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f} \omega_i = \frac{9.00}{3.54} 0.750 \text{ rad/s} = 1.91 \text{ rad/s}.$$

L'energia cinetica rotazionale è data da $K = I \omega^2/2$. Notando che in questo caso l'energia cinetica traslazionale è nulla, si ha:

$$K_i = I_i \omega_i^2/2 = 9.00 \text{ kg m}^2 (0.750 \text{ rad/s})^2/2 = 2.53 \text{ J}$$

$$K_f = I_f \omega_f^2/2 = 3.54 \text{ kg m}^2 (1.91 \text{ rad/s})^2/2 = 6.44 \text{ J}.$$

Esercizio 51 (Problema 57 pag. 349, Capitolo 10)

Una donna di 60.0 kg si trova sul bordo di una piattaforma girevole orizzontale con un momento d'inerzia di 500 kg m^2 e un raggio di 2.00 m. La piattaforma all'inizio è ferma ed è libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. La donna quindi inizia a camminare lungo il bordo in senso orario (vista dall'alto) ad una velocità costante di 1.50 m/s rispetto alla Terra. (a) Dire se si conservano energia meccanica, quantità di moto e momento angolare del sistema donna-piattaforma. (b) In quale direzione e con quale velocità angolare ruota la piattaforma? (c) Quanto lavoro compie la donna per mettere in moto se stessa e la piattaforma? (cioè quanta energia chimica il corpo della donna converte in energia meccanica del sistema donna-piattaforma?)

(Conservazione momento angolare)

Soluzione

L'energia meccanica del sistema non è costante in quanto parte dell'energia chimica della donna viene convertita in energia meccanica. Anche la quantità di moto del sistema non è costante, perchè esiste una forza esterna (rispetto al sistema donna-piattaforma) legata alla reazione dell'asse. Siccome il momento delle forze esterne agenti sul sistema τ_{est} è nullo e $\tau_{est} = d\mathbf{L}/dt$, il momento angolare del sistema si conserva $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f$. Cominciamo col calcolare la velocità angolare della donna $\omega_d = v_d/r_p = 0.750 \text{ s}^{-1}$. Inizialmente tale momento è nullo (in quanto la quantità di moto è nulla), quindi anche $\mathbf{L}_f = 0$. Il modulo di quest'ultimo è dato da $L_f = I_p \omega_p + I_d \omega_d$, da cui si ricava da velocità angolare della piattaforma:

$$\omega_p = -\frac{I_d}{I_p} \omega_d = -\frac{m_d r_p^2}{500 \text{ kg m}^2} \omega_d = -0.360 \text{ rad/s},$$

che quindi ruota in verso opposto al movimento della donna.

Il lavoro svolto è uguale alla variazione di energia cinetica che per il moto rotazionale in esame è data da $\Delta K = K_f - K_i = K_f = I_p \omega_p^2/2 + I_d \omega_d^2/2$:

$$W = K_f = I_p \omega_p^2 / 2 + I_d \omega_d^2 / 2 = 240 \text{ kg m}^2 (0.750 \text{ rad/s})^2 / 2 + 500 \text{ kg m}^2 (0.360 \text{ rad/s})^2 / 2 = 99.9 \text{ J}.$$

Esercizio 52 (Problema 68 pag. 351, Capitolo 10)

Due astronauti, ciascuno di massa M , sono collegati da una fune di lunghezza d di massa trascurabile. Essi sono isolati nello spazio, orbitanti attorno al loro centro di massa alla velocità v . Considerando gli astronauti come particelle, calcolare (a) il modulo del momento angolare del sistema e (b) l'energia rotazionale del sistema. Tirando la fune uno degli astronauti riduce la distanza tra loro a $d/2$. (c) Qual è il nuovo momento angolare del sistema? (d) Quali sono le nuove velocità degli astronauti? (e) Qual è la nuova energia rotazionale del sistema? (f) Quanto lavoro compiono gli astronauti per accorciare la fune?

(Conservazione momento angolare)

Soluzione

Per un corpo rigido, il momento angolare totale è dato da $L = \sum_i m_i v_i r_i$. Per il sistema dei due astronauti, dove $m_i = M$, $v_i = v$ e $r_i = d/2$, si ha quindi $L = M d v$.

L'energia cinetica rotazionale è data da $K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$ ossia da $K = M v^2$.

Essendo il sistema isolato il momento angolare si conserva per cui non varia riducendo la distanza a $d/2$. Le nuove velocità diventano $v_2 = L / (M d/2) = 2 L / (M d) = 2 v$. Raddoppiando le velocità, l'energia cinetica cresce di un fattore 4, $K_2 = M v_2^2 = 4 M v^2 = 4 K$.

Il lavoro compiuto dagli astronauti è pari alla variazione di energia cinetica, quindi $W = K_2 - K = 3 K = 3 M v^2$.

Esercizio 53 (Problema 1 pag. 378, Capitolo 11)

Un corpo di 200 kg e uno di 500 kg distano 0.400 m. a) Trovare la forza gravitazionale risultante esercitata da questi due corpi su un altro corpo di 50.0 kg posto a metà strada fra essi. b) In quale posizione (oltre che

all'infinito) può essere posto il corpo di 50.0 kg perchè subisca una forza risultante nulla?

(Legge Gravitazione universale)

Soluzione

La forza esercitata dai primi due corpi sul terzo è la risultante della somma delle due attrazioni gravitazionali $\vec{F}_g = \vec{F}_{g1} + \vec{F}_{g2}$. Essendo il terzo corpo situato lungo la congiungente tra i primi due corpi tale risultante sarà diretta lungo la congiungente e con verso nella direzione della massa più pesante. Il modulo è dato dalla differenza tra i due moduli:

$$F_g = |F_{g2} - F_{g1}| = \left| G \frac{m m_2}{r_2^2} - G \frac{m m_1}{r_1^2} \right| = G \frac{m}{r_2^2} |m_2 - m_1| = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \frac{50.0 \cdot 300 \text{ kg}^2}{(0.200 \text{ m})^2} = 2.50 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

Affinchè la forza risultante sia nulla il corpo dovrà trovarsi nuovamente lungo la congiungente tra le due masse (in caso contrario, le due forze avrebbero almeno una delle componenti con lo stesso verso e quindi non potrebbero annullarsi). Tra l'altro questo implica $r_1 + r_2 = d = 0.400 \text{ m}$. La condizione che deve essere soddisfatta è $F_g = |F_{g2} - F_{g1}| = 0$ ossia $G m \left(\frac{m_2}{r_2^2} - \frac{m_1}{r_1^2} \right) = 0$ che implica $r_2 = \sqrt{m_2/m_1} r_1$. La distanza dalla seconda massa si ottiene dunque da:

$$r_2 = \frac{\sqrt{m_2/m_1} d}{1 + \sqrt{m_2/m_1}} = 0.613 d = 0.245 \text{ m}.$$

La distanza dalla prima massa è semplicemente $r_1 = d - r_2 = 0.155 \text{ m}$.

Esercizio 54 (Problema 8 pag. 379, Capitolo 10)

Durante un'eclissi di Sole, la Luna, la Terra e il Sole giacciono sulla stessa linea, con la Luna fra la Terra e il Sole. (a) Quale forza esercita il Sole sulla Luna? (b) Quale forza esercita la Terra sulla Luna? (c) Quale forza esercita il Sole sulla Terra?

(Legge Gravitazione universale)

La forza che agisce è la forza gravitazionale che nei tre casi assume la forma (in modulo):

$$|F_{SL}| = G \frac{m_S m_L}{(R_{TS} - R_{TL})^2} = 4.35 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

$$|F_{TL}| = G \frac{m_T m_L}{R_{TL}^2} = 1.99 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

$$|F_{TS}| = G \frac{m_T m_S}{R_{TS}^2} = 3.53 \cdot 10^{22} \text{ N},$$

dove si sono usati i valori $R_{TS} = 1.50 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $R_{TL} = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$, $m_S = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $m_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $m_L = 7.36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ e $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$. La direzione delle tre forze è lungo la stessa linea, mentre il verso è rivolto verso la massa maggiore di ogni caso.

Esercizio 55 (Problema 10 pag. 379, Capitolo 11)

Tre sfere uniformi di massa 2.00 kg, 4.00 kg e 6.00 kg sono poste ai vertici di un triangolo rettangolo, come in Figura P11.10. Calcolare la forza gravitazionale risultante sulla sfera di 4.00 kg, assumendo che le sfere siano isolate dal resto dell'Universo.

(legge Gravitazione universale)

Soluzione

Dalla legge di gravitazione universale che fornisce la forza esercitata da un corpo a su un corpo b, $\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{12}$, si possono dedurre le due forze agenti sulla massa di 4.00 kg:

$$\mathbf{F}_{ab} = G \frac{m_a m_b}{r_a^2} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_{cb} = -G \frac{m_c m_b}{r_c^2} \mathbf{i},$$

da cui si ottiene $\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{cb} = (-1.00 \cdot 10^{-10} \mathbf{i} + 5.93 \cdot 10^{-11} \mathbf{j}) \text{ N}$.

Il modulo di tale forza è $|\mathbf{F}_b| = 1.16 \cdot 10^{-10} \text{ N}$ e la direzione è data dall'angolo $\theta = 149^\circ$, rispetto all'asse x .

Esercizio 56 (Problema 38 pag. 381, Capitolo 11)

Quanta energia è necessaria per ionizzare l'idrogeno (a) quando si trova nel suo stato fondamentale e (b) quando è nello stato con $n = 3$?

(atomo di Bohr)

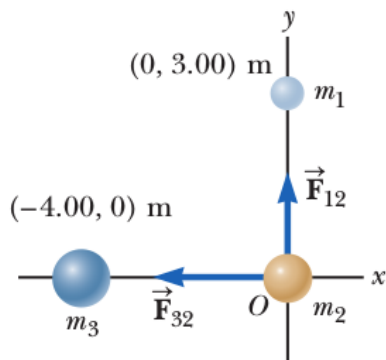


Figura P11.10.

Soluzione

L'energia dell'atomo di idrogeno è data da $E_n = -13.606/n^2$ eV, dove n è il numero quantico caratterizzante gli stati dell'atomo. Per ionizzare un atomo occorre fornire un'energia pari o superiore all'energia di legame dell'atomo stesso. Si ha quindi $E_{ion,1} = 13.606$ eV e $E_{ion,3} = 13.606/3^2$ eV = 1.512 eV.

Esercizio 57 (Problema 6 pag. 409, Capitolo 12)

Un aliante di 1.00 kg si muove su una pista orizzontale priva di attrito sotto l'azione di una molla di costante elastica 25.0 N/m. A $t = 0$ l'aliante è rilasciato da fermo in $x = -3.00$ cm (cioè la molla è compressa di 3.00 cm). Trovare (a) il periodo del moto, (b) i massimi valori di velocità e accelerazione, (c) spostamento, velocità e accelerazione in funzione del tempo.

(Moto armonico semplice)

Soluzione

Il periodo del moto è definito da $T = 2\pi/\omega$, dove nel caso di un moto che segue la legge di Hooke $\omega = \sqrt{k/m}$ (k è la costante elastica e m la massa dell'oggetto). Si ha quindi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.00\text{ kg}}{25.0\text{ kg s}^{-2}}} = 1.26\text{ s.}$$

In un moto armonico la massima velocità è data da $v_{max} = \omega A$ e la massima

accelerazione da $a_{max} = \omega^2 A$, dove A è l'ampiezza del moto. Nel caso in questione $A = 3.00$ cm, da cui $v_{max} = A\sqrt{k/m} = 0.150$ m/s e $a_{max} = Ak/m = 0.75$ m/s².

Lo spostamento nel moto armonico è descritto da $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, dunque all'istante iniziale si ha $x(0) = A \cos \phi$. Il problema ci dice che $x(0) = -3.00$ cm, quindi la fase è $\phi = \pi$. Note l'ampiezza $A = 3.00$ cm e la velocità angolare $\omega = 5.00$ s⁻¹, le espressioni di spostamento, velocità e accelerazione in funzione del tempo sono:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi).$$

Esercizio 58 (Problema 9 pag. 409, Capitolo 12)

Una particella che si muove lungo l'asse x di moto armonico semplice parte dalla posizione di equilibrio, l'origine, a $t = 0$ e si muove verso destra. L'ampiezza del suo moto è 2.00 cm e la frequenza è 1.50 Hz. (a) Trovare l'espressione della posizione della particella in funzione del tempo. Determinare (b) la velocità massima e il minimo tempo ($t > 0$) in cui la particella raggiunge questa velocità, (c) la massima accelerazione e il minimo tempo ($t > 0$) in cui la particella raggiunge tale accelerazione, (d) la distanza totale attraversata fra $t = 0$ e $t = 1.00$ s.

(Moto armonico semplice)

Soluzione

La posizione in un moto armonico semplice è descritta da una funzione sinusoidale. Dal testo del problema sappiamo che a $t = 0$ si ha $x = 0$ (la particella si trova nell'origine). Fissando la fase del moto a $\phi = 0$, la funzione è quindi il seno, ossia: $x = A \sin \omega t$, con $A = 2.00$ cm e $\omega = 2\pi f = 3\pi$ s⁻¹. (Scegliendo il coseno, la fase andrebbe fissata a $\phi = -\pi/2$ e la funzione diventa $x = A \cos[\omega t - \pi/2]$.)

Dalla derivata della posizione si ottiene la velocità: $v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t$. Essendo $|\cos \omega t| \leq 1$, la velocità massima è data da $v_{max} = \omega A = 0.188$ m/s. Tale velocità viene raggiunta quando $|\cos \omega t| = 1$ cioè quando $\omega t = n\pi$ (dove n è un numero intero) e quindi $t_{vmax} = n/3.00$ s. Il minimo tempo

$t > 0$ in cui la particella raggiunge la velocità massima si ha quindi per $n = 1$ ed è $t_{vmax} = 0.333$ s. (Notare che in questo caso il coseno vale -1 e quindi la velocità è negativa. Il tempo minimo > 0 per arrivare alla velocità massima positiva si ottiene con $n = 2$.)

Dalla derivata della velocità si ottiene l'accelerazione: $a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin \omega t$. Essendo $|\sin \omega t| \leq 1$, l'accelerazione massima è data da $a_{max} = \omega^2 A = 1.78$ m/s². Tale accelerazione viene raggiunta quando $|\sin \omega t| = 1$ cioè quando $\omega t = (n + 1/2)\pi$ e quindi $t_{amax} = (n + 1/2)/3.00$ s. Il minimo tempo $t > 0$ in cui la particella raggiunge l'accelerazione massima si ha quindi per $n = 0$ ed è $t_{amax} = 0.167$ s. (Notare che in questo caso il seno vale $+1$ e quindi l'accelerazione è negativa. Il tempo minimo > 0 per arrivare all'accelerazione massima positiva si ottiene con $n = 1$.)

In un periodo $T = 1/f = 0.667$ s, la particella percorre una distanza lungo x pari a $4A$, in quanto si muove da 0 ad A , poi da A a $-A$ e infine da $-A$ a 0 , cioè in un lasso di tempo pari a $T/4$ percorre A . In un intervallo di tempo $\Delta t = 1.00$ s = $6T/4$, la distanza percorsa è quindi $d = 6A = 12.0$ cm.

Esercizio 59 (Problema 16 pag. 410, Capitolo 12)

Un oscillatore armonico semplice di ampiezza A ha energia totale E . Calcolare (a) l'energia cinetica e (b) l'energia potenziale quando la posizione è un terzo dell'ampiezza. (c) Per quali valori della posizione l'energia cinetica è la metà di quella potenziale? (d) Ci sono valori della posizione in cui l'energia cinetica è più grande della massima energia potenziale? Spiegare.

(Energia di un oscillatore armonico semplice)

Soluzione

L'energia totale di un oscillatore armonico semplice è una quantità costante e vale $E = \frac{1}{2}kA^2$, dove k è la costante elastica. Il nostro problema ci dà come input A ed E , da cui si ottiene $k = 2E/A^2$. Dalla legge di Hooke si ricava l'espressione dell'energia potenziale: $U = \frac{1}{2}kx^2$, dove x è la posizione.

Quando $x = A/3$, l'energia potenziale diventa $U = \frac{1}{2}k(A/3)^2 = \frac{1}{18}kA^2 = \frac{1}{9}E$ (nell'ultimo passaggio si è sostituita l'espressione di k). Considerando $E = K + U$, possiamo ricavare l'energia cinetica: $K = E - U = \frac{8}{9}E$.

Il punto (c) ci richiede di imporre $K = U/2 = \frac{1}{4}kx^2$, il che implica $E = U + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}kx^2$ e ricordandosi $E = \frac{1}{2}kA^2$ si ottiene $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{3}{4}kx^2$, da cui si ricava $x = \pm\sqrt{2/3}A$.

L'energia cinetica non può mai essere più grande della massima energia potenziale. Infatti quest'ultima corrisponde all'energia totale quando l'oscillatore si trova nei punti di inversione $x = \pm A$ e l'energia cinetica non può essere più grande dell'energia totale (l'energia potenziale elastica è sempre positiva). Più matematicamente l'asserzione di cui sopra si ricava da $U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$, $E = U + K$ (da cui $K \leq E$) ed $E = \frac{1}{2}kA^2$, e notando che per $\omega t + \phi = (0, \pi)$ il modulo del coseno vale 1 e si ha $U = U_{max} = E$.

Esercizio 60 (Problema 20 pag. 410, Capitolo 12)

Un blocco di 200 g collegato ad una molla orizzontale oscilla di moto armonico semplice con periodo di 0.250 s. Se l'energia totale del sistema è 2.00 J, trovare (a) la costante elastica della molla e (b) l'ampiezza del moto.

(Moto armonico semplice)

Soluzione

La relazione tra periodo T e frequenza angolare ω è data da $T = 2\pi/\omega$. Dalla legge di Hooke si ottiene $\omega = \sqrt{k/m}$. Combinando le due relazioni si può ottenere la costante elastica della molla $k = m(2\pi/T)^2 = 0.200 \text{ kg} (2\pi/0.250 \text{ s})^2 = 126 \text{ kg/s}^2$.

L'energia totale di un oscillatore armonico semplice è data da $E = kA^2/2$ da cui si ha $A = \sqrt{2E/k} = 3.17 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Esercizio 61 (Problema 21 pag. 410, Capitolo 12)

Una massa di 50.0 g, fissata ad una molla, di massa trascurabile e costante elastica di 35.0 N/m, compie delle oscillazioni di 4.00 cm di ampiezza, su una superficie orizzontale liscia. Determinare: Per un allungamento della molla di 1.00 cm: (a) l'energia totale del sistema oscillante e (b) la velocità della massa e, per un allungamento di 3.00 cm: (c) l'energia cinetica e (d) l'energia potenziale.

(Moto armonico semplice)

Soluzione

Siamo in un caso di moto armonico che segue la legge di Hooke. La frequenza angolare è data da: $\omega = \sqrt{k/m} = 26.5 \text{ s}^{-1}$. Scegliendo un sistema di riferimento in cui la fase iniziale è nulla, la posizione della massa può essere descritta da: $x(t) = A \cos(\omega t)$. L'energia potenziale è data da $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t)$, mentre l'energia cinetica è data da: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t)$. L'energia totale è data dalla somma delle due energie: $E_{tot} = U + K = \frac{1}{2}kA^2$ (avendo usato $\omega^2 = k/m$ e $\sin^2 + \cos^2 = 1$). Essa è una costante del moto, ossia è indipendente dall'allungamento. Numericamente si ha: $E_{tot} = \frac{1}{2}kA^2 = 2.80 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

La velocità può essere calcolata derivando l'energia cinetica attraverso $E_{tot} - U$ oppure dalle equazioni del moto. L'allungamento di 1.00 cm avviene dopo un tempo $t_1 = \arccos(1.00 \text{ cm}/A)/\omega = 4.98 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ da cui si ricava la velocità:

$$v_1 = -\omega A \sin(\omega t_1) = 1.02 \text{ m/s}.$$

Per un allungamento di 3.00 cm, l'energia potenziale risulta essere:
 $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}35.0 \text{ N/m} \cdot (3.00 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = 1.58 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.
L'energia cinetica è quindi:
 $K = E_{tot} - U = 1.22 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

Esercizio 62 (Problema 33 pag. 411, Capitolo 12)

Lo spostamento angolare di un pendolo è descritto dall'equazione $\theta = 0.0320 \text{ rad} \cos(4.43 \text{ rad/s } t)$.

Determinare il periodo e la lunghezza del pendolo.

(Pendolo semplice)

Soluzione

La frequenza angolare del moto $\omega = 4.43 \text{ rad/s}$ è legata al periodo dalla relazione $T = 2\pi/\omega = 1.42 \text{ s}$. Un pendolo fisico di lunghezza L segue un

moto armonico semplice, per piccoli spostamenti, il cui periodo è dato da $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Da tale relazione si ricava $L = g(T/2\pi)^2 = g/\omega^2 = 0.500$ m.

Esercizio 63 (Problema 4 pag. 441, Capitolo 13)

Un'onda sinusoidale trasversale ha un periodo $T = 25.0$ ms e viaggia nella direzione x negativa con velocità $v = 30.0$ m/s. A $t = 0$ s, un elemento della corda a $x = 0$ m ha uno spostamento trasverso di 2.00 cm e una velocità verso il basso $v_y = 2.00$ m/s. (a) Qual è l'ampiezza dell'onda? (b) Qual è l'angolo della fase iniziale? (c) Qual è il valore della massima velocità trasversale di un elemento della corda? (d) Scrivere la funzione d'onda dell'onda.

(Onde sinusoidali)

Soluzione

L'espressione generale di un'onda sinusoidale trasversale che si propaga nella direzione negativa delle x è data da: $y = A \sin(kx + \omega t + \phi)$. La frequenza angolare si ottiene attraverso $\omega = 2\pi/T = 251$ rad/s mentre il numero d'onda angolare è $k = \omega/v = 8.38$ rad/m. Dalle condizioni iniziali abbiamo $y(t = 0, x = 0) = 2.00$ cm e $\frac{\partial y}{\partial t}(t = 0, x = 0) = -2.00$ m/s, ossia $A \sin(\phi) = 2.00$ cm e $\omega A \cos(\phi) = -2.00$ m/s. Da queste due equazioni si ricava $A = 2.15$ cm e $t g(\phi) = -2.51$ ossia $\phi = 112^\circ$. La velocità trasversale dell'onda si calcola attraverso $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \cos(kx + \omega t + \phi)$ e quindi il suo valore massimo è $v_{y,max} = \omega A = 5.40$ m/s. La funzione d'onda è data dall'equazione sopra introdotta, sostituendo i valori dei parametri appena determinati:

$$y = (2.15 \text{ cm}) \sin[(8.38 \text{ rad/m}) x + (251 \text{ rad/s}) t + 1.95 \text{ rad}].$$

Esercizio 64 (Problema 10 pag. 441, Capitolo 13)

Un'onda trasversale in una corda è descritta dall'equazione:

$$y = (0.120 \text{ m}) \sin\left(\frac{\pi}{8}x + 4\pi t\right),$$

dove x e y sono espressi in metri e t in secondi. (a) Determinare la velocità trasversale e l'accelerazione a $t = 0.200$ s in un punto situato a $x = 1.60$ m. (b) Quali sono la lunghezza d'onda, il periodo e la velocità di propagazione di quest'onda?

(Onde sinusoidali)

Soluzione

Abbiamo visto che l'espressione generale di un'onda meccanica che si propaga in una corda è: $y = A \sin(kx - \omega t)$. Dalla derivata prima e derivata seconda rispetto al tempo si ottengono rispettivamente velocità e accelerazione trasversali:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t).$$

Nel problema in questione abbiamo $A = 0.120$ m, $k = \pi/8$ rad/m e $\omega = -4\pi$ rad/s. Sostituendo il tempo $t = 0.200$ s e la posizione $x = 1.60$ m nelle espressioni di cui sopra si ottiene $v_y = -1.51$ m/s e $a_y = 0$.

Per rispondere al punto (b) usiamo le definizioni di lunghezza d'onda, periodo e velocità di propagazione dell'onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\pi/8 \text{ rad/m}} = 16.0 \text{ m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{4\pi \text{ rad/s}} = 0.500 \text{ s}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{16.0 \text{ m}}{0.500 \text{ s}} = 32.0 \text{ m/s}.$$

Notare che in questo caso ci si riferisce ad una velocità di propagazione lungo x quindi diversa dalla velocità trasversale lungo y calcolata al punto precedente.

Esercizio 65 (Problema 11 pag. 441, Capitolo 13)

Un'onda sinusoidale viaggia lungo una fune. Si osserva che l'oscillatore che genera l'onda compie 40.0 vibrazioni in 30.0 s. Inoltre un determinato massimo in una cresta dell'onda viaggia per 425 cm lungo la corda in 10.0 s. Qual è la lunghezza d'onda?

(Onde sinusoidali)

Soluzione

La lunghezza d'onda può essere espressa attraverso: $\lambda = v/f$, dove v è la velocità dell'onda e f è la sua frequenza. Dai dati del problema si può calcolare $f = 40.0/(30.0 \text{ s}) = 1.33 \text{ s}^{-1}$ e $v = 425 \text{ cm}/(10.0 \text{ s}) = 0.425 \text{ m/s}$, da cui si ottiene $\lambda = v/f = 0.319 \text{ m}$.

Esercizio 66 (Problema 19 pag. 442, Capitolo 13)

Onde trasversali viaggiano alla velocità di 20.0 m/s lungo una corda con tensione pari a 6.00 N. Quale tensione viene richiesta affinché un'onda viaggi a 30.0 m/s sulla stessa corda?

(Onde trasversali)

Soluzione

La relazione tra velocità di un'onda trasversale che si propaga in una corda con una certa tensione T è data da $v = \sqrt{T/\mu}$, dove μ è la massa per unità di lunghezza della corda (da qui si vede che la velocità di un'onda meccanica lineare dipende solo dalle proprietà del mezzo attraverso cui viaggia l'onda). Si ha dunque $v_1/v_2 = \sqrt{T_1/T_2}$ e quindi $T_2 = T_1 (v_2/v_1)^2 = 13.5$ N.

Esercizio 67 (Problema 24 pag. 442, Capitolo 13)

Delle onde sinusoidali di 5.00 cm di ampiezza devono venire trasmesse lungo una corda, la cui densità lineare è $4.00 \cdot 10^{-2}$ kg/m. Se la massima potenza fornita dalla sorgente è 300 W e la corda è sottoposta ad una tensione di 100 N, qual è la massima frequenza di vibrazione, alla quale la sorgente può funzionare?

(Potenza trasmessa da onde sinusoidali)

Soluzione

La potenza trasmessa da una qualsiasi onda sinusoidale in una corda è data da: $P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$, dove μ è la densità lineare della corda, ω è la frequenza angolare, A è l'ampiezza e v è la velocità dell'onda. La velocità dell'onda che si propaga in una corda è $v = \sqrt{T/\mu}$, dove T è la tensione della corda. Abbiamo quindi:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{2P_{max}}{\mu A^2 v}} = \sqrt{\frac{2P_{max}}{A^2 \sqrt{\mu T}}} = \sqrt{\frac{600 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3}}{(0.0500 \text{ m})^2 \sqrt{4.00 \text{ kg}^2 \text{ s}^{-2}}}} = 346 \text{ s}^{-1},$$

da cui si ottiene la massima frequenza di vibrazione alla quale la sorgente

può funzionare:

$$f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} = 55.1 \text{ Hz.}$$

Esercizio 68 (Problema 28 pag. 443, Capitolo 13)

Supponiamo di sentire il rombo di un tuono 16.2 s dopo aver visto il lampo ad esso associato. La velocità del suono in aria è 343 m/s e la velocità della luce è $3.00 \cdot 10^8$ m/s. Quanto distante è avvenuto il lampo? Hai bisogno di conoscere la velocità della luce per rispondere?

(Onde acustiche)

Soluzione

Possiamo approssimare i moti della luce e del suono come moti uniformi (cioè a velocità costante). La distanza percorsa dal suono sarà quindi $d = v_s \cdot t_s = v_s \cdot (t_L + t_O)$, dove t_L è il tempo impiegato dalla luce per arrivare fino ai nostri occhi e t_O è il tempo che intercorre da quando vediamo il lampo a quando udiamo il tuono. Siccome la velocità della luce è diversi ordini di grandezza superiore a quella del suono, t_L sarà molto più piccolo di t_O . Proviamo in prima approssimazione a trascurarlo:

$$d \simeq v_s \cdot t_0 = 343 \text{ m/s} \cdot 16.2 \text{ s} = 5560 \text{ m} = 5.56 \text{ km.}$$

Questo risultato mi dà una stima della distanza reale a cui è avvenuto il lampo e l'errore commesso nell'approssimazione del tempo può essere stimato attraverso:

$$t_L \simeq d/v_L = 1.85 \cdot 10^{-5} \text{ s,}$$

da cui si nota che (fermandoci a 3 cifre significative in t_s) tale tempo è effettivamente trascurabile.

Esercizio 69 (Problema 3 pag. 470, Capitolo 14)

Due onde sinusoidali in una corda sono definite dalle funzioni:

$$y_1 = (2.00 \text{ cm}) \sin(20.0x - 32.0t) \text{ e}$$

$$y_2 = (2.00 \text{ cm}) \sin(25.0x - 40.0t),$$

dove x è in cm e t è in s. (a) Qual è la differenza di fase tra queste due onde nel punto $x = 5.00$ cm al tempo $t = 2.00$ s? (b) Qual è il valore positivo di x più vicino all'origine per cui le due fasi differiscono di π al tempo $t = 2.00$ s?

(Sovrapposizione di onde)

Soluzione

La differenza di fase è data dalla differenza tra l'argomento del seno della seconda onda e l'argomento del seno della prima onda, ossia:

$\Delta\phi = (25.0 \cdot 5.00 - 40.0 \cdot 2.00) - (20.0 \cdot 5.00 - 32.0 \cdot 2.00) \text{ rad} = 9 \text{ rad} = 2.86 \pi \text{ rad}$.
Ovviamente una fase $\Delta\phi = 2.86 \pi$ è equivalente ad una fase $\Delta\phi - 2\pi = 0.86 \pi \text{ rad} = 156^\circ$.

La differenza tra le due fasi al tempo $t = 2.00$ è data da $5.0x - 16.0$. Richiedendo che tale differenza sia uguale a $(2n + 1)\pi$, dove n è un numero intero (e quindi si sta definendo una differenza di fase equivalente a π), e fissando n tale che x assuma il più piccolo valore positivo, si ottiene $n = 2$ e $5.0x - 16.0 = \pm(2n + 1)\pi \rightarrow x = (16.0 - (2 \cdot 2 + 1)\pi)/5.0 = 0.0584 \text{ cm}$.
In questa posizione le due onde si sommano a produrre un'onda risultante di ampiezza nulla.

Esercizio 70 (Problema 9 pag. 471, Capitolo 14)

Due onde sinusoidali che si propagano sono descritte da:

$$y_1 = (5.00 \text{ m}) \sin[\pi(4.00x - 1200t)] \text{ e}$$

$$y_2 = (5.00 \text{ m}) \sin[\pi(4.00x - 1200t - 0.250)],$$

dove x , y_1 e y_2 è in m e t è in s. (a) Qual è l'ampiezza della funzione d'onda risultante dalla sovrapposizione $y_1 + y_2$? (b) Qual è la frequenza dell'onda risultante?

(Sovrapposizione di onde)

Soluzione

Utilizzando la trigonometria si può dimostrare che:

$y = y_1 + y_2 = 2(5.00 \text{ m}) \cos(-0.250\pi/2) \sin[\pi(4.00x - 1200t - 0.250/2)]$, da cui si deduce che l'ampiezza è data da $A = 2(5.00 \text{ m}) \cos(-0.250\pi/2) = 9.24 \text{ m}$ e la frequenza dell'onda risultante è la stessa delle due singole onde e pari a $f = 1200\pi/(2\pi) \text{ s}^{-1} = 600 \text{ s}^{-1}$.

Esercizio 71 (Problema 13 pag. 471, Capitolo 14)

Due onde sinusoidali che si combinano in un mezzo sono descritte dalle funzioni d'onda:

$$y_1 = (3.00 \text{ cm}) \sin [\pi (x + 0.60 t)] \text{ e}$$

$$y_2 = (3.00 \text{ cm}) \sin [\pi (x - 0.60 t)],$$

dove x è in cm e t è in s. Determinare il massimo spostamento del moto in (a) $x = 0.250$ cm, (b) $x = 0.500$ cm e (c) $x = 1.50$ cm. (d) Trovare i tre valori più piccoli di x corrispondenti ai ventri.

(Onde stazionarie)

Soluzione

La composizione delle due onde dà origine ad un'onda stazionaria descritta da:

$$y = y_1 + y_2 = (6.00 \text{ cm}) \sin (\pi x) \cos (0.60 t).$$

Il massimo spostamento corrisponde a $|\cos (0.60 t)| = 1$ ed è dato da $y_{max} = (6.00 \text{ cm}) |\sin (\pi x)|$. Per i tre diversi valori di x nel testo del problema si ha:

(a) $y_{max} = 4.24$ cm

(b) $y_{max} = 6.00$ cm

(c) $y_{max} = 6.00$ cm .

I ventri del moto corrispondono alla condizione: $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$
Notando che $k = \pi$ rad/cm, si ha quindi:

$$x_1 = \frac{\pi}{2k} = 0.500 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{2k} = 1.50 \text{ cm}$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{2k} = 2.50 \text{ cm}.$$

Esercizio 72 (Problema 7 pag. 503, Capitolo 15)

(a) Calcolare la pressione assoluta alla profondità oceanica di 1000 m. Assumere che la densità dell'acqua di mare sia 1030 kg/m^3 e che l'aria al di sopra eserciti una pressione di 101.3 kPa. (b) A questa profondità, quale forza si esercita su un sottomarino sferico avente diametro di 5.00 m?

(Pressione)

Soluzione

Dalla legge di Stevino si ha $P = P_0 + \rho g h$ da cui si ottiene $P = 1.020 \cdot 10^7$ Pa.

Dal principio di Archimede si ha che la forza è data da $\rho_{H_2O} g V_s = 6.606 \cdot 10^5$ N, avendo usato $V_s = 4/3 \pi (d/2)^3$.

Esercizio 73 (Problema 9 pag. 503, Capitolo 15)

Un contenitore è riempito fino ad una profondità di 20.0 cm con acqua. Sulla superficie dell'acqua galleggia uno strato di olio di 30.0 cm di spessore con gravità specifica (cioè densità riferita alla densità dell'acqua) di 0.700. Qual è la pressione assoluta sul fondo del contenitore?

(Pressione)

Soluzione

Utilizzando la legge di Stevino e sapendo che $\rho_{olio} = 0.700 \rho_{acqua}$, la pressione assoluta sul fondo del contenitore può essere calcolata come $P = P_0 + 0.700 \rho_{acqua} g h_{olio} + \rho_{acqua} g h_{acqua} = (1.013 \cdot 10^5 + 0.700 \cdot 10^3 \cdot 9.80 \cdot 0.30 + 10^3 \cdot 9.80 \cdot 0.20)$ Pa = $1.05 \cdot 10^5$ Pa.

Esercizio 74 (Problema 11 pag. 503, Capitolo 15)

Calcolare l'area di contatto tra una ventosa completamente svuotata d'aria e il soffitto necessaria a sostenere il peso di uno studente di 80.0 kg.

(Pressione)

Soluzione

Affinchè lo studente (immerso in aria) rimanga appeso occorre che la forza eserciti una pressione uguale o inferiore alla pressione dell'aria. Dalla definizione di pressione $P = F/A$ si ottiene:

$$A \geq F_g/P_{atm} = m g/P_{atm} = 80.0 \text{ kg} \cdot 9.80 \text{ m/s}^2 / (1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}) = 7.74 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Esercizio 75 (Problema 23 pag. 504, Capitolo 15)

Una pallina da ping-pong ha un diametro di 3.80 cm e una densità media di 0.0840 g/cm^3 . Quale forza è necessaria per tenerla completamente immersa in acqua?

(Principio di Archimede)

Soluzione

La situazione di equilibrio di forze (ossia pallina immersa in acqua e ferma) segue la seconda legge di Newton nella forma $\sum F_i = 0$. Le forze in gioco in questo caso sono:

a) la forza peso: $F_g = m g = \rho_{sfera} V_{sfera} g = \rho_{sfera} 4/3 \pi R^3 g$ (utilizzando l'espressione del volume della sfera con $R = d/2 = 1.90 \text{ cm}$ e scegliendo un sistema di riferimento con verso positivo rivolto verso il basso)

b) la spinta di Archimede $B = -\rho_{H_2O} V_{imm} g = -\rho_{H_2O} 4/3 \pi R^3 g$ (assumendo la sfera sia tutta immersa)

c) la forza aggiuntiva F necessaria per tenere la pallina completamente immersa in acqua.

Si ottiene $F + F_g + B = 0$ cioè:

$$F = (\rho_{H_2O} - \rho_{sfera}) 4/3 \pi (d/2)^3 g = (1000 - 84.0) \text{ kg/m}^3 4/3 \pi 0.0190^3 \text{ m}^3 9.80 \text{ m/s}^2 = 0.258 \text{ N}.$$

Esercizio 76 (Problema 27 pag. 505, Capitolo 15)

Un cubo di legno di 20.0 cm di lato con una densità di 650 kg/m^3 galleggia nell'acqua. (a) Qual è la distanza tra la faccia superiore del cubo e la superficie dell'acqua? (b) Quale quantità in peso di piombo deve essere messa sul cubo affinché la sua faccia superiore sia a livello dell'acqua?

(Principio di Archimede)

Soluzione

Dal principio di Archimede si ha $m_c g = \rho_{H_2O} V_{imm} g$, dove la massa del cubo è $m_c = \rho_l V_c$. Il volume immerso è quindi $V_{imm} = \rho_l / \rho_{H_2O} V_l$. Scrivendo

il volume del parallelepipedo immerso come $l^2 \cdot (l - d)$, dove l è il lato del cubo e d è la distanza tra la faccia superiore del cubo e la superficie d'acqua, otteniamo $l^2 \cdot (l - d) = l^3 \rho_l / \rho_{H_2O}$ da cui:
 $d = l(1 - \rho_l / \rho_{H_2O}) = 7.00 \text{ cm}$.

Affinchè la faccia superiore del cubo sia a livello dell'acqua occorre che sia verificato $m_c = \rho_{H_2O} V_c$. Con l'aggiunta del piombo la massa del cubo è data da: $m_c = m_p + \rho_l V_c$ da cui si ottiene:
 $m_p = (\rho_{H_2O} - \rho_l) V_c = (\rho_{H_2O} - \rho_l) l^3 = 350 \text{ kg m}^{-3} (0.200 \text{ m})^3 = 2.80 \text{ kg}$.

Esercizio 77 (Problema 37 pag. 505, Capitolo 15)

Un tubo orizzontale di 10.0 cm di diametro ha una progressiva riduzione del diametro a 5.00 cm. Se la pressione dell'acqua nella sezione più larga è di $8.00 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, mentre è di $6.00 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ in quella più stretta, determinare la velocità del flusso d'acqua nelle due sezioni del tubo.

(Teorema di Bernoulli)

Soluzione

Consideriamo il fluido ideale per cui valgono il teorema di Bernoulli e l'equazione di continuità. Da quest'ultima $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ricaviamo $v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{d_1^2}{d_2^2} v_1 = 4 v_1$, dove la sezione circolare è data da $A = \pi (d/2)^2$ e d è il diametro. Dal teorema di Bernoulli:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \text{ da cui (essendo } y_1 = y_2)$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho (4 v_1)^2 \text{ che implica}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{15/2 \rho}} = 1.63 \text{ m/s.}$$

(La densità dell'acqua è 1000 kg/m^3)

La velocità nella seconda sezione è data da: $v_2 = 4 v_1 = 6.53 \text{ m/s}$. Il flusso è definito come la quantità di massa che passa per la sezione nell'unità di tempo, quindi $\phi = \rho A v$. Dall'equazione di continuità si deduce che esso è uguale in entrambe le sezioni ed è dato da:

$$\phi = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 = 1000 \text{ kg m}^{-3} \frac{\pi}{4} (0.0500 \text{ m})^2 v_2 = 12.8 \text{ kg/s.}$$

Esercizio 78 (Problema 43 pag. 506, Capitolo 15)

In un serbatoio grande, aperto in cima e riempito con acqua, si sviluppa un piccolo foro in un lato, in un punto 16.0 m sotto il livello dell'acqua. Il flusso di volume dal foro è $2.50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}$. Determinare (a) la velocità con cui l'acqua lascia il buco e (b) il diametro del foro.

(Teorema di Bernoulli)

Soluzione

Dal teorema di Bernoulli, considerando due punti, il primo sulla superficie dell'acqua e il secondo sul foro:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2,$$

possiamo ricavare la legge di Torricelli notando che $p_1 = p_2$ (uguali alla pressione atmosferica) e $v_1 \simeq 0$, da cui:

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 17.7 \text{ m/s}.$$

Dall'equazione di continuità si ha che il flusso di volume è pari a $F_V = A_2 v_2$, dove $A_2 = \pi d^2/4$, dove d è il diametro e considerando un foro circolare. Si ha quindi: $d = 2 \sqrt{F_V/(\pi v_2)} = 1.73 \text{ mm}$.