

# MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

Esercizi, set # 4 - 20 novembre 2008 - consegna e correzione 27 novembre

1. *Precessione di Larmor.* Mostrare che classicamente un momento magnetico  $\vec{\mu} = g\vec{J}$  posto in un campo magnetico costante e uniforme  $\vec{B}$  con potenziale  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  precessa attorno alla direzione del campo magnetico con frequenza angolare  $\omega = g|\vec{B}|$ . Nel caso quantistico, data l'Hamiltoniana  $H = -gBS_z = -\omega S_z$  e uno stato a  $t = 0$   $|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$ , calcolare  $\langle \vec{S}(t) \rangle$  e mostrare che lo spin precessa attorno all'asse  $z$ .
2. Calcolare  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ,  $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ , e  $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$  in termini dei campi elettrico e magnetico. Quanto valgono nel caso di onde elettromagnetiche piane?
3. (a) Scrivere l'eq. di Klein-Gordon (KG) per una funzione d'onda  $\phi$  e verificare che non è invariante per trasformazioni di gauge locali  $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x)$ ;  
(b) introdurre la derivata covariante e usarla per rendere invariante la KG, mostrando che il risultato corrisponde all'accoppiamento minimale col campo elettromagnetico;  
(c) che forma assume l'equazione nel caso di un campo elettrostatico centrale? quali sono le differenze con il caso di uno spinore di Dirac?  
(d) scrivere l'equazione agli autovalori per stati stazionari in coordinate sferiche ( $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{r^2}$ ) e procedendo in analogia con l'equazione di Schrödinger per l'atomo di H trovare i livelli energetici di una particella scalare in un campo elettrostatico attrattivo. ( $n - l - 1$  deve essere un intero) Discutere le differenze con il caso di Dirac.
4. Il rapporto giromagnetico dell'elettrone è probabilmente la quantità fisica conosciuta con la massima precisione,  $3 \times 10^{-13}$ . Come è possibile misurare il rapporto giromagnetico dell'elettrone indipendentemente dalla misura del campo magnetico e della massa?
5. Mostrare che nella teoria di Dirac  $\vec{S}^2$  è una costante del moto a differenza di  $\vec{L}^2$  (considerare il caso di potenziale statico a simmetria sferica).
6. *Equazione di Majorana.* Scrivere l'eq. di Dirac per un fermione di Majorana. i) Verificare che in rappr. chirale si ottiene  $i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi_L + m\sigma_2\phi_L^* = 0$  con  $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma})$ . ii) Usando l'identità  $\sigma_2\bar{\sigma}^* = -\bar{\sigma}\sigma_2$  verificare che  $\sigma_2\phi_L^*$  si trasforma per TL come uno spinore right-handed. iii) dimostrare che l'eq. in i) implica la eq. di Klein-Gordon per  $\phi_L$ : uno spinore di Majorana ha massa pur avendo solo due componenti indipendenti.