CdL in Matematica - Tutoraggio di Fisica II

Esercizi svolti in classe

Prima settimana

1. Un filo di estremi A e B e di lunghezza $2b$ è uniformemente carico con densità lineare λ. Scelto convenientemente un sistema di assi cartesiani x e y, calcolare le componenti E_x ed E_y del campo elettrico generato dal filo in un punto P, a distanza R dal filo e tale che il segmento $\overline{AP}$ formi un angolo di 90° con il filo.

[$\vec{E}(\mathrm{P}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(\frac{R}{\sqrt{4b^2+R^2}}$ - 1, $\frac{2b}{\sqrt{4b^2+R^2}})$]

2. Una sfera carica di raggio $R = 0.1$ m ha densità di carica proporzionale alla distanza r dal centro. La carica totale Q della sfera è di 10^{-8} C. Calcolare:

- l'espressione del campo elettrico generato dalla sfera in funzione di r per $0 \leq\ r\ <\ \infty$;
- la differenza di potenziale ΔV tra un punto posto sulla superficie della sfera e il centro della sfera.

[$\mathrm{E(r)=r^2Q/(4\pi\epsilon_0 R^4)}$ per r < R, $\mathrm{E(r)= Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)}$ per r>R, $\Delta \mathrm{V}$ = - 300 V]

3. Tra due superficie sferiche concentriche di raggio $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 20$ cm è distribuita una carica elettrica con densità uniforme $\rho = 26.58{\cdot}10^{-8}$ C/m^3. Determinare l'espressione del campo elettrico *E(r)* in funzione della distanza r dal centro del sistema. Se un elettrone viene abbandonato sulla superficie esterna, quanto tempo impiega ad attraversare la cavità interna?

[E(r)= 0 per r < $\mathrm{R_1}$, E(r)= $\rho(\mathrm{r^3\text{-}R_1^3})/3\epsilon_0 r^2$ per $\mathrm{R_1}$ <r<$\mathrm{R_2}$, E(r)= $\rho(\mathrm{R_2^3\text{-}R_1^3})/3\epsilon_0 r^2$ per r>$\mathrm{R_2}$, t = 33.7 ns]

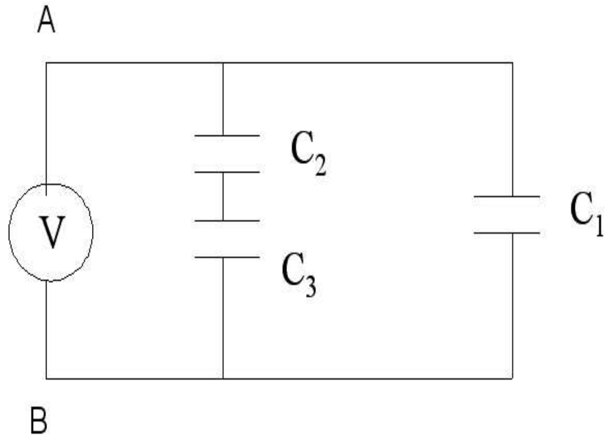

Figure 1:

Seconda settimana

1. Due conduttori A e B hanno capacità, rispettivamente, C_A e $C_B = 3C_A$. B è inizialmente scarico, mentre A è carico con carica $Q_A = 1\ \mu$C. I due conduttori vengono posti a contatto. Successivamente, vengono nuovamente separati. Quale carica si trova su ciascun conduttore alla fine del processo sopra descritto?

[$Q_A = 0.25\ \mu$C $Q_B = 0.75\ \mu$C]

2. Una piccola sfera conduttrice di raggio r = 1 mm è posta sull'asse di un disco di raggio R = 10 cm uniformemente carico con densità superficiale $\sigma = 10^{-11}$ C/m^2. Il centro della sferetta dista d = 30 cm dal centro del disco. La sferetta è collegata a terra da un sottile filo conduttore, così che il suo potenziale è nullo. Calcolare il potenziale generato dal disco nella posizione della sferetta e la carica q_i indotta sulla sferetta.

[V_{disco}(d) = $[\sqrt{R^2+d^2}-d]\sigma/(2\epsilon_0)$ = 9 mV, q_i = -10^{-15} C]

3. Tre condensatori di capacità $C_1 = 2\ \mu$F, $C_2 = 2\ \mu$F, $C_3 = 4\ \mu$F sono collegati come in figura 1. La d.d.p applicata tra A e B è V = 100 V. Calcolare la capacità equivalente tra A e B, la carica e la d.d.p. per ciascun condensatore, l'energia elettrostatica totale del sistema.

[$C_{eq} = 3.33\ \mu$F, q_1 = 0.2 mC, $q_2 = q_3$ = 0.133 mC, V_1 = 100 V , V_2 = 66.7 V, V_3 = 33.3 V, U_e = 16.7 mJ]

4. Dopo aver caricato due condensatori di capacità $C_1 = 5\ \mu$F e $C_2 = 4\ \mu$F alle d.d.p. V_1 = 300 V e V_2 = 250 V, li si collega in parallelo. Si collega ai primi due condensatori un terzo condensatore, scarico, anch'esso in parallelo, di capacità $C_3 = 1\ \mu$F. Determinare la carica presente alla fine su ciascun condensatore e la variazione di energia elettrostatica nel processo.

[q_1' = 1.25 mC, q_2' = 1.00 mC, q_3' = 0.25 mC, ΔU_e = -0.037 J]

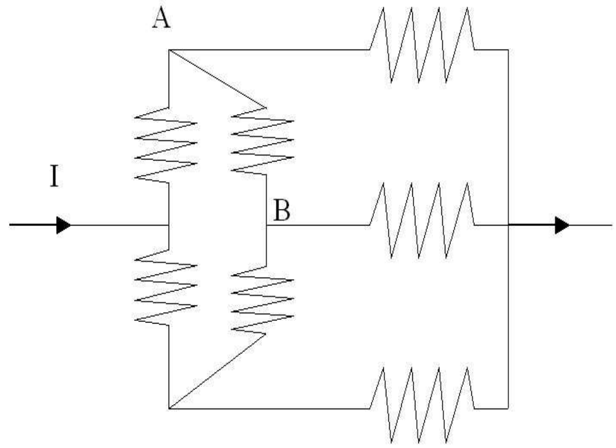

Figure 2:

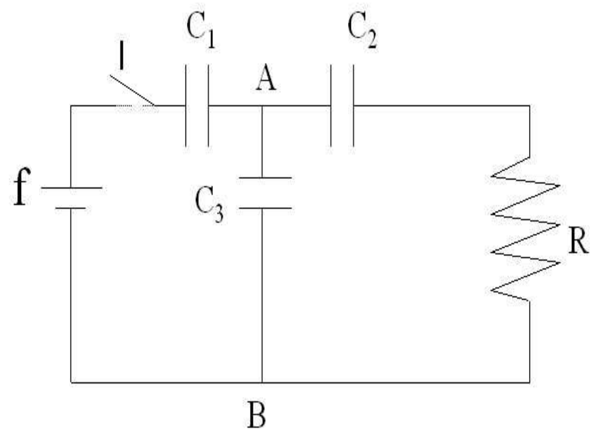

Figure 3:

Terza settimana

1. Calcolare la resistenza di un resistore di resistività ρ, a forma di tronco di cono. Siano a e b i raggi delle due facce e d l'altezza del tronco di cono.
[R = ρd/(πab)]

2. Nel circuito di Fig. 2 la corrente I in entrata I vale 8 A. Le resistenze hanno tutte lo stesso valore R. Calcolare la corrente che scorre tra i punti A e B. In quale verso scorre?
[I_{AB} = 1 A, da A a B]

3. Nel circuito di Fig. 3, la f.e.m. f vale 7 V. Delle tre capacità si sa che sono tutte uguali. Al tempo t = 0 si chiude l'interruttore I. Dopo un tempo lungo, il circuito è a regime. Calcolare la d.dp. tra i punti A e B quando il circuito è a regime.
[2.33 V]

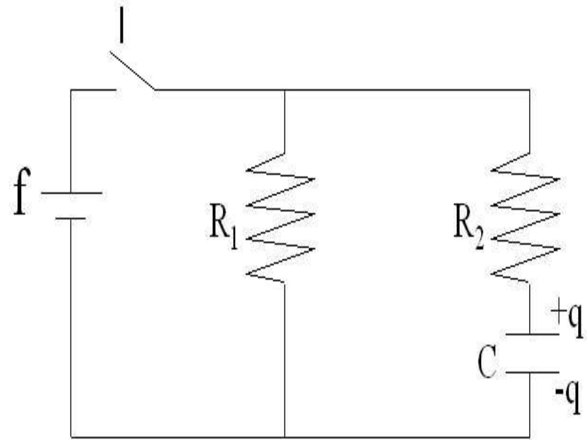

Figure 4:

4. Nel circuito di Fig. 4, il condensatore è inizialmente scarico. Al tempo t = 0 si chiude l'interruttore I. Scrivere l'espressione al variare del tempo delle correnti i_1 e i_2 che scorrono, rispettivamente, nelle resistenze R_1 e R_2, e della tensione V ai capi del condensatore.

[$i_1 = f/R_1$, $i_2(t) = (f/R_2)e^{-t/(R_2C)}$, $V(t) = f(1\text{-}e^{-t/(R_2C)})$]

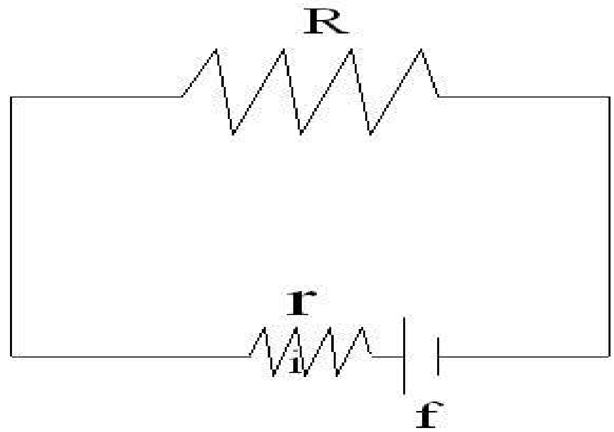

Figure 5:

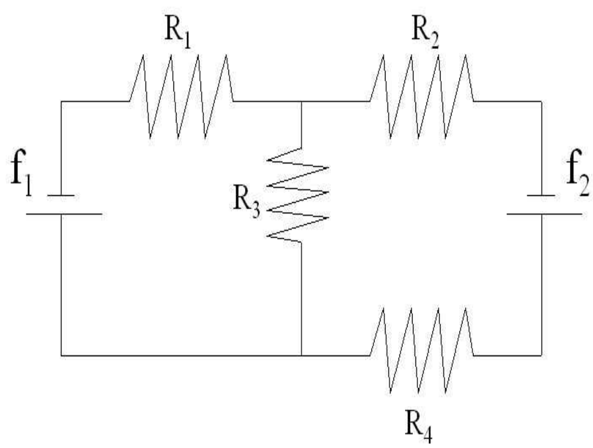

Figure 6:

Quarta settimana

1. Si consideri il circuito di Fig. 5. Calcolare che rapporto deve esserci tra la resistenza interna r_i del generatore e la resistenza R del circuito affinché il trasferimento di potenza sulla resistenza R sia massimo. Quanto vale la potenza massima?

[r_i = R, $P_{max} = \epsilon^2/(4R)$]

2. Nel circuito di Fig. 6, le f.e.m. valgono f_1 = 18 V e f_2 = 12 V. Le resistenze valgono R_1 = 12 Ω, R_2 = 2 Ω, R_3 = 6 Ω, R_4 = 4 Ω.Calcolare le correnti I_1 e I_2 erogate dai due generatori, la corrente I_3 che scorre nella resistenza R_3, la potenza erogata dai due generatori e le potenze dissipate nelle quattro resistenze.

[I_1 = 0.8 A, I_2 = 0.6 A, I_3 = 1.4 A, P_{f1} = 14.4 W, P_{f2} = 7.2 W, P_1 = 7.68 W, P_2 = 0.72 W, P_3 = 11.76 W, P_4 = 1.44 W]

3. Un protone di energia cinetica E_k = 6 MeV entra in una regione dove è presente un campo magnetico $\vec{B}$ di modulo 1 T e direzione entrante rispetto al

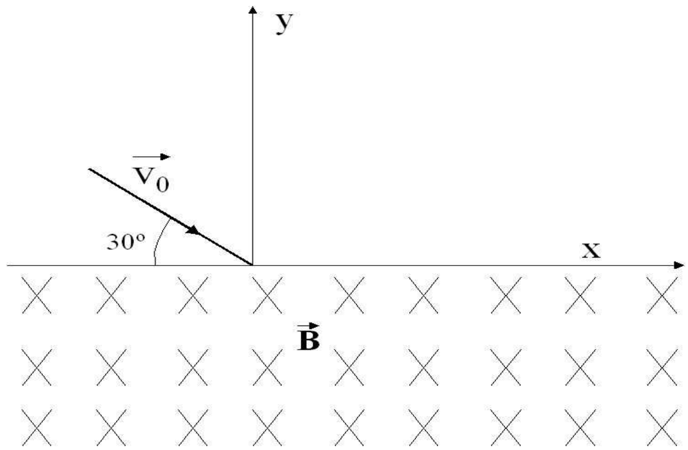

Figure 7:

piano del foglio, come mostrato in figura 7. Il campo è presente solo nella regione y<0. La velocità iniziale del protone è contenuta nel piano xy e forma un angolo di 30° con l'asse x. Quanto vale l'angolo θ' che il protone forma con l'asse x all'uscita del campo magnetico? A che distanza l dal punto di entrata uscirà?

[θ' = 30°, l = 0.354 m]

4. Una regione è sede di un campo elettrico $\vec{E}$ = -E$\vec{u}_z$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ = B$\vec{u}_z$, con E = 10^5 V/m e B = 0.1 T. Un protone viene immesso nella regione con velocità $v_0 = 5{\cdot}10^6$ m/s, formante un angolo di 30° con l'asse z e con proiezione lungo l'asse z v_{0z} >0. Mostrare che il protone percorre un'orbita elicoidale, il cui asse è parallelo all'asse z, calcolando il raggio r dell'elica e la distanza z_1 percorsa dal protone nel primo giro dell'elica. Calcolare inoltre la distanza z_0 percorsa prima che il protone inverta il suo moto lungo l'asse z.

[r = 0.26 m, z_1 = 0.78 m, z_0 = 0.98 m]

Quinta settimana

1. In un circuito chiuso a forma di semicirconferenza di raggio R scorre in senso antiorario una corrente I. Il circuito è contenuto nel piano xy, con il tratto rettilineo parallelo all'asse x, ed è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B}=B\vec{u}_y$. Calcolare la forza magnetica sul tratto curvo e sul tratto rettilineo.

[Tratto rettilineo: $\vec{F}$=2IRB$\vec{u}_z$, tratto curvo: $\vec{F}$=-2IRB$\vec{u}_z$]

2. Una spira rettangolare rigida, di lati PQ=RS=a=20 cm e QR=SP=b=10 cm, ha una massa per unità di lunghezza δ=50 mg/cm ed è percorsa da una corrente I in senso antiorario. Essa può ruotare senza attrito intorno a PQ, che è parallelo all'asse x orizzontale. Quando sulla spira agisce un campo magnetico uniforme e verticale $\vec{B}$=B$\vec{u}_z$ con B = 20 mT, essa ruota di un angolo di 30°. Calcolare il valore della corrente I e il lavoro W fatto dalle forze magnetiche durante la rotazione.

[I = 2.12 A, W = 424 μJ]

3. Calcolare, utilizzando la prima legge di Laplace, il campo magnetico nei punti dell'asse di una spira circolare di raggio R in cui scorre una corrente I, in funzione della distanza x dal centro della spira

[$\vec{B}$(x) = $\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{u}_n$, con $\vec{u}_n$ versore normale alla superficie della spira.]

4. Un solenoide toroidale è costituito da N spire in cui passa una corrente I, avvolte attorno ad una superficie a forma di ciambella (toroide). Calcolare, utilizzando la legge di Ampère, il campo magnetico in funzione della distanza r da un asse passante per il centro del toroide e ad esso perpendicolare.

[B(r) = μ_0NI/(2πr)]

Sesta settimana

1. Una lamina indefinita giace nel piano xy ed è percorsa da una corrente che scorre nella direzione dell'asse y. Si definisca $j_L = dI/dx$ la densità lineare di corrente che attraversa la lamina. Calcolare il campo magnetico. Suggerimento: ragionare sulla prima legge di Laplace per capire le proprietà di simmetria del campo, in seguito usare la legge di Ampère per calcolarlo.
[$\vec{B} = (\mu_0 j_L/2)(z/|z|)\vec{u}_x$]

2. Una bobina costituita da 100 spire di area $\Sigma = 100$ cm^2 e resistenza complessiva $R = 5\ \Omega$ è posta in un campo magnetico ortogonale alla superficie delle spire. Il campo magnetico, uniforme nello spazio, varia linearmente nel tempo, passando dal valore 0 al valore $B_0 = 0.8$ T in $t_0 = 10$ s. Calcolare la f.e.m. f_i indotta nella bobina, la carica q totale che fluisce nella bobina durante il tempo t_0 e il lavoro totale W speso nello stesso tempo.
[f_i = -80 mV, q = -0.16 C, W = 12.8 mJ]

Settima settimana

1. Una bobina composta di N = 20 spire circolari di area $\Sigma = 1244$ cm^2 ruota con frequenza $\nu = 50$ Hz attorno a un proprio diametro. Sulla bobina agisce un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e costante, perpendicolare all'asse di rotazione. Calcolare la f.e.m. f_i indotta nella bobina, la potenza $P(t)$ dissipata nel circuito, la potenza media $\overline{P}$.

[$f_i(t) = (312.6\ V)\mathrm{sen}\omega t$, $P(t) = (98\ kW)\mathrm{sen}^2\omega t$, $\overline{P} = 49$ kW]

2. Una spira conduttice quadrata, di lato b = 20 cm, massa m = 4 g, resistenza R = 25 Ω, si muove senza attrito sul piano xy con velocità $v_0 = 40$ mm/s, parallela e concorde all'asse x. Nella regione x>0 esiste un campo magnetico uniforme e costante B = 0.5 T, ortogonale al piano della spira. La spira entra nella regione a t = 0. Calcolare la velocità v_1 raggiunta dalla spira dopo $t_1 = 2.9$ s sapendo che in quell'istante la spira è ancora soltanto parzialmente immersa nel campo magnetico. Calcolare l'energia W dissipata nel circuito fino all'istante t_1. Calcolare la velocità v_2 con cui la spira si muove dopo essere entrata totalmente nel campo magnetico, l'istante t_2 in cui tale velocità viene raggiunta, la carica q che transita in un tratto qualsiasi della spira durante tutto il processo.

[v_1 = 3 cm/s, W = -1.4 μJ, v_2 = 2 cm/s, t_2 = 6.9 s, q = -8$\cdot 10^{-4}$ C]

3. Un solenoide toroidale è composto di N spire rettangolari di lati a e b, avvolte su una superficie toroidale di raggio R. Il lato di lunghezza b è quello nella direzione radiale. Calcolare l'induttanza L del circuito cosi composto, prima nell'approssimazione b<<R e poi per b generico. (Suggerimento: se b<<R il campo si puó considerare costante nelle spire)

[b<<R: $L \simeq \mu_0 N^2 ab/(2\pi R)$, b generico: $L = \ln(1+b/R)\mu_0 N^2 a/(2\pi)$]

4. Un solenoide toroidale è composto di N spire rettangolari di lati a e b, avvolte su una superficie toroidale di raggio R. Il lato di lunghezza b è quello nella direzione radiale. Lungo l' asse del solenoide corre un filo indefinito (Fig. 8). Calcolare il coefficiente di mutua induzione M.

[$M = \ln(1+b/R)\mu_0 N a/(2\pi)$]

5. Si consideri il circuito in Fig. 9. Determinare l'espressione generale della corrente I nel circuito in funzione del tempo. Quanto vale la corrente I_{lim} dopo un tempo molto lungo? Determinare la costante di integrazione tale che a t = 0 sia I = 0. A quale istante $t_{1/2}$ la corrente raggiunge il valore $I_{lim}/2$?

[$I(t) = Ae^{-11Rt/(3L)} + 3f/(11R)$, $I_{lim} = 3f/(11R)$, $A = -3f/(11R)$, $t_{1/2} = 3L\ln 2/(11R)$]

6. Una spira circolare di raggio r_0 e resistenza R_0 si trova all'interno di un solenoide di lunghezza l composto da N spire d raggio r_1. Il piano della spira forma un angolo θ con l'asse del solenoide. Al tempo t = 0, quando nel solenoide scorre una corrente I_0, viene disconnesso l'alimentatore e fatta scaricare la corrente su una resistenza R_1. Determinare la mutua induzione M tra spira e solenoide. Determinare la corrente indotta nella spira al tempo t_1, trascurando l'induttanza della spira stessa. Determinare l'energia totale W_{diss} dissipata nella spira da t =0 a

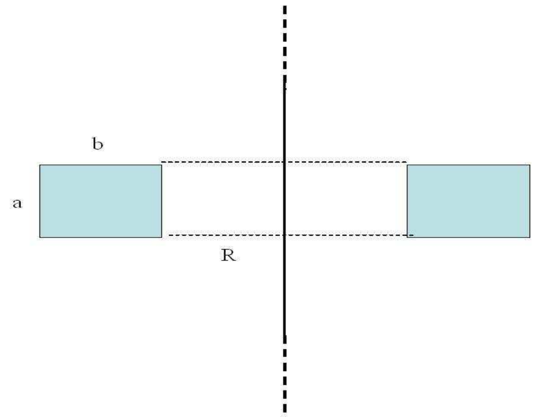

Figure 8:

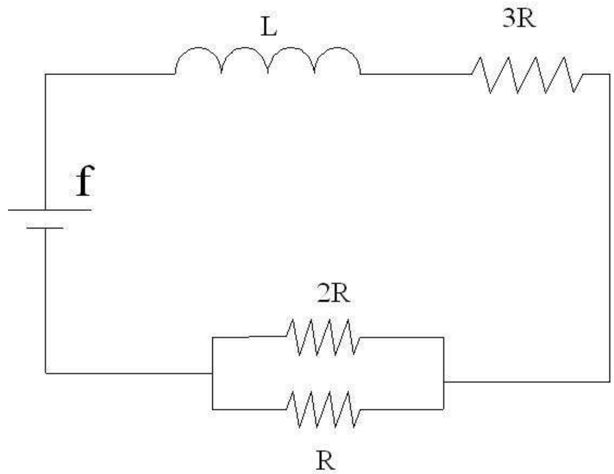

Figure 9:

$t = t_1$. Dati del problema: $N = 3000$, $r_1 = 10$ cm, $r_0 = 5$ cm, $R_0 = 0.1\ \Omega$, $R_1 = 1\ \Omega$, $t_1 = 0.5$ s, $I_0 = 10$ A, $\theta = 45°$, $l = 50$ cm.

[$M = 42\ \mu H$, $I_{spira}(t_1) = 2.92$ mA, $W_{diss} = 0.94\ \mu J$]

Nona settimana

1. Un condensatore piano con armature circolari di raggio R è collegato ad un generatore che stabilisce tra le armature il campo elettrico $E = E_0 \sin\omega t$. Calcolare il campo magnetico B all'interno del condensatore in funzione della distanza r dall'asse delle armature e la f.e.m. f_i indotta in un solenoide toroidale, coassiale alle armature, di raggio medio r e costituito da N spire di sezione Σ.

[$B(t) = \frac{r\omega E_0}{2c^2}\cos\omega t$, $f_i = \frac{N\Sigma r\omega^2 E_0}{2c^2}\sin\omega t$]

2. Le due armature piane circolari di un condensatore hanno area $\Sigma = 0.1$ m^2, distano d e sono collegate ad un generatore di f.e.m. $f = f_0 \sin\omega t$, con $f_0 = 200$ V, $\omega = 100$ rad/s. La corrente massima di conduzione nei fili è $i^{max} = 8.86\ \mu A$. Calcolare i valori massimi della corrente di spostamento i_s e della densità di corrente di spostamento j_s, il valore massimo di $d\phi(\vec{E})/dt$, la distanza d tra le armature, il valore massimo del campo magnetico in funzione della distanza r dall'asse delle armature.

[$i_s^{max} = 8.86\ \mu A$, $j_s^{max} = 8.86 \times 10^{-5}$ A/m^2, $[d\phi(\vec{E})/dt]_{max} = 10^6$ Vm/s, d = 2 mm, $B^{max}(r) = \frac{\mu_0 i_s^{max} r}{2\pi R^2}$ per r<R, $B^{max}(r) = \frac{\mu_0 i_s^{max}}{2\pi r}$ per r>R, con $R = \sqrt{\Sigma/\pi}$]