

F.Giozzi

Fisica della materia condensata

a.a. 2009/2010

Chapter 1

Fluidi quantistici

Nella fisica degli stati condensati si conoscono sistemi che manifestano effetti quantistici su scala macroscopica. Un prototipo di tale natura fu previsto da Einstein nel lontano 1926: per effetto del principio di indistinguibilità di particelle identiche un gas perfetto di bosoni (cioè composto da bosoni non interagenti) al di sotto di una temperatura critica subisce una transizione di fase, caratterizzata dal fatto che una frazione macroscopica di molecole va ad occupare lo stato di minima energia. L'insieme di queste molecole costituisce il *condensato di Bose-Einstein*, un fluido con proprietà quantistiche quali ad esempio fenomeni di interferenza tipiche della propagazione ondosa. Un *fluido quantistico* è caratterizzato dal fatto che la lunghezza d'onda λ di De Broglie associata alle particelle che lo compongono è maggiore della loro mutua distanza. Poichè λ è inversamente proporzionale alla velocità e d'altro canto la velocità quadratica media è legata alla temperatura del fluido, si trova che la temperatura a cui avviene la condensazione di Bose-Einstein è tanto più bassa quanto più bassa è la densità. È quindi molto difficile osservare questo fenomeno perchè un gas reale soddisfa l'approssimazione di gas perfetto solo se è molto rarefatto, il che comporta una temperatura di transizione estremamente bassa. Il primo condensato fu ottenuto solo nel 1995 ad una temperatura dell'ordine di un milionesimo di grado Kelvin per opera degli americani Eric Cornell e Carl E. Wieman del National Institute of Standards & Technology e del tedesco Wolfgang Ketterle del MIT che nel 2001 ricevettero il premio Nobel per la fisica in riconoscimento del loro lavoro.

Un fluido quantistico molto più facile da produrre è l' He^4 , il gas nobile più leggero, il cui nucleo atomico è formato da due protoni e due neutroni e lo spin totale è zero, dunque un gas di Bose debolmente interagente.

L' He^4 fu liquefatto per la prima volta nel 1908 per opera di Kamerlingh

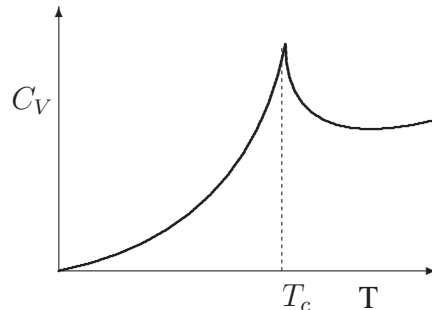
Onnes (premio Nobel nel 1913) nel suo laboratorio di Leida a una temperatura di $4.215 \text{ }^\circ\text{K}$ alla pressione di 1 atmosfera. Pochi anni dopo (1911) si scoprì una seconda fase fluida, nota come *He II*, che è stabile per T compreso tra 0 e circa $2.17 \text{ }^\circ\text{K}$ (il valore preciso del punto di transizione tra la fase *He I* e *He II* dipende dalla pressione) mentre la fase solida appare solo al di sopra di 25 atm. Fin dai primi esperimenti si osservò che questa nuova fase fluida manifestava proprietà molto strane: il liquido riusciva a defluire da screpolature dei recipienti così microscopiche che neppure l'*He* gassoso riusciva ad attraversarle; analogamente poteva scorrere attraverso capillari ultrasottili apparentemente senza nessuna resistenza come un fluido di viscosità nulla. Fluidi con queste proprietà si dicono *superfluidi*.

1.1 Superfluidità

C'è qualche analogia tra la condensazione di Bose-Einstein e la transizione alla fase II (cioè superfluida) dell'*He*⁴ liquido. In particolare, mettendo i parametri dell'elio nella formula per T_c (cioè la massa m degli atomi e la densità del fluido) si ottiene $T_c \sim 3.13 \text{ }^\circ\text{K}$, che non è lontanissimo da $T_o = 2.17 \text{ }^\circ\text{K}$ che è la temperatura di transizione nella fase II a pressione nulla.

La dipendenza di C_V da T è però diversa a bassa temperatura.

La forma di $C_V = C_V(T)$ ha suggerito il nome di *punto λ* per questo punto di transizione dalla fase di He I (fluido normale) alla fase di He II (superfluido).



L'elio liquido non è in realtà approssimabile in nessun modo a un gas perfetto perchè è un liquido (= alta densità) e le interazioni interatomiche non sono trascurabili. Studiando il potenziale interatomico si vede che gli atomi di *He*⁴ si comportano come sferette impenetrabili del diametro di 2.7 \AA . Alla densità ordinaria ogni atomo ha a disposizione un volume di $\sim 45 \text{ \AA}^3$, quindi gli atomi sono piuttosto vicini.

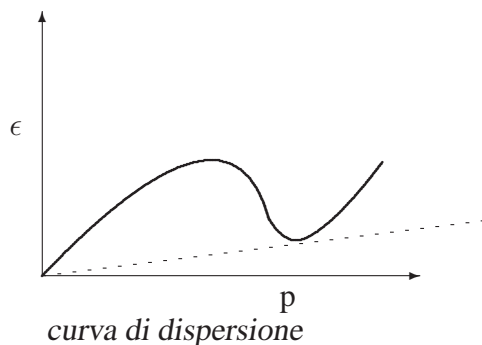
perchè l'elio è l'unica sostanza liquida anche a 0 Kelvin? Partendo dal reticolo cristallino (stabile a una pressione maggiore di 25 atm) e calcolando l'energia di punto zero dovuta alla vibrazione degli atomi attorno alla posizione di equilibrio si trova che l'ampiezza di oscillazione è dell'ordine della distanza reticolare. Cio' accade perchè l'elio è molto leggero (= alta frequenza) ed è un gas nobile (interazione chimica molto debole).

Proprietà dell'HeII . Tre proprietà fondamentali:

- conduttività termica infinita
- effetto mecano-calorico: due recipienti contenenti HeII, comunicanti attraverso un capillare sottilissimo e mantenuti a una differenza di pressione ΔP assumono due diverse temperature tali che $\Delta P = \rho s \Delta T$, dove s è l'entropia specifica e ρ la densità
- superfluidità (è la proprietà piu' importante): l'HeII fluisce attraverso i capillari senza apparente resistenza: la sua viscosità sembra nulla.

1.1.1 Calcolo della velocità critica

La viscosità è la manifestazione macroscopica dello scambio di energia tra un fluido in scorrimento e la parete lungo cui scorre. Poichè questo scambio avviene per quanti (queste eccitazioni elementari sono dette *quasiparticelle*) può succedere che per ragioni cinematiche un fluido a temperatura zero che scorre a una velocità inferiore a un valore critico non può produrre quasiparticelle nell'interazione con la parete, quindi non perde energia ed ha allora viscosità nulla (è superfluido). Il tutto dipende dalla forma della *curva di dispersione*, cioè dalla relazione tra impulso p e energia $\epsilon(p)$ delle quasiparticelle. Nell'elio superfluido, la diffusione con fasci di neutroni permette di stabilire che la curva di dispersione ha approssimativamente la seguente forma



Per piccoli valori di p (grandi lunghezze d'onda) si ha $\epsilon(p) = cp$, dove c è la velocità del suono. Eccitazioni di questo tipo sono dette *fononi*: sono i quanti del suono (classicamente onde di compressione e rarefazione). Vedremo che i fononi sono le eccitazioni più importanti per il comportamento termico del fluido a $T \leq 0.5 \text{ } ^\circ K$. Al di sopra di questa temperatura entra in gioco un altro tipo di quasiparticelle, dette *rotoni*, corrispondenti al minimo locale nella curva di dispersione (le altre eccitazioni dello spettro non sono stabili).

Vediamo ora quali sono i vincoli cinematici nella produzione di una particella di impulso p e energia $\epsilon(p)$ da parte del fluido di massa M che scorre lungo una parete con velocità \vec{v} .

M =massa del fluido \vec{v} =velocità iniziale \vec{v}' =velocità finale \vec{p} =impulso della quasiparticella $\epsilon(p)$ = energia della quasiparticella.

- Conservazione dell'impulso: $M\vec{v} = M\vec{v}' + \vec{p}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2M}(M\vec{v} - \vec{p})^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 - \vec{v}' \cdot \vec{p} + \frac{p^2}{2M} \quad (1.1.1)$$

- Conservazione dell'energia: $\frac{1}{2}Mv^2 \geq \frac{1}{2}Mv'^2 + \epsilon(p)$

Inserendo la (1.1.1) nella disuguaglianza

$$\Rightarrow \vec{v}' \cdot \vec{p} - \frac{p^2}{2M} \geq \epsilon(p)$$

$$M \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{v}' \cdot \vec{p} > \epsilon(p) \Rightarrow v > \frac{\epsilon(p)}{p}.$$

Dunque affinché il processo di produzione di pseudoparticelle sia cinematicamente possibile la velocità dell'HeII non può essere arbitrariamente piccola: al di sotto della velocità critica

$$v_{crit.} = \min_p \frac{\epsilon(p)}{p}$$

il fluido scorre senza attrito, dunque $\eta = 0$ a $T = 0$.

In conclusione, ogni sostanza che

- è liquida a $T = 0$
- ha uno spettro di eccitazioni formato a bassa energia da fononi

è necessariamente superfluida a $T = 0$, perchè esiste una velocità critica $v_{cr} > 0$.

Cosa succede per $T > 0$? Il ragionamento precedente continua a valere, ma ora il liquido contiene un gas di fononi (o piu' in generale di quasiparticelle) che possono interagire con le pareti dando luogo a un comportamento viscoso, come vedremo nel prossimo paragrafo.

1.1.2 Effetto di trascinamento sul gas di quasiparticelle

Supponiamo che una massa M di elio nella fase II a una temperatura $T > 0$ si stia muovendo a una velocità \vec{v} . Nel suo moto esso trascina il gas di fononi e rotoni che descrive le eccitazioni termiche del sistema. Come cambia la distribuzione dei livelli energetici del gas per effetto del trascinamento? Per rispondere a questa domanda, supponiamo che nel liquido in moto si crei un'eccitazione di energia $\epsilon(p)$ ed impulso \vec{p} a spese dell'energia cinetica del fluido, senza scambio di energia con le pareti. Utilizzando nuovamente la conservazione dell'impulso [eq.(1.1.1)] e dell'energia, si ha, per M molto grande,

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \epsilon(p) \simeq \frac{1}{2}Mv^2 - \vec{p} \cdot \vec{v} + \epsilon(p).$$

Quindi la creazione di una eccitazione di momento \vec{p} nel fluido in moto corrisponde a un contributo in energia pari a $\epsilon_v(p) = \epsilon(p) - \vec{p} \cdot \vec{v}$.

Possiamo allora concludere che il moto del gas di eccitazioni a una velocità \vec{v} genera uno shift dei livelli energetici ¹ pari a $\epsilon(p) - \vec{p} \cdot \vec{v}$.

Calcoliamo l'impulso totale del gas di fononi, supponendo \vec{v} molto piccolo (si trascurano i termini di ordine v^2) Indicando con \vec{P} l'impulso totale del gas di fononi e con $\langle n(\epsilon) \rangle$ il numero di fononi nel livello ϵ , si ha

$$\vec{P} = \int d^3p \vec{p} \langle n(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p}) \rangle = \int d^3p \vec{p} \langle n(\epsilon) \rangle - \int d^3p \vec{p} \frac{d\langle n \rangle}{d\epsilon} (\vec{v} \cdot \vec{p}) + O(v^2).$$

Il primo integrale è nullo perchè è la somma (o l'integrale) di vettori che puntano uniformemente in tutte le direzioni (lo si vede anche esprimendo \vec{p} in coordinate sferiche). Nel secondo integrale dà un contributo solo la componente di \vec{p} lungo \vec{v} . Posto $\vec{p} = \frac{\vec{v}}{v^2}(\vec{p} \cdot \vec{v}) + \vec{n}_i(\vec{p} \cdot \vec{n}_i)$ (\vec{n}_i , ($i = 1, 2$) indica una coppia di versori ortogonali a \vec{v}), si ha, in coordinate sferiche,

$$\vec{p} = \frac{\vec{v}}{v} p \cos \theta + \vec{n}_1 p \sin \theta \cos \phi + \vec{n}_2 p \sin \theta \sin \phi$$

¹il fluido che si muove rigidamente alla velocità \vec{v} descrive, nel limite $M \rightarrow \infty$, un sistema inerziale e lo shift in questione descrive il modo di trasformarsi dell'energia per effetto di una trasformazione (galileiana) da un sistema di riferimento ad un altro.

L'integrazione su ϕ elimina la componente lungo \vec{n}_i

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{P} &= -\vec{v} \int_{-1}^{+1} d(-\cos\theta) 2\pi \int_0^\infty p^2 dp p^2 \cos^2\theta \frac{d\langle n \rangle}{d\epsilon} \\ &= -\vec{v} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty p^4 dp \frac{d\langle n \rangle}{d\epsilon}.\end{aligned}$$

Poichè stiamo considerando un gas di fononi, si ha $\epsilon(p) = pc$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{P} &= -\vec{v} \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty p^4 dp \frac{d\langle n \rangle}{dp} = \vec{v} \frac{16\pi}{3c} \int_0^\infty p^3 \langle n(\epsilon) \rangle dp \\ &= \vec{v} \frac{16\pi}{3c^2} \int_0^\infty p^2 dp \epsilon \langle n(\epsilon) \rangle = \vec{v} \frac{4}{3c^2} \int \int \int d^3p \epsilon \langle n(\epsilon) \rangle = \vec{v} \frac{4U}{3c^2},\end{aligned}$$

U = energia interna per un gas di fononi (vedi il caso del corpo nero)

$$U = \frac{\pi^2}{30} \frac{\kappa^4 T^4 V}{\hbar^3 c^3} = Vu.$$

Questa formula va paragonata con l'impulso per unità di volume trasportato da un fluido ordinario che si muove alla velocità \vec{v} : $\vec{P}/V = \rho \vec{v}$. \Rightarrow In conclusione, il gas di fononi trascinato dall'He II in moto si comporta come un fluido ordinario di densità

$$\rho = \frac{4}{3c^2} u = \frac{16\pi^5 \kappa^4 T^4}{45 \hbar^3 c^5},$$

quindi l'impulso trasportato dal fluido non è più tutto concentrato nelle molecole che si trovano nello stato fondamentale, ma si suddivide tra queste molecole e il gas di fononi. La frazione di impulso trasportata dai fononi cresce proporzionalmente a T^4 . Per temperature maggiori di ~ 0.5 °K il contributo dei rotoni non è più trascurabile ed il gas delle eccitazioni va trattato come un gas di fononi e rotoni. La curva di dispersione $\epsilon(p)$ in prossimità del minimo rotonico in p_0 si può parametrizzare nella forma seguente

$$\epsilon(p) \simeq \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}$$

dove $\frac{\Delta}{k} \simeq 8.6$ °K, $\mu \simeq 0.16 m_{He}$, $p_0/\hbar \simeq 1.9$ Å⁻¹. Il numero totale di rotoni, come quello dei fononi, non è fissato, quindi possiamo scegliere il potenziale chimico $\mu \simeq 0$ ($\Rightarrow z \simeq 1$).

Il numero medio di rotoni nel livello energetico $\epsilon(p)$ sarà allora:

$$\langle n(\epsilon) \rangle = \frac{1}{e^{\epsilon\beta} - 1}$$

Nell'intervallo di temperatura in cui l'*He* è superfluido ($0 \leq T \leq 2.17 \text{ }^\circ\text{K}$) i parametri del rotone implicano $\epsilon\beta \geq 4$, quindi $e^{\epsilon\beta} \gg 1$

$$\Rightarrow \langle n(\epsilon) \rangle \sim e^{-\epsilon\beta} .$$

Quindi il rotone si comporta quasi come un sistema classico. Ripetiamo ora il conto che avevamo fatto per il gas di fononi per calcolare la densità effettiva associata ai rotoni. L'impulso complessivo trasportato da un gas di rotoni alla velocità \vec{v} è dunque

$$\vec{P} = -\vec{v} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty p^4 dp \frac{d\langle n \rangle}{d\epsilon} .$$

Poichè $n(\epsilon) = e^{-\epsilon\beta}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{P} &= \vec{v} \frac{4\pi}{3} \beta \int_0^\infty p^4 dp \langle n(\epsilon) \rangle = \vec{v} \frac{\beta}{3} \sum_\epsilon p^2 e^{-\beta\epsilon} = \\ &= \vec{v} \frac{\beta}{3} \frac{\sum_\epsilon p^2 e^{-\beta\epsilon}}{\sum_\epsilon e^{-\beta\epsilon}} \sum_\epsilon e^{-\beta\epsilon} = \vec{v} \frac{\beta}{3} \langle p^2 \rangle \bar{N} , \end{aligned}$$

dove si è posto $\bar{N} = \sum_\epsilon \langle n_\epsilon \rangle$. Con buona approssimazione si ha $\langle p^2 \rangle = p_o^2$, quindi i rotoni si comportano come particelle di massa effettiva $\frac{p_o^2}{3\kappa T}$ in apparente accordo col teorema di equipartizione: $\frac{p_o^2}{2m} = \frac{3}{2} \kappa T$ Calcoliamoci ora il numero medio \bar{N} di rotoni per unità di volume in funzione di β :

$$\bar{N} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp e^{-\beta(\Delta + \frac{(p-p_o)^2}{2\mu})}$$

Introduciamo la variabile adimensionale $x^2 = \frac{\beta(p-p_o)^2}{2\mu}$;

$$\Rightarrow p = (x + x_o) \sqrt{\frac{2\mu}{\beta}} , \quad x_o = \sqrt{\frac{\beta}{2\mu}} p_o , \quad dp = \sqrt{\frac{2\mu}{\beta}} dx$$

$$\bar{N} = \frac{4\pi e^{-\beta\Delta}}{h^3} \left(\frac{2\mu}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-x_o}^\infty dx (x+x_o)^2 e^{-x^2} \simeq \frac{4\pi e^{-\beta\Delta}}{h^3} \left(\frac{2\mu}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^\infty dx (x+x_o)^2 e^{-x^2} .$$

Utilizzando il fatto che l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico è nullo, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(x + \sqrt{\frac{\beta}{2\mu}} p_o \right)^2 e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx e^{-x^2} + \frac{\beta}{2\mu} p_o^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} ;$$

e dalle note relazioni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2 t} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx e^{-x^2} = -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-tx^2} \Big|_{t=1} = \sqrt{\pi}/2 ,$$

si ottiene

$$\bar{N} = 2 \frac{e^{-\beta\Delta}}{h^3} \left(\frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} + 4\pi \frac{e^{-\beta\Delta}}{h^3} p_o^2 \left(\frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Poichè numericamente si verifica che $p_o^2 \gg 2\mu\kappa T$, $\Rightarrow \bar{N} \sim \frac{4\pi}{h^3} e^{-\beta\Delta} p_o^2 \left(\frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Inserendo questo valore nella formula che ci dà l'impulso per unità di volume trasportato da un gas di rotoni in movimentosi ha:

$$\vec{P} = \vec{v} \frac{4\pi}{3h^3} e^{-\beta\Delta} p_o^4 (2\pi\mu\beta)^{\frac{1}{2}} ,$$

quindi il gas di rotoni si comporta come un fluido di densità

$$\rho_{rot} = \frac{4\pi}{3h^3} e^{-\beta\Delta} p_o^4 (2\pi\mu\beta)^{\frac{1}{2}}$$

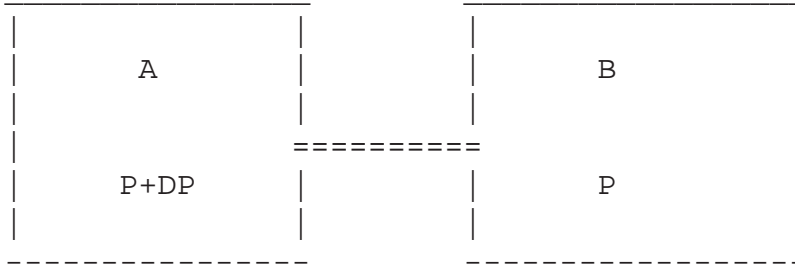
Da questa relazione si desume, come avevamo anticipato, che la densità dei rotoni è trascurabile per $T \leq 0.5 \text{ } ^\circ K$ e diventa dominante in prossimità del punto lambda.

L'He II appare composto da due fluidi che si compenetrano senza attrito: una componente superfluida di densità ρ_s formata dall'elio nello stato fondamentale e una componente normale di densità $\rho_n = \rho_{fon} + \rho_{rot}$. In particolare, $\rho_n(T = 0) = 0$ e tutta la massa è superfluida. Al crescere della temperatura la frazione $\frac{\rho_n}{\rho}$ ($\rho = \rho_n + \rho_s =$ densità dell' He II) cresce ed è 1 al λ -point, dove tutto il fluido diventa normale (ed è dominato dalla componente rotonica).

Inserendo i valori dei parametri nell'espressione che abbiamo trovato per ρ_{rot} si ottiene $\frac{\rho_n}{\rho} \sim 1$ per $T_c = 2.8 \text{ } ^\circ K$, che non è lontanissimo da $2.17 \text{ } ^\circ K$ (valore sperimentale del λ -point).

La componente normale, essendo formata da eccitazioni che si muovono in tutte le direzioni, ha ovviamente uno scambio di impulso con la parete, quindi il

suo moto è viscoso, per cui non riesce a passare attraverso i capillari molto sottili, cosa che invece può fare la componente superfluida. Si spiega così facilmente l'effetto mecano-calorico: se due recipienti di $HeII$ inizialmente alla stessa T sono posti in comunicazione con un capillare e sono mantenuti con una differenza di pressione costante ΔP



in modo che ci sia un flusso da A a $B \Rightarrow$ il fluido in B si raffredda perché attraverso il capillare fluisce solo la componente superfluida (che è a entropia 0 e quindi a $T = 0$).

Con lo stesso meccanismo si spiega anche l'effetto termomeccanico: se A e B inizialmente alla stessa P sono mantenuti a una differenza di temperatura ΔT , si genera un flusso nel capillare che determina una $\Delta P \propto \Delta T$.

1.1.3 Conducibilità termica infinita e secondo suono

Le variazioni di temperatura in un sistema omogeneo ordinario si propagano nel mezzo in accordo con l'equazione di propagazione del calore (di cui si è parlato più diffusamente nel capitolo sul moto browniano negli appunti di Meccanica Statistica)

$$\Delta u = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.1.2)$$

dove Δ è il Laplaciano e $u = u(\vec{x}, t)$ denota la temperatura nel punto \vec{x} al tempo t .

Nell' $He II$ la conducibilità termica D è infinita, quindi l'equazione precedente non è più valida. Si può pensare che il membro di destra dell'eq.(1.1.2) sia in realtà il primo termine di uno sviluppo in serie di Taylor in t . Se il primo termine è zero, il termine successivo con la derivata seconda non è più trascurabile, perciò ci si aspetta che l'equazione venga modificata nel modo seguente $\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, che rappresenta la propagazione per onde delle variazioni di temperatura. Dunque nell' $He II$ ci si aspettano due tipi di propagazioni per onde:

1. Il suono, cioè propagazione di onde di pressione o di densità descritta dall'eq. di d'Alembert

$$\Delta\rho = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

dove c è la velocità del suono che nell'*HeII* vale ~ 238 m/sec.

2. Il secondo suono, cioè la propagazione di fluttuazioni di ρ_n a ρ costante. Una variazione locale di ρ_n corrisponde a una variazione locale della temperatura, quindi il secondo suono è un'onda di temperatura.

Nell'ambito della teoria dei due fluidi, è facile derivare l'equazione di propagazione del secondo suono nel caso del gas di fononi (cioè nel caso dell'*He II* al di sotto di 0.5 °K).

Indichiamo con $\varepsilon = \frac{U}{V}$ l'energia per unità di volume del gas di fononi. L'equazione della meccanica $F = ma$ si traduce in un fluido nell'*equazione fondamentale dell'idrodinamica*:

$$\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}P$$

(p = impulso per unità di volume, P = pressione)

D'altra parte, la conservazione dell'energia (eq. di continuità) si scrive:

$$\frac{1}{c^2} \dot{\varepsilon} + \text{div } \vec{p} = 0,$$

da cui si ha $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -c^2 \text{div } \dot{\vec{p}} = c^2 \Delta P$. Ma in un gas di fononi (o di fotoni) abbiamo già visto che la pressione è legata alla densità di energia da $P = \frac{\varepsilon}{3}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - \frac{c^2}{3} \Delta\varepsilon = 0$$

Questa è di nuovo un'equazione di d'Alembert che descrive la propagazione di un'onda alla velocità

$$u = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

che è appunto la *velocità del secondo suono*. Sperimentalmente la velocità del secondo suono coincide con questa predizione teorica di Landau in un ampio intervallo di temperatura, per poi decrescere rapidamente in prossimità del punto lambda.

1.1.4 Teoria microscopica di Feynman

Questo è un approccio qualitativo che intende dare un fondamento microscopico al fenomeno della superfluidità ed è basato semplicemente sullo studio delle proprietà della funzione d'onda che descrive l'elio.

Cominciamo col vedere le proprietà della f. d'onda che descrive lo stato fondamentale. La funzione d'onda si può pensare come una mappa ϕ che assegna ad ogni configurazione dell'elio, individuata da $3N$ coordinate $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_N$ ($\vec{R}_i =$ raggio vettore dell' i esimo atomo) un'ampiezza di probabilità

$$\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_N \rightarrow \phi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_N).$$

L' He^4 è un liquido di Bose-Einstein $\Rightarrow \phi$ è simmetrica rispetto a tutte le permutazioni delle molecole.

Proprietà fondamentale: ϕ è reale e non ha nodi, perciò si può sempre scegliere con lo stesso segno (ad es. positiva).

Infatti ϕ soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i + \sum_{ij} V(r_{ij}) \right) \phi = U\phi.$$

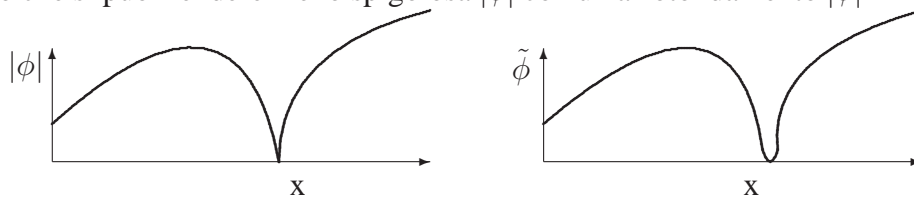
Essendo l'eq. lineare e reale, anche ϕ^* è una soluzione. Possiamo quindi scrivere tutte le soluzioni in forma reale: $\frac{\phi+\phi^*}{2}$ o $\frac{\phi-\phi^*}{2i}$.

La soluzione corrispondente allo stato fondamentale minimizza l'energia:

$$\langle E \rangle = \frac{\int \phi H \phi d^N \vec{R}}{\int \phi^2 d^N \vec{R}} = \frac{\int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i (\nabla_i \phi)^2 + \sum_{ij} V(r_{ij}) \phi^2 \right) d^N \vec{R}}{\int \phi^2 d^N \vec{R}}$$

Si può dimostrare che, essendo H un operatore ad elementi di matrice positivi, la f. d'onda dello stato fondamentale non ha nodi (Teorema di Perron Frobenius).

Argomento di plausibilità: sia x una delle coordinate. Se ϕ ha un nodo \Rightarrow la funzione $|\phi|$ dà a $\langle E \rangle$ lo stesso contributo di ϕ , tranne nel nodo ($\phi = 0$), dove $\frac{\partial |\phi|}{\partial x}$ è singolare, per cui ϕ e $|\phi|$ hanno approssimativamente la stessa energia, ma è chiaro che si può rendere meno spigolosa $|\phi|$ con un arrotondamento $|\phi| \rightarrow \tilde{\phi}$:

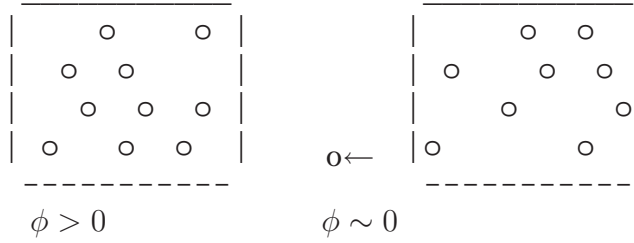


che dà un minor contributo di $(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2$ e quindi l'energia di $\tilde{\phi}$ è minore, contrariamente all'ipotesi che l'energia fosse minima $\Rightarrow \phi$ non ha nodi.

\Rightarrow Lo stato di energia piu' bassa non è degenere: se ci fossero due diverse autofunzioni ϕ_1 e ϕ_2 di minima energia, esisterebbe allora una combinazione $\mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2$ con un nodo, quindi l'energia non potrebbe essere minima.

Se ϕ è l'autof. di energia minima, il contributo di $(\nabla_i\phi)^2$ deve essere il minimo possibile, quindi ϕ deve variare il minimo possibile; \Rightarrow una configurazione con qualche atomo molto vicino ad un altro (v. figura) è molto improbabile perchè una piccola variazione della sua posizione provoca una grande variazione di ϕ :

Esempio:

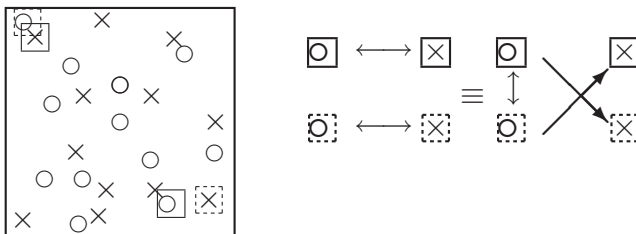


⇒ le conf. piu' probabili nello stato fondamentale sono quelle in cui gli atomi sono distribuiti approssimativamente in modo uniforme.

Stati eccitati: vediamo di dimostrare che le uniche eccitazioni dell'*He* di grande lunghezza d'onda non possono che essere dei fononi (= onde di compressione). Sia ψ la f. d'onda del I stato eccitato. Poichè $\int \phi \psi d^{3N}R = 0$ e $\phi > 0$, ⇒ ψ ha un nodo ed è positiva per metà delle configurazioni e negativa per l'altra metà.

Supponiamo che ψ sia un'eccitazione di grande lunghezza d'onda che non sia un fonone. ⇒ ψ non è associata a un cambiamento di densità. Sia *A* la conf. in cui ψ è massima (positiva) e *B* quella in cui ψ è minima (negativa). *A* e *B* sono indistinguibili e interscambiabili, perchè $\psi \rightarrow -\psi$ è una simmetria che scambia configurazioni di tipo *A* con quelle di tipo *B*. Indichiamo con \circ la posizione degli atomi in *A* e con \times la posizione nella configurazione *B*. Le posizioni \times occuperanno gli interstizi lasciati dalla configurazione *A*

In condizioni stazionarie il sistema si evolve nel tempo oscillando tra le due configurazioni *A* e *B*. Se ψ descrive un'eccitazione di grande lunghezza d'onda, si deve realizzare la trasformazione da *A* a *B* con spostamenti di atomi su grande scala. Esempio:



Si sono indicate due transizioni di larga scala da una posizione \circ a una posizione \times . Le due transizioni sono scelte in modo che la densità media delle conf A e B non si alteri, perciò se una molecola passa dallo stato \circ allo stato \times (rappresentata dai due quadrati in linea continua), ci sarà in prossimità un'altra molecola che passerà dallo stato \times allo stato \circ (quadrati tratteggiati) Ma queste due transizioni si possono decomporre nella seguente maniera:

- a) i due atomi in posizione \circ a grande distanza sono scambiati tra di loro, ma i due atomi sono indistinguibili, quindi questa trasf. non dà effetti osservabili.
- b) l'atomo in posizione \circ passa nella posizione \times a lui vicina, quindi l'effetto della transizione è in realtà un effetto su scala molto più piccola (è in sostanza la scala delle distanze interatomiche).

In conclusione, il fatto che l' He^4 soddisfa la statistica di Bose-Einstein impedisce il manifestarsi di eccitazioni su larga scala che non siano fononi (variazioni di densità).

- Funzione d'onda del fonone:

Sia $\rho(x)$ la densità dell'elio. Sviluppando in serie di Fourier (cioè in modi normali di vibrazione), si ha

$$\rho = \sum_k q_k e^{-ik \cdot x} .$$

In prima approssimazione, l'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \sum_k \left(\frac{1}{2} \dot{q}_k^2 + \frac{1}{2} k^2 c^2 q_k^2 \right)$$

(c = velocità del suono) L'energia del livello n -esimo dell'oscillatore k si può scrivere al solito nella forma $E_k = \hbar k c (n + \frac{1}{2})$. La f.d'onda dello stato fondamentale è

$$\Phi = \prod_k e^{-\frac{kc q_k^2}{2\hbar}}$$

(nota $\Phi > 0$) Un fonone d'impulso $\hbar k$ è il primo stato eccitato ($n = 1$) dell'oscillatore armonico k . La sua f.d'onda ψ_k è esprimibile con il polinomio di Hermite di primo grado $H_1(x) = x$

$$\Rightarrow \psi_k = q_k e^{-\frac{kc q_k^2}{2\hbar}} \prod_{k' \neq k} e^{-\frac{k' c q_{k'}^2}{2\hbar}} = q_k \Phi$$

Φ non è la vera f.d'onda ϕ dello stato fondamentale (non contiene i dettagli delle interazioni tra atomi a corte distanze). La forma corretta della funzione d'onda del fonone è $\psi = q_k \phi$, dove ϕ è la funzione d'onda vera dello stato fondamentale.

Approssimando gli atomi con dei punti materiali di massa m :

$$\rho(\vec{x}) = m \sum_j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{R}_j)$$

$$\Rightarrow q_k = \int e^{ik \cdot x} \rho(\vec{x}) d^3x = m \sum_j e^{ik \cdot R_j};$$

in conclusione,

$$\psi_k = \sum_j e^{ik \cdot R_j} \phi.$$

- Funzione d'onda del rotone

Si è visto che la funzione d'onda che ha per massimo la conf. con tutti gli atomi nella posizione \circ e per minimo la conf. con tutti gli atomi in posizione \times descrive un'eccitazione a corta lunghezza d'onda (dell'ordine della distanza interatomica). Questa eccitazione è il rotone.

Supponiamo, per semplificare in maniera drastica, che gli atomi possano occupare solo le posizioni \circ o \times . Sia N_o il numero di atomi nella posiz. \circ e N_x il numero nella posizione \times . Una funzione d'onda che interpola tra la conf. A e B è

$$\psi = (N_o - N_x) \phi.$$

Pochè $N = N_o + N_x$, è facile verificare che ψ è "ortogonale" a ϕ :

$$(\psi, \phi) = \sum_{config.} \psi \phi = \sum_{N_o=0}^N (2N_o - N) \phi^2 = 0.$$

In maniera piu' precisa, conviene introdurre per ogni atomo una funzione interpolante $f(R)$ che vale $+1$ se l'atomo si trova nella posizione \circ e -1 se si trova in posizione \times .

$$\Rightarrow \psi = \sum_i f(R_i) \phi.$$

La forma precisa di f si può ottenere da un calcolo variazionale ottenuto imponendo che ψ abbia energia minima. Si dimostra che f ha ancora la forma $f(x) = e^{ik \cdot x}$ come nel caso del fonone, ma il valore dell'energia associata $\epsilon(k)$ è diverso ed è esprimibile in funzione delle proprietà dello stato fondamentale (v. Feynman, Statistical Mechanics).

1.1.5 Vortici nell' HeII

Sia ϕ la f.d'onda dell'HeII nello stato fondamentale a riposo.

$\Rightarrow \phi > 0$. Se il fluido si muove macroscopicamente a una velocità \vec{v} , ogni atomo i contribuisce con un fattore di fase $e^{\frac{imv \cdot R_i}{\hbar}}$ e la f.d'onda diventa

$$\Phi = e^{i \frac{m}{\hbar} \sum_j R_j \cdot v} \phi = e^{i \frac{P \cdot R}{\hbar}} \phi,$$

dove $\vec{P} = Nm\vec{v}$ è l'impulso totale e $R = \frac{\sum_j R_j}{N}$ denota le coordinate del centro di massa. Tale formula continua a valere anche nel caso in cui la velocità non è costante ma varia lentamente. In questa ipotesi la variazione di fase $\delta\theta$ tra configurazioni che differiscono per "piccoli" spostamenti delle molecole (piccoli rispetto alla scala di variazione delle velocità) è data da

$$\delta\theta = \sum_j \frac{m}{\hbar} v_j \cdot \delta R_j$$

Questa è ad esempio la variazione della fase se si fotografa la configurazione degli atomi ad istanti successivi.

Consideriamo una successione di atomi $i = 1, \dots, k$ disposti ad anello, e degli spostamenti δR_j che mandino circolarmente $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \dots i \rightarrow i+1 \dots k \rightarrow 1$. Poiché gli atomi sono indistinguibili, questa permutazione non può dare effetti osservabili, per cui $\delta\theta = 2n\pi$. Per un anello molto grande si può sostituire alla somma un integrale. È importante ora osservare che ogni moto macroscopico dell'HeII può essere realizzato a livello microscopico con una serie di permutazioni delle molecole, quindi non deve dare effetti osservabili nella fase della funzione d'onda. Quindi per ogni cammino chiuso γ si può scrivere

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \frac{2n\pi\hbar}{m} = \frac{nh}{m}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

Questo è il *teorema della circuitazione di Feynman*. Nell'approssimazione in cui il campo $\vec{v}(R)$ è un campo vettoriale continuo, una piccola variazione del circuito

$\gamma \rightarrow \gamma + \delta\gamma$ non può comportare una variazione della quantità $n \frac{\hbar}{m}$

$$\Rightarrow \oint_{\delta\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 ;$$

ma $\delta\gamma$ è il bordo di una superficie semplicemente connessa Σ . Si può allora applicare il lemma di Green:

$$\Rightarrow \oint_{\delta\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{v} = 0 \quad (\text{condizione di Landau})$$

Quindi la velocità dell'*HeII* in movimento è un campo irrotazionale. Ne consegue che in una regione semplicemente connessa si può trovare una funzione scalare $\Theta(\vec{R})$ tale che

$$\vec{v} = \nabla\Theta .$$

Bisogna ammettere che l'argomentazione usata, pur essendo suggestiva, è piuttosto artificiosa, soprattutto per quanto riguarda la commistione di argomenti microscopici con altri macroscopici.

Vediamo ora di trovare un'altra argomentazione più solida, basata su un'interpretazione microscopica (cioè in termini di funzione d'onda) di $\Theta(\vec{R})$.

La f. d'onda dell'*He* nello stato fondamentale si può scrivere nella forma fattorizzata

$$\Phi(\vec{R}_1, \vec{R}_2 \dots \vec{R}_N) = \prod_{i=1}^N \psi(\vec{R}_i)$$

che soddisfa tutte le proprietà di simmetria della f. d'onda bosonica. Questa proprietà di fattorizzazione è del tutto generale per un sistema bosonico nello stato fondamentale. L'informazione che ora ci occorre è che se il fluido è in moto $\psi(\vec{R})$ è complessa. Inoltre normalizziamo ψ in modo che $|\psi(\vec{R})|^2 = n(\vec{R})$ rappresenti il numero di molecole per unità di volume.

è ora facile verificare che, posto $\psi(\vec{R}) = e^{i\theta(\vec{R})}\phi(\vec{R})$, ($\phi^* = \phi$),

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla\theta(\vec{R})$$

Infatti, poichè l'operatore impulso è dato da $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, la densità di impulso si ottiene, come è noto, da

$$\vec{\varphi} = \hbar \frac{\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*}{2i} = \hbar |\psi|^2 \nabla \theta$$

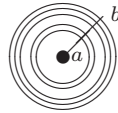
e poichè nella formulazione macroscopica si ha $\vec{\varphi} = \rho_o(\vec{R})\vec{v} = n(\vec{R})m\vec{v}$, si ottiene l'equazione per \vec{v} incorniciata, che è appunto la descrizione del campo delle velocità $\vec{v}(R)$ in termini microscopici.

Se si continua ad utilizzare l'approssimazione del limite continuo è facile convincersi che i vortici si possono avere solo per regioni non semplicemente connesse. Infatti in questo caso la fase θ può essere una funzione polidroma. Consideriamo un recipiente formato dall'intercapedine tra un cilindro esterno di raggio b e uno interno di raggio a , entrambi di altezza l non necessariamente coassiali. Consideriamo un sistema di coordinate cilindriche rispetto all'asse del cilindro più interno. Si ha $\theta = \theta(\rho, z, \alpha)$, dove $0 \leq z \leq l$, $\rho > a$ e α è l'angolo polare attorno all'asse. Quando compiamo un giro attorno a quest'asse $\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi$ e la fase θ non ritorna necessariamente al suo valore iniziale, ma poichè ψ è a un sol valore, la forma funzionale di θ è

$$\theta = f(\rho, z, \alpha) + n\alpha \quad ,$$

dove f è un'arbitraria funzione periodica in α ($f(\rho, z, \alpha + 2\pi) = f(\rho, z, \alpha)$) e n è un numero intero relativo. Se ora utilizziamo la formula incorniciata per calcolare la circuitazione di \vec{v} ritroviamo il teorema della circuitazione di Feynman: dunque la quantizzazione dei vortici è una conseguenza della richiesta che la funzione d'onda sia a un sol valore.

Studiamo ora il caso in cui gli assi dei due cilindri siano coincidenti, cosicchè il problema acquista una simmetria cilindrica. Per la simmetria e per il fatto che non ci sono nè pozzi, nè sorgenti, le linee di flusso sono dei cerchi concentrici.



Poichè le superfici equipotenziali $\theta = \text{costante}$ sono necessariamente ortogonali alle linee di flusso, formano un fascio di piani uscenti dall'asse dei cilindri. In coordinate polari (ρ, α) si avrà

$$\theta = f(\alpha)$$

dove f è una funzione che ora cerchiamo di determinare. Si ha $\nabla\theta = \frac{df}{d\alpha}\nabla\alpha$. Ponendo $\alpha = \arctan \frac{y}{x}$, si ottiene

$$\nabla\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y/\rho^2 \\ x/\rho^2 \end{pmatrix},$$

quindi $\nabla\alpha$ è, come c'era da aspettarsi, un campo tangenziale e $|\nabla\alpha| = 1/\rho$. Poichè per la simmetria del problema $|\vec{v}|$ è solo funzione di ρ , il modulo dell'equazione incorniciata, $|\vec{v}| = \frac{\hbar}{m} \left| \frac{df}{d\alpha} \right| |\nabla\alpha|$, ci dice che $\frac{df}{d\alpha} = \text{costante}$, quindi

$$\theta = k\alpha$$

Poichè la f. d'onda ψ è a un sol valore $\Rightarrow k$ è un intero positivo negativo o nullo; per $k \neq 0$ si ha un vortice e il campo delle velocità è dato da

$$\vec{v} = k \frac{\hbar}{m} \begin{pmatrix} -y/\rho^2 \\ x/\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Calcolando la circuitazione del campo delle velocità lungo un cammino chiuso γ concatenato con il vortice si ottiene nuovamente il teorema della circuitazione di Feynman:

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \frac{k\hbar}{m}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Calcoliamoci ora l'energia del vortice per unità di lunghezza:

$$\frac{E}{l} = \int d\alpha \int \frac{1}{2} \rho_o v^2 \rho d\rho = \frac{\rho_o \hbar^2}{2 m^2} 2\pi \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho_o \hbar^2}{4\pi m^2} \log\left(\frac{b}{a}\right),$$

dove ρ_o è la densità dell'elio.

Se a è dell'ordine della distanza interatomica (pochi Å) la descrizione continua non è piu' giustificata, il campo di velocità \vec{v} non è in realtà singolare al centro del vortice \Rightarrow i vortici quantizzati si possono formare anche nelle regioni connesse. L'asse del vortice non è necessariamente una retta, ma una linea che puo' finire ai bordi del sistema o puo' richiudersi su se stessa: *vortex ring* o vortice ad anello. Questi modi collettivi sono delle pseudoparticelle perchè hanno, come vedremo, energia ed impulso fissati.

I vortex ring sono soluzioni a energia finita delle equazioni del moto dell'elio superfluido. A causa della quantizzazione della circuitazione di \vec{v} (Teorema di

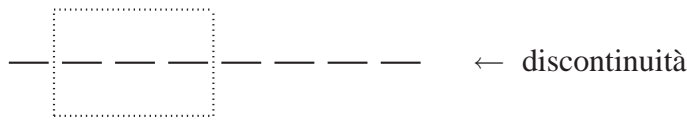
Feynman), queste soluzioni sono stabili: non possono perdere energia per dissipazione². Ma come fa un flusso irrotazionale a generare un vortice? Come può nascere la discontinuità necessaria?

Supponiamo che esista una superficie Σ che separi l'*HeII* in due parti: una che scorre a velocità \vec{v} sopra la superf. e l'altra che è a $\vec{v} = 0$

$$\begin{array}{ccc} \text{He II} & \rightarrow & \vec{v} & \rightarrow \\ & \rightarrow & & \rightarrow \\ \hline & & & \Sigma \\ \text{He II} & & \vec{v} = 0 & \end{array}$$

Se si toglie la parete di separazione Σ (in assenza di ogni perturbazione) abbiamo un sistema descritto da due f. d'onda: $e^{im \sum_j \frac{\vec{v} \cdot \mathbf{R}_j}{\hbar}} \phi$ e ϕ . C'è una discontinuità tra le due pareti, tranne nei punti in cui $e^{im \sum_i \frac{\vec{v} \cdot \mathbf{R}_i}{\hbar}} = 1$

La circuitazione attorno al cammino punteggiato



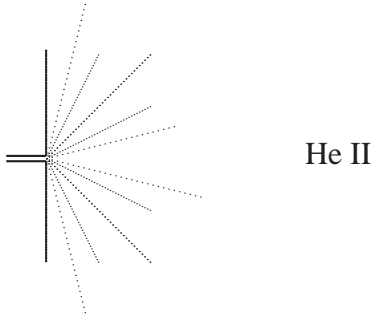
è $\neq 0 \Rightarrow$ possono formarsi dei vortici.

1.1.6 Flusso irrotazionale

Vediamo ora che forma ha il flusso irrotazionale da un orifizio di un microcapillare che immette *HeII* alla velocità \vec{v} in un recipiente con *HeII* in quiete. Utilizzando l'analogia con il campo elettrico (che è irrotazionale) ci si convince facilmente che per avere un moto irrotazionale le linee di flusso all'uscita dal capillare devono disporsi a raggiera (il campo delle velocità ha la stessa forma di un campo elettrico generato da una sorgente puntiforme posta all'uscita del capillare, quindi $\vec{v} \propto \frac{\vec{r}}{r^3}$), il che comporta forti accelerazioni all'uscita del capillare e il coinvolgimento di tutto il fluido che inizialmente era in quiete (perché la velocità diminuisce in modulo come il quadrato della distanza dall'orifizio, sempre in analogia a quanto

²Le soluzioni stabili di energia finita delle equazioni del moto di un sistema dinamico qualsiasi (classico o quantistico) si dicono *solitoni*. Ne vedremo altri esempi in altri sistemi.

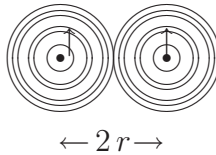
succede per il campo elettrico). In conclusione il flusso irrotazionale è una configurazione di energia elevata.



1.1.7 Velocità critica con i vortex rings

Dal punto di vista energetico è più conveniente un flusso a getto cosicché ci sono le condizioni per la formazione dei vortici.

Sezione di un vortex ring



L'anello si muove in direzione perpendicolare al suo piano a una velocità

$$v = \frac{\hbar}{2mr}$$

(Basta calcolare la velocità del centro del vortice di destra provocato dal campo di velocità del vortice di sinistra). L'energia trasportata dal vortice si può calcolare approssimativamente applicando la formula del vortice a simmetria cilindrica per un cilindro di lunghezza $l = 2\pi r$

$$\Rightarrow \epsilon(r) = \frac{\rho_o}{2} \frac{\hbar^2}{m^2} r \log \frac{r}{a}$$

Quando l'*He* scorre con una velocità v lungo un capillare di raggio R può produrre dei vortici di raggio $r < R$ purchè

$$v \geq v_{crit} = \min(\epsilon/p) \quad (\text{condizione di Landau}).$$

Per calcolare l'impulso p del vortice usiamo il fatto che la derivata della curva di dispersione nel punto p coincide con la velocità della corrispondente quasiparticella ³:

$$\frac{d\epsilon}{dp} = v = \frac{\hbar}{2mr}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{d\epsilon} = \frac{dp}{dr} \frac{dr}{d\epsilon} = \frac{2mr}{\hbar}$$

D'altra parte

$$\frac{d\epsilon}{dr} = \frac{\rho_o}{2} \frac{\hbar^2}{m^2} \log \frac{r}{a} + \frac{\rho_o}{2} \frac{\hbar^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dr} = \frac{2mr}{\hbar} \frac{d\epsilon}{dr} = \rho_o 2\pi \frac{\hbar}{m} \left(r \log \frac{r}{a} + r \right).$$

Integrando rispetto a r da a a R si ottiene ⁴

$$p = 2\pi\rho_o \frac{\hbar}{m} \left(\frac{r^2}{2} \log r + \frac{r^2}{4} (1 - 2 \log a) - \frac{a^2}{4} \right) = 2\pi\rho_o \frac{\hbar}{m} \left(\frac{r^2}{2} \log \frac{r}{a} + \frac{r^2}{4} - \frac{a^2}{4} \right).$$

Trascurando il termine $\frac{a^2}{4}$ che è microscopico si ha

$$\frac{\epsilon}{p} = \frac{\hbar}{mr} \frac{\log \frac{r}{a}}{\frac{1}{2} + \log \frac{r}{a}}.$$

$$\Rightarrow v_{crit} = \frac{\hbar}{mR} \frac{\log \frac{R}{a}}{\log(\sqrt{e} \frac{R}{a})}.$$

La forma funzionale della dipendenza della velocità critica in un capillare è in accordo con i dati sperimentali, anche se il valore è leggermente più grande. C'è un effetto correttivo dovuto ai vortici di dimensioni paragonabili al diametro del capillare.

³questa è una proprietà generale legata alla definizione di energia e impulso. È immediato verificarla per l'energia cinetica di una particella puntiforme non relativistica $E = \frac{p^2}{2m}$ o per o relativistica $E = c\sqrt{(mc)^2 + p^2}$

⁴Si fa uso dell'integrale $\int x \log x dx = \frac{1}{4} \int \log(x^2) d(x^2) = \frac{1}{4} [R^2 \log R^2 - R^2]$

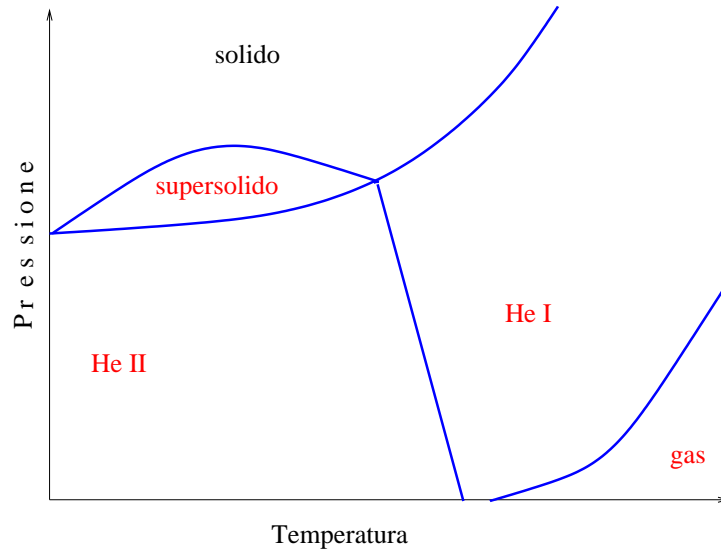


Figure 1.1: Forma schematica del diagramma delle fasi dell' He^4 .

1.2 Elio supersolido

Per oltre 40 anni si è molto discusso sulla possibile esistenza di solidi quantistici con comportamento analogo ai superfluidi e detti perciò *supersolidi*. Solo molto di recente si è riusciti ad ottenere la prova sperimentale dell'esistenza di questo nuovo stato della materia per opera di due ricercatori coreani (E.Kim e M.H.W. Chan, 2004). Essi costruirono un dispositivo formato da un piccolo anello di He^4 solido di raggio di 1 cm in rotazione attorno al suo asse di simmetria (l'elio può esistere allo stato cristallino solo a pressioni dell'ordine di 25 bar o superiori e a bassa temperatura, v. Fig.1.1). Essi osservarono al di sotto della temperatura di 175 mK (millikelvin) una improvvisa riduzione del momento di inerzia del dispositivo, purchè la velocità di rotazione fosse minore di un valore critico $v_c = 300 \mu m/sec$, come se una parte del solido non venisse più trascinata dalla rotazione dell'anello. Questa frazione di solido è appunto il supersolido, mentre la parte rotante costituisce il solido normale. La frazione supersolida risultò essere dell'ordine di $5 - 25 \cdot 10^{-3}$.

L'interpretazione teorica più accreditata di questo fenomeno è la seguente. L' He^4 solido a queste temperature è un solido quantistico in cui importanti effetti tunnel fanno fluttuare il numero degli atomi in ogni sito reticolare. Questo porta all'esistenza di atomi di elio delocalizzati, che possono essere descritti solo

attraverso una funzione d'onda che è diversa da zero in un intervallo di alcuni passi reticolari. Gli atomi delocalizzati costituiscono le quasiparticelle, cioè le eccitazioni elementari del sistema, definite da stati di impulso ed energia fissati (la curva di dispersione sembra essere $\epsilon = \epsilon_o \sin(ka)$, dove a è il passo reticolare). L'insieme di queste quasiparticelle forma un gas bosonico che al di sotto di una temperatura critica subisce la condensazione di Bose -Einstein. Si genera così un condensato, formato dalle quasiparticelle nello stato fondamentale, che costituisce la componente supersolida del cristallo. Sia la temperatura di condensazione che la velocità critica, data da $\min(\epsilon/k)$, riproducono con buona approssimazione i dati sperimentali.

Chapter 2

Sistemi critici classici

2.1 Il modello di Landau-Ginzburg

Uno degli strumenti di base per lo studio della fisica della materia condensata è il modello di Landau-Ginzburg. Questo modello è definito su un reticolo qualsiasi e le sue configurazioni sono definite assegnando ad ogni nodo x un campo vettoriale reale o complesso ϕ_x^a ($a = 1, 2, N$) che ha il ruolo di parametro d'ordine. Nella sua forma generale l'Hamiltoniana è

$$H_{LG}[\phi] = K \sum_{\langle ij \rangle} \sum_a^N (\phi_i^a - \phi_j^a)^2 + \sum_i V(\phi_i). \quad (2.1.1)$$

Abbiamo già incontrato un'applicazione questo modello nel corso di meccanica statistica al sistema di Ising in prossimità del punto critico. In quel caso ϕ era un campo scalare reale che rappresentava la magnetizzazione locale. Vedremo altri esempi in cui ϕ è un vettore di $O(N)$ per descrivere il comportamento critico di sistemi con simmetrie continue. Studieremo con particolare attenzione il caso di reticolo bidimensionale con ϕ in $O(2)$ che ha importanti implicazioni teoriche ed è fondamentale nello studio dell'effetto di *roughening*, che è un fenomeno ubiquitario che si incontra ad es. nello studio della fisica delle interfacce e nei processi di crescita dei cristalli. Un altro caso importante è quello di un campo che descrive la distribuzione di cariche elettriche in un superconduttore, ecc.

Assumiamo per il momento che ϕ sia, come nel modello di Ising, un campo scalare reale. Ci proponiamo di sviluppare un formalismo generale per lo studio dei correlatori che sarà utile in seguito. Per comodità scriveremo l'Hamiltoniana

come fosse definita sul continuo, cioè

$$H[\phi] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + V(\phi(x)) \right) \quad (2.1.2)$$

con

$$V(\phi) = \frac{t}{2} \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4$$

dove t e u sono due parametri su cui molto si è discusso nel corso di MS.

2.1.1 Derivata funzionale e calcolo variazionale su reticolo

Nel limite continuo $H_{GL}[\phi]$ è un funzionale di $\phi(x)$. La derivata funzionale $\frac{\delta H_{LG}[\phi]}{\delta \phi(x)}$, o, piu' in generale, $\frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi(x)}$ (dove I e' un funzionale qualsiasi) si puo' calcolare ricorrendo alla definizione su reticolo, in base alla regola seguente

$$\frac{\delta I}{\delta \phi(x_i)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^d} \frac{\partial I}{\partial \phi_i},$$

dove ϕ_i è la variabile dinamica associata al sito i di coordinata x_i .

Esempi:

$$I[\phi] = \int dy f(y) \phi^p(y) = \lim_{a \rightarrow 0} a \sum_k f_k \phi_k^p \Rightarrow \frac{\delta I}{\delta \phi(x)} = p f(x) \phi^{p-1}(x)$$

↓

$$I[\phi] = \int dy V(\phi(y)) \Rightarrow \frac{\delta I}{\delta \phi(x)} = V'(\phi(x)).$$

$$J = \int dy \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 = \lim_{a \rightarrow 0} a \sum_k \frac{1}{a^2} (\phi_{k+1} - \phi_k)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{a \partial \phi_i} = \frac{2}{a^2} [(\phi_i - \phi_{i+1}) + (\phi_i - \phi_{i-1})] = -\frac{2}{a^2} (\nabla \phi_i - \nabla \phi_{i-1})$$

↓

$$\frac{\delta J}{\delta \phi(x)} = -2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\delta \phi(y)}{\delta \phi(x)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \delta_{ij} = \delta(y - x),$$

dove l'ultima δ è la delta di Dirac, infatti

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_k a f(x_k) \frac{1}{a} \delta_{ki} = f(x_i) = \int f(y) \delta(y-x) f(x) dy .$$

2.1.2 Energia libera di Helmholtz e di Gibbs

Prima di procedere oltre, conviene sviluppare una conseguenza importante del teorema fluttuazione risposta. L'energia libera di Helmholtz F e' definita da $e^{-\beta F} = Z$. F e' una funzione di β e B (o β e V nei gas), inoltre:

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_B , \quad \mathcal{M} = - \frac{\partial F}{\partial B}$$

dove \mathcal{M} è la magnetizzazione totale, $\mathcal{M} = M V$. Il differenziale totale di F si può allora scrivere nella forma

$$dF = \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial B} dB = -S dT - \mathcal{M} dB .$$

Definiamo la seguente trasformazione di Legendre: $\Gamma = F + \mathcal{M} B$, detta energia libera di Gibbs (nel caso di un campo magnetico variabile da punto a punto si ha $\Gamma = F + \sum_i B_i \langle \phi_i \rangle = F + \int d^d x B(x) \langle \phi(x) \rangle$)

$$\Rightarrow d\Gamma = -S dT + B d\mathcal{M} \Rightarrow \Gamma = \Gamma(\beta, \mathcal{M}) ,$$

inoltre $B = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathcal{M}} \right)_T$. Poniamo $\beta = \mu = 1$ per semplificare la notazione. Abbiamo già visto che il correlatore G_{ij} si può scrivere nella forma:

$$G_{ij} = \frac{\delta}{\delta B_i} \frac{\delta}{\delta B_j} \log Z = - \frac{\delta^2}{\delta B_i \delta B_j} F .$$

Scegliendo un campo $B(x)$ della forma $B(x_i) = \lambda_i B$, dove i λ_i sono dei numeri reali arbitrari, si ha $\frac{\partial \log Z}{\partial B} = \sum \lambda_i \langle \phi_i \rangle$ e quindi

$$\frac{\partial^2 \log Z}{\partial B^2} = \sum_{ij} \left\langle \left[\sum_i \lambda_i \phi_i - \sum_j \lambda_j \langle \phi_j \rangle \right]^2 \right\rangle = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j G_{ij} > 0 .$$

Una matrice \mathcal{A}_{ij} che gode della proprietà ($\sum_{ij} \lambda^i \lambda^j \mathcal{A}_{ij} > 0$) si dice positiva. Le matrici positive non hanno autovalori nulli (anzi, sono tutti positivi) ed è perciò

invertibile; se infatti avesse un autovalore nullo e detto $x = (x^1, x^2, \dots)$ il suo autovettore $\Rightarrow x^i x^j \mathcal{A}_{ij} = 0$ contrariamente all'ipotesi.

Teorema: la matrice $A^{ij} = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta M_i \delta M_j}$ è l'inversa di $G_{ij} = \frac{\delta^2 \log Z}{\delta B_i \delta B_j} = \frac{\delta M_j}{\delta B_i}$ infatti

$$A^{ij} G_{jk} = \frac{\delta B_i}{\delta M_j} \frac{\delta M_j}{\delta B_k} = \delta_{ik}; \quad \text{c.v.d.} \quad (2.1.3)$$

Esercizio: calcoliamoci l'energia libera di Gibbs nell'approssimazione di Landau

$$Z = e^{-H_{LG}[\phi_0] + \int d^d x B(x) \phi_0(x)}$$

Dove ϕ_0 è la configurazione che minimizza H_{LG} , cioè $\phi_0(x) : \frac{\delta H_{LG}[\phi_0]}{\delta \phi_0(x)} = B(x)$.
Si ha

$$F = H_{LG}[\phi_0] - \int d^d x B(x) \phi_0(x) \Rightarrow \Gamma[\phi_0] = H_{LG}[\phi_0]$$

$$\Gamma[\phi] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} t \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 \right)$$

Soluzione uniforme: $\phi_0(x) = M \Rightarrow \Gamma(M) = V \left(\frac{1}{2} t M^2 + \frac{u}{4!} M^4 \right)$. Poiché $B = \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma}{\partial M} \Rightarrow B = t M + \frac{u}{6} M^3$ che è proprio l'equazione del campo medio, per cui si derivano gli stessi esponenti critici.

2.1.3 Calcolo dei correlatori nel modello di LG

Nell'approssimazione di Landau si ha

$$\Gamma[\phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{t}{2} \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 \right]$$

$$\Rightarrow B(x) \equiv \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi(x)} = -\Delta \phi + t \phi + \frac{u}{6} \phi^3 .$$

D'altra parte si ha $\frac{\delta \langle \phi(x) \rangle}{\delta B(y)} = G(x, y)$. Nel caso di campo magnetico costante l'invarianza traslazionale ci dice che $G(x, y) = G(x - y) \Rightarrow$ differenziamo l'equazione $B(x) = \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi(x)}$ rispetto a $B(y)$ si ha

$$\delta^{(d)}(x - y) = -\Delta G_{LG}(x - y) + \xi^{-2} G_{LG}(x - y) , \quad (2.1.4)$$

con

$$\xi^{-2} = t + \frac{u}{2} m^2, \quad (2.1.5)$$

dove si è posto $m = \langle \phi \rangle$ e ξ è la lunghezza di correlazione, come verifichiamo tra poco. Usando le solite condizioni di minimo dell'energia libera a campo magnetico nullo $t\phi + \frac{u}{6}\phi^3 = 0$ si ha, sia nella fase fredda che in quella calda,

$$\xi^{-2} \propto t \Rightarrow \nu = \frac{1}{2} \quad (2.1.6)$$

La sua trasformata di Fourier dà

$$\tilde{G}_{LG}(k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \frac{1}{k^2 + t + \frac{u}{2}m^2}, \quad (2.1.7)$$

da cui

$$G_{LG}(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k e^{-ik \cdot x}}{k^2 + t + \frac{u}{2}m^2}.$$

Si è già visto (vedi gli appunti di MS) che $G(x)$ in prossimità di T_c ha la forma funzionale seguente :

$$G(r) = \frac{g(r/\xi)}{r^{d+\eta-2}}, \Rightarrow \tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int d^d x e^{ik \cdot x} \frac{g(r/\xi)}{r^{d+\eta-2}} = \frac{h(k\xi)}{k^{2-\eta}}$$

dove $h(k\xi)$ è una funzione adimensionale ottenuta integrando sulla variabile adimensionale r/ξ .

$$T = T_c \Rightarrow \tilde{G}(k) \propto \frac{1}{k^{2-\eta}}.$$

ma a $T = T_c$ si ha $t = 0$, $m = 0$, quindi la (2.1.7) diventa $G_{LG}(k) = \frac{1}{k^2}$

$$\Rightarrow \eta = 0.$$

In teoria di campo l'indice critico η è la *dimensione anomala* del campo ϕ . L'origine di questo termine si può capire dalle seguenti considerazioni dimensionali. Poichè $Z = e^{-H[\phi]}$, $\Rightarrow H$ è adimensionale

$$H = \int d^d x \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \dots$$

$$[H] = [d^d x] + 2[\nabla] + 2[\phi]$$

$$[H] = 0 \Rightarrow [\phi] = \frac{2-d}{2}$$

D'altra parte $[G(x, y)] = 2[\phi]$, perciò

$$[\tilde{G}] = 2[\phi] + d = 2.$$

Se $\eta \neq 0$ queste considerazioni di analisi dimensionale evidentemente non valgono più: per effetto dell'interazione il campo ϕ acquista una dimensione anomala che si può calcolare utilizzando il gruppo di rinormalizzazione.

Esercizio: calcoliamoci la forma esatta del correlatore in $d = 3$ nella teoria di Landau-Ginzburg

$$G(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + \xi^{-2}}.$$

Poniamo $k \cdot x = kr \cos \theta$ $d^3k = -k^2 dk d\phi d \cos \theta$

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 + \xi^{-2}} \int_{-1}^1 e^{-ikr \cos \theta} d \cos \theta = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 + \xi^{-2}} 2 \sin kr \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r} \Im m \int_{-\infty}^\infty \frac{k dk e^{ikr}}{k^2 + \xi^{-2}} \end{aligned}$$

Per il lemma di Jordan si ha, “chiudendo di sopra”,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{k dk e^{ikr}}{k^2 + \xi^{-2}} &= \oint_\gamma \frac{k dk e^{ikr}}{k^2 + \xi^{-2}} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{k e^{ikr}}{k^2 + \xi^{-2}} \right)_{k=i\xi^{-1}} \\ &= 2\pi i \lim_{k \rightarrow i\xi^{-1}} (k - i\xi^{-1}) \frac{k e^{ikr}}{(k - i\xi^{-1})(k + i\xi^{-1})} = i\pi e^{-r/\xi} \\ \Rightarrow \Im m \int_{-\infty}^\infty \frac{k dk e^{ikr}}{k^2 + \xi^{-2}} &= \pi e^{-r/\xi} \Rightarrow G(\vec{x}) = G(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-r/\xi} \end{aligned}$$

2.1.4 Criterio di consistenza di Ginzburg

Il correlatore è una grandezza fisica strettamente legata alle fluttuazioni. Nel modello di Landau-Ginzburg si ha, come si è già visto

$$G(x, y) = \langle \delta\phi(x) \delta\phi(y) \rangle$$

con $\delta\phi(x) = \phi(x) - m(x) \equiv \phi(x) - \langle \phi(x) \rangle$. Nell'approssimazione di Landau $m(x) = \phi_o(x)$, dove $\phi_o(x)$ è la configurazione che minimizza l'Hamiltoniana. Poiché in questa approssimazione, come nella Mean Field Approximation (MFA),

si trascurano in una certa misura le fluttuazioni, affinché quest'approccio sia consistente occorre che le fluttuazioni siano piccole rispetto alle altre quantità valutate nella stessa approssimazione. La fluttuazione del campo in un punto x influenza la regione circostante di volume $V \propto \xi^d$, per cui un parametro che misura la consistenza interna della MFA è

$$\frac{\delta\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2} = \frac{\int_V d^d x \int_V d^d y \langle \delta\phi(x) \delta\phi(y) \rangle}{\phi_o^2 V^2}, \quad V \simeq \xi^d. \quad (2.1.8)$$

L'approssimazione è consistente solo se in prossimità del punto critico ($\xi \rightarrow \infty$) il parametro $\frac{\delta\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2}$ non diverge. Questa richiesta costituisce il *Criterio di Ginzburg*.

Calcoliamoci questo parametro. Si ha, come abbiamo visto più volte, $\phi_o^2 \propto t \propto \xi^{-2}$ (si veda ad es. l'eq. (2.1.5)). D'altra parte

$$\delta\mathcal{M}^2 = V \int_V d^d x G(x) = \tilde{G}(k=0) = V \xi^2.$$

Applicando il criterio di Ginzburg $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\delta\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2} < \infty$ si ottiene un importante vincolo sulle dimensioni d dello spazio in cui gli esponenti critici derivati nella MFA sono affidabili:

$$\xi^{4-d} < c$$

dove c è un'opportuna costante. Si vede chiaramente che, se $d < 4$ (che è ovviamente il caso sperimentalmente importante nei sistemi considerati dalla meccanica statistica), quando il sistema si avvicina al punto critico la lunghezza di correlazione cresce sempre fino a un valore in cui il criterio di Ginzburg è violato, quindi per $d < 4$ la descrizione del comportamento critico data dall'approssimazione del campo medio non è corretta. Ciò non toglie che per molti sistemi (compresi i superconduttori di cui ci occuperemo in seguito) la costante c è molto grande, per cui questa descrizione è accurata anche in prossimità di T_c .

Lo strumento adatto per studiare il comportamento critico dei sistemi a $d < 4$ è il gruppo di rinormalizzazione, che ora applicheremo al modello di Landau-Ginzburg.

Il minimo numero di dimensioni d necessarie affinché l'approssimazione di campo medio descriva correttamente il comportamento critico di un sistema è noto come *dimensione critica superiore*. Dunque il modello di Ising (e quindi anche

il modello di L-G con accoppiamento quartico) ha dimensione critica superiore $d = 4$.

Esercizio: verificare che la dimensione critica superiore in una teoria di LG contenente un'interazione cubica del tipo $v\phi^3$ è $d = 6$.

2.2 I punti fissi del modello di Landau-Ginzburg

Conviene sempre supporre che le costanti di accoppiamento t, u e h del modello di L-G siano adimensionali. Allora il passo reticolare a compare esplicitamente nell'Hamiltoniana H_{LG} . Supponendo, in accordo col paragrafo precedente, che nel limite continuo il campo scalare ϕ abbia dimensione $[\phi] = -x_\phi$, con $x_\phi = \frac{d-2}{2}$, l'integrale funzionale del modello di L-G assume la forma $Z = \int \mathcal{D}\phi \exp -H$ con

$$H = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + a^{-2} \frac{t}{2} \phi^2 + \frac{u}{4!} a^{d-4} \phi^4 + h a^{-d/2-1} \phi \right]. \quad (2.2.1)$$

Il passo reticolare compare non solo nell'Hamiltoniana ma, in maniera implicita, anche nella somma sulle configurazioni o integrazione funzionale¹. Quindi l'effetto sulle costanti di accoppiamento di una trasformazione del gruppo di rinormalizzazione che cambia il passo reticolare da a a $a' = sa$ (e naturalmente lascia invariante Z) sarà la somma dei contributi dovuti alla variazione di a in H_{LG} (il cui risultato è immediatamente calcolabile) e alla variazione implicita in $\mathcal{D}\phi$, che richiederà qualche strumento tecnico in più. Vediamo intanto il primo contributo. Se $a \rightarrow sa$, anche le costanti di accoppiamento devono variare in modo da lasciare l'Hamiltoniana invariante. Si ha allora

$$h' = s^{d/2+1} h, \quad r'_0 = s^2 t, \quad u' = s^{4-d} u, \quad (2.2.2)$$

che ha come punto fisso $h = t = u = 0$ che corrisponde all'hamiltoniana di punto fisso con il solo termine cinetico

$$\mathcal{H}^* = \frac{1}{2} \int d^d x (\nabla\phi)^2 \quad (2.2.3)$$

ed è perciò detto *punto fisso gaussiano*. Rispetto a questo punto h e t sono accoppiamenti (o scaling variables) rilevanti (come sapevamo già dalle proprietà generali

¹in un reticolo di volume fissato il numero dei nodi (e quindi delle integrazioni) dipende dal passo reticolare.

del gruppo di rinormalizzazione (RG)). Gi autovalori termico e magnetico sono rispettivamente (come si legge dall'eq.(2.2.2)) $y_t = 2$ e $y_h = 1 + d/2$. A partire da questi autovalori possiamo calcolarci attraverso le note formule gli esponenti critici e costruire la seguente tabella che mette a confronto questi esponenti con quelli calcolati nell'approssimazione di campo medio

	α	β	γ	δ	η	ν
campo medio	0	$\frac{1}{2}$	1	3	0	$\frac{1}{2}$
punto fisso gauss.	$2 - \frac{d}{2}$	$\frac{d-2}{4}$	1	$\frac{d+2}{d-2}$	0	$\frac{1}{2}$

C'è perfetto accordo solo per $d = 4$. Per $d > 4$ l'approssimazione di campo medio dà un comportamento critico più singolare rispetto a quello previsto dal punto fisso gaussiano. Una delle ragioni è che, pur essendo u in questa regione irrilevante ($y_u = 4 - d$), non può essere posto uguale a 0, come vorrebbe il flusso del RG del punto gaussiano, perchè, come si è già visto, la magnetizzazione spontanea contiene u a denominatore: $\langle \phi \rangle = \phi_0 = \sqrt{-\frac{6t}{u}}$. Accoppiamenti di questo tipo si dicono *pericolosamente* irrilevanti. Per $d < 4$ u diventa un ulteriore accoppiamento rilevante, quindi il punto fisso gaussiano non può descrivere il comportamento critico a $d < 4$ di un sistema magnetico, dove sappiamo che gli accoppiamenti rilevanti sono solo h e t^2 .

Esercizio: Mostrare che in prossimità del punto fisso gaussiano il termine cinetico $(\nabla\phi)^2 \equiv (\sum_{\mu} \frac{\phi(x+a_{\mu}) - \phi(x)}{a_{\mu}})^2$ tende, per effetto del gruppo di rinormalizzazione, al limite continuo $\partial_{\mu}\phi(x)\partial^{\mu}\phi(x)$.

(Suggerimento: sviluppare in serie di Taylor $\phi(x + a_{\mu})$ e mostrare che tutti i termini che contengono derivate superiori alla prima sono irrilevanti.)

²Infatti gli operatori rilevanti controllano l'effettiva distanza del sistema dal punto critico, d'altra parte la funzione di partizione del modello di Ising o di un generico modello magnetico è solo funzione della temperatura e del campo magnetico.

2.3 Il teorema di Wick

Vediamo ora alcune proprietà generali del modello gaussiano. Abbiamo più volte usato il noto risultato

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-\frac{A}{2}\phi^2+B\phi} = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{\frac{1}{2A}B^2},$$

che può anche essere riscritto nella forma

$$\langle e^{B\phi} \rangle = e^{\frac{1}{2A}B^2},$$

dove la media è fatta rispetto alla misura gaussiana con $B = 0$. È immediato estendere il risultato al caso di N variabili ϕ_x ($x = 1, \dots, N$) e al caso dell'integrazione funzionale con un'Hamiltoniana gaussiana molto generale della forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{x,y} \phi_x A_{xy} \phi_y = \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \phi(x) A(x,y) \phi(y),$$

dove A_{xy} è una qualunque matrice invertibile. Si ottiene

$$\langle e^{\sum_x B_x \phi_x} \rangle = e^{\frac{1}{2} \sum_{x,y} B_x A_{xy}^{-1} B_y}, \quad (2.3.1)$$

dove A^{-1} è la matrice inversa : $A A^{-1} = 1$. Confrontando questa formula con l'eq.(2.1.3) si constata che A_{xy}^{-1} altro non è che il correlatore G_{xy} , ma verifichiamo il fatto direttamente:

$$G_{xy} = \langle \phi_x \phi_y \rangle_{B=0} = \frac{\delta^2}{\delta B_x \delta B_y} \log Z|_{B=0} = \frac{\delta^2}{\delta B_x \delta B_y} \langle e^{\sum_x B_x \phi_x} \rangle|_{B=0} = A_{xy}^{-1};$$

possiamo quindi riscrivere l'eq.(2.3.1) nella forma seguente

$$\langle e^{\sum_x B_x \phi_x} \rangle = e^{\frac{1}{2} \sum_{x,y} B_x \langle \phi_x \phi_y \rangle B_y}. \quad (2.3.2)$$

L'identità (2.3.2) può essere utilizzata anche per calcolare il valore di aspettazione del prodotto di un numero arbitrario di campi ³

$$\langle \phi_{x_1} \phi_{x_2} \dots \phi_{x_{2n}} \rangle_{B=0} = \frac{\delta^{2n}}{\delta B_{x_1} \delta B_{x_2} \dots} e^{\frac{1}{2} \sum_{x,y} B_x A_{xy}^{-1} B_y} |_{B=0}.$$

³Naturalmente se il numero di campi è dispari il correlatore è zero se $B=0$.

È chiaro che ogni qual volta $\frac{\delta}{\delta B_x}$ agisce sull'esponenziale abbassa un fattore $A_{xy}^{-1}B_y$, quindi la metà delle variazioni devono agire su questi fattori, al fine di ottenere un risultato $\neq 0$ quando si pone $B = 0$. Ne segue che questo valore di aspettazione deve essere la somma di tutti prodotti di correlatori che si ottengono accoppiando (o *contraendo*, come si dice in teoria dei campi) in tutte le maniere possibili i campi ϕ_{x_i} cioè

$$\langle \phi_{x_1} \phi_{x_2} \cdots \phi_{x_{2n}} \rangle_{B=0} = \sum_{\{\alpha_i\}} G_{\alpha_1 \alpha_2} G_{\alpha_3 \alpha_4} \cdots G_{\alpha_{2n-1} \alpha_{2n}}, \quad (2.3.3)$$

dove la somma è fatta sulle permutazioni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ degli indici che danno contrazioni distinte. L'eq.(2.3.3) costituisce il teorema di Wick, che è uno strumento indispensabile in teoria dei campi.

Esercizio: Verificare l'identità seguente applicando il teorema di Wick

$$\langle \phi_{x_1} \phi_{x_2} \phi_{x_3} \phi_{x_4} \rangle = G_{x_1 x_2} G_{x_3 x_4} + G_{x_1 x_3} G_{x_2 x_4} + G_{x_1 x_4} G_{x_2 x_3}.$$

2.4 OPE

In prossimità di un punto critico l'Hamiltoniana assume la forma

$$H = \mathcal{H}^* + \sum_i g_i \sum_x \phi_i(x) a^{x_i}, \quad (2.4.1)$$

dove \mathcal{H}^* è l'Hamiltoniana del punto fisso, le costanti adimensionali g_i sono le variabili di scala (cioè quelle combinazioni lineari delle costanti di accoppiamento che si trasformano con un fattore di scala per effetto di una trasformazione del gruppo di rinormalizzazione) e gli operatori $\phi_i(x)$ sono i corrispondenti operatori di scala o *scaling operators* ed hanno dimensione di una (lunghezza) $^{-x_i}$. Il passo reticolare a entra esplicitamente nell'eq. (2.4.1) per ragioni dimensionali. Gli scaling operators hanno funzioni di correlazione che sono delle pure potenze. In particolare

$$\langle \phi_i(x) \phi_i(y) \rangle = \frac{c}{|x - y|^{2x_i}}.$$

Consideriamo ora dei correlatori più generali, della forma

$$\langle \phi_i(x) \phi_j(y) \Phi \rangle,$$

dove Φ rappresenta un prodotto arbitrario di operatori di scala situati in punti molto distanti dai due punti x e y . Sotto condizioni molto generali si dimostra (o

in qualche caso si congettura) che si può rimpiazzare il prodotto dei due operatori ϕ_i e ϕ_j con una combinazione lineare di operatori di scaling i cui coefficienti sono opportune potenze della distanza $|x - y|$, cioè

$$\langle \phi_i(x) \phi_j(y) \Phi \rangle = \sum_k C_{ijk}(x - y) \langle \phi_k(\frac{x + y}{2}) \Phi \rangle ,$$

dove, per ragioni dimensionali, si ha

$$C_{ijk}(x) = \frac{c_{ijk}}{|x|^{x_i + x_j - x_k}}$$

e i coefficienti c_{ijk} sono numeri puri. È importante osservare che le funzioni $C_{ijk}(x)$ non dipendono dagli operatori Φ , quindi si può scrivere

$$\phi_i(x) \phi_j(y) = \sum_k C_{ijk}(x - y) \phi_k(\frac{x + y}{2}) , \quad (2.4.2)$$

dove il segno di uguaglianza va inteso in *sensu debole*, cioè vale quando è inserita in un valore di aspettazione del tipo $\langle \dots \Phi \rangle$. L'eq. (2.4.2) è detta sviluppo del prodotto operatoriale o *operator product expansion* (OPE). Vedremo che nei rapporti dei coefficienti c_{ijk} (di solito numeri razionali) sono codificate molte proprietà universali del comportamento del sistema attorno al punto critico. Per mettere in luce questo particolare aspetto dell'OPE si suole riscriverla nella forma più schematica

$$\phi_i \times \phi_j = \sum_k c_{ijk} \phi_k , \quad (2.4.3)$$

nota come *algebra di fusione* degli operatori.

Vediamo ora come si determina l'OPE nel caso semplice, ma particolarmente importante, del punto fisso gaussiano. È chiaro dalle eq.(2.2.1) e (2.2.3) che il modello di LG in prossimità del punto critico ha proprio la forma (2.4.1) in cui gli scaling operators sono potenze del campo scalare $\phi(x)$. In particolare il campo stesso è associato alla perturbazione magnetica del sistema (legata alla variabile di scala h), $\phi(x)^2$ è la perturbazione termica (corrispondente alla variabile di scala t) e $\phi(x)^4$ è associato alla variabile di scala u . Essendo

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \frac{1}{|x - y|^{d-2}}$$

divergente per $x \rightarrow y$, gli operatori $\phi(x)^n$ non sono ben definiti: conviene applicare il cosiddetto *point-splitting method*, che consiste nel rimpiazzarli con

$$\phi(x)^n \rightarrow \phi(x + \varepsilon_1) \phi(x + \varepsilon_2) \dots \phi(x + \varepsilon_n) ,$$

dove $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sono degli spostamenti infinitesimi. Le proprietà fisiche del sistema non dipendono da ε_i .

Nel caso del punto fisso gaussiano l'OPE è una diretta conseguenza del teorema di Wick. Per esempio, indicando con una linea la contrazione di due campi, si ha, per l'OPE del prodotto $\phi(x) \phi^2(y)$,

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x) \phi^2(y) \Phi \rangle \rightarrow \langle \phi(x) \phi(y - \varepsilon) \phi(y + \varepsilon) \Phi \rangle = \\ & = \langle \underbrace{\phi(x)} \phi(y - \varepsilon) \underbrace{\phi(y + \varepsilon)} + \underbrace{\phi(x) \phi(y - \varepsilon)} \underbrace{\phi(y + \varepsilon)} + \underbrace{\phi(x) \phi(y - \varepsilon) \phi(y + \varepsilon)} \Phi \rangle \\ & + \langle \underbrace{\phi(x) \phi(y - \varepsilon) \phi(y + \varepsilon)} \Phi \rangle \end{aligned}$$

che dà origine alla seguente legge di fusione

$$\phi \times \phi^2 = 3\phi + \phi^3 .$$

Dovendo applicare queste tecniche di calcolo al gruppo di rinormalizzazione, che studia l'effetto di un riscaldamento delle distanze fisiche in gioco $x \rightarrow sx$, $y \rightarrow sy$, è chiaro che gli splitting ε_i non devono giocare nessun ruolo in questo riscaldamento. Conviene allora cambiare la base degli scaling operators ridefinendo gli operatori in modo da sottrarre le parti non connesse: $\phi_1(x) = \phi(x) - \langle \phi \rangle$, $\phi_2(x) = \phi^2(x) - \langle \phi^2 \rangle$, ecc.. È facile verificare che in questa nuova base le regole di contrazione sono modificate dall'ulteriore regola di trascurare le contrazioni di operatori che derivano dallo splitting di un singolo punto. Quindi nell'esempio precedente si trascura il terzo termine e la regola di fusione diventa

$$\phi_1 \times \phi_2 = 2\phi_1 + \phi_3 . \quad (2.4.4)$$

Analogamente è facile verificare che

$$\phi_1 \times \phi_1 = 1 + \phi_2 \quad (2.4.5)$$

$$\phi_1 \times \phi_4 = 4\phi_3 + \dots \quad (2.4.6)$$

$$\phi_2 \times \phi_2 = 2 + 4\phi_2 + \phi_4 \quad (2.4.7)$$

$$\phi_2 \times \phi_4 = 12\phi_2 + 8\phi_4 + \dots \quad (2.4.8)$$

$$\phi_4 \times \phi_4 = 24 + 96\phi_2 + 72\phi_4 + \dots \quad (2.4.9)$$

I puntini stanno ad indicare operatori di grado superiore al quarto.

2.5 Le equazioni del gruppo di rinormalizzazione

In prossimità del punto fisso, utilizzando la (2.4.1), si vede subito che la funzione di partizione assume la forma

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{conf.} e^{-H} = \sum_{conf.} e^{-\mathcal{H}^*} \left(1 - \sum_i g_i \int \frac{d^d x}{a^d} \phi_i(x) a^{x_i} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{ij} g_i g_j \int \int \frac{d^d x d^d y}{a^{2d}} \phi_i(x) \phi_j(y) a^{x_i+x_j} + \dots \right) = \quad (2.5.1) \\ &= Z_o \left\{ 1 - \sum_i g_i \int \frac{d^d x}{a^d} \left(\langle \phi_i \rangle a^{x_i} - \frac{1}{2} \sum_j g_j \int \frac{d^d y}{a^d} \langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle a^{x_i+x_j} + \dots \right) \right\} \end{aligned}$$

La funzione integranda $\langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle$, che può essere rimpiazzata dal suo sviluppo operatoriale (2.4.2), è divergente per $x \rightarrow y$ (questa è una tipica divergenza ultravioletta della teoria quantistica dei campi). Nella formulazione su reticolo questa divergenza non c'è, perchè la distanza minima tra i campi in gioco è data dal passo reticolare a . La relazione precedente appare divergente semplicemente perchè abbiamo rimpiazzato la somma sui nodi del reticolo con un integrale. Tuttavia conviene continuare ad utilizzare la notazione continua e regolarizzare l'integrale limitando l'integrazione multipla alla regione $|x - y| > a$. Questo non cambia il risultato finale ma rende più spediti i calcoli.

Applichiamo ora una RGT infinitesima che cambi il passo reticolare (= UV cut-off) di un fattore $s : a \rightarrow s a = (1 + \delta t)a$ e chiediamoci come devono cambiare le costanti di accoppiamento g_i affinchè Z rimanga invariata. È da notare che la dipendenza da a compare sia esplicitamente nell'Hamiltoniana sia nel dominio

di integrazione per il fatto che $|x - y| > a$. La prima dipendenza dà, come si è già visto nel caso del modello di LG,

$$g_i \rightarrow g'_i = s^{d-x_i} g_i \simeq g_i + (d - x_i) g_i \delta t. \quad (2.5.2)$$

La variazione di a nel dominio d'integrazione contribuisce ai termini di second'ordine nelle costanti di accoppiamento. Ponendo

$$\int \int_{|x-y|>sa} = \int \int_{|x-y|>a} - \int \int_{a>|x-y|>(1+\delta t)a},$$

il primo integrale ridà il termine di partenza in Z . Il secondo integrale si può valutare esplicitamente utilizzando l'OPE e passando alle variabili di integrazione $u = x - y$ e $z = \frac{x+y}{2}$:

$$\begin{aligned} g_i g_j \int \int_{a>|x-y|>sa} \frac{d^d x d^d y}{a^{2d}} \frac{\frac{1}{2} c_{ijk} \langle \phi_k \rangle a^{x_i+x_j}}{|x-y|^{x_i+x_j-x_k}} \\ = g_i g_j \frac{c_{ijk}}{2} \int \frac{d^d z}{a^d} \langle \phi_k \rangle a^{x_k} \Omega_d \delta t + O(\delta t^2), \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

dove $\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ è l'angolo solido in d dimensioni. Questo termine può essere riassorbito da una corrispondente variazione di g_k :

$$g_k \rightarrow g'_k = g_k - \frac{1}{2} \Omega_d \sum_{ij} c_{ijk} g_i g_j \delta t \quad (2.5.4)$$

Combinando assieme le (2.5.2) e (2.5.4) si ha

$$\frac{dg_k}{dt} \equiv s \frac{d}{ds} g_k = (d - x_k) g_k - \frac{1}{2} \Omega_d \sum_{ij} c_{ijk} g_i g_j$$

Moltiplicando tutte le costanti di accoppiamento per il fattore $\frac{1}{2} \Omega_d$ in definitiva si ha

$$\boxed{s \frac{d}{ds} g_k = (d - x_k) g_k - \sum_{ij} c_{ijk} g_i g_j + O(g_l^3)}$$

che è la forma standard delle equazioni del gruppo di rinormalizzazione al secondo ordine perturbativo.

2.5.1 Il punto fisso di Wilson-Fisher

Possiamo applicare le equazioni del gruppo di rinormalizzazione testè ottenute al modello di LG (2.2.1) utilizzando l'algebra di fusione (2.4.4-2.4.9) e ponendo, per semplicità di notazione, $t = \frac{t}{2}$ (che può essere identificata con la temperatura ridotta) e $u = u/4!$. Si ha, trascurando i termini del terz'ordine,

$$s \frac{d}{ds} h = \frac{d+2}{2} h - 4ht + \dots \quad (2.5.5)$$

$$s \frac{d}{ds} t = 2t - h^2 - 4t^2 - 24tu - 96u^2 + \dots \quad (2.5.6)$$

$$s \frac{d}{ds} u = \epsilon u - t^2 - 16tu - 72u^2 + \dots \quad (2.5.7)$$

dove $\epsilon = 4-d$. Cerchiamo ora di vedere se, all'ordine perturbativo considerato, ci sono altri punti fissi oltre a quello gaussiano ($h = t = u = 0$), cercando ulteriori zeri dei secondi membri di queste equazioni. La prima dà $h \simeq 0$ ⁴. La seconda dà, per successive iterazioni,

$$t = 48u^2 + 12ut + O(t^2) = 48u^2 + 12u(48u^2 + 12u(48u^2 + \dots) = O(u^2).$$

Inserendo questo risultato nella terza equazione si ottiene, se ϵ è piccolo, $u^* = \frac{\epsilon}{72}$. C'è dunque un nuovo punto fisso a

$$h = 0, \quad t = O(\epsilon^2), \quad u^* = \frac{\epsilon}{72}$$

Sviluppando le ultime due equazioni attorno a questo nuovo punto fisso, noto come *punto fisso di Wilson-Fisher*, si ha, ponendo $u = u^* + \delta u$ e sviluppando al prim'ordine in δu e t ,

$$s \frac{d}{ds} t = 2t - 24u^* t + \dots = \left(2 - \frac{\epsilon}{3}\right) t + \dots \quad (2.5.8)$$

$$s \frac{d}{ds} u = -\epsilon \delta u + \dots, \quad (2.5.9)$$

il che ci permette di concludere che per $d < 4$ u è un accoppiamento irrilevante per il nuovo punto fisso, che dunque controlla, in base alla discussione del §2.2, il comportamento a grande distanza del sistema critico per $d < 4$. Inoltre

⁴L'altra soluzione, $t = \frac{d+2}{2}$, ovviamente non è nel range perturbativo considerato.

dalla (2.5.8) si legge l'autovalore termico y_t e quindi anche l'indice critico della lunghezza di correlazione $\nu = 1/y_t$ che dunque è

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2).$$

Questa relazione è il primo termine di uno sviluppo perturbativo in ϵ (noto come ϵ -expansion) che costituisce un metodo sistematico e molto potente per calcolare gli indici critici. È stato calcolato finora lo sviluppo fino al quinto ordine. Ecco il risultato per $D = 2$ e $D = 3$ per l'indice ν

D	ϵ -expansion	migliore stima
2	0.99 ± 0.04	1 (esatto)
3	0.6305 ± 0.0025	0.6330 ± 0.0013

Esercizio: Dimostrare che la costante di accoppiamento del termine ϕ^6 in $4 - \epsilon$ dimensioni è irrilevante (al I ordine in ϵ) non solo rispetto al punto fisso gaussiano, ma anche rispetto a quello di Wilson-Fisher.

2.5.2 Operatori ridondanti

Dall'analisi dell'algebra di fusione dei campi gaussiani (2.4.9) si vede che al secondo ordine nelle costanti di accoppiamento si sviluppa nell'equazioni del gruppo di rinormalizzazione un termine di interazione ϕ^3 che non era presente nell'Hamiltoniana originaria di LG . È immediato verificare che questo operatore è rilevante per $D = 4$ dimensioni (vedere anche l'esercizio al § 2.1.4). Come mai questo termine è stato trascurato? il motivo è una conseguenza di un principio elementare ma importante nella teoria dei campi *quantistica* e in meccanica statistica: *I campi che compaiono nell'Hamiltoniana sono semplicemente delle variabili di integrazione*, quindi possono essere rimpiazzate da una trasformazione di variabili qualunque, detta field redefinition, purchè lo Jacobiano della trasformazione sia 1 e i limiti di integrazione nell'integrale funzionale siano gli stessi. È ora chiaro che possiamo eliminare nell'Hamiltoniana del tipo

$$H = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + h \phi + \frac{t}{2} \phi^2 + \frac{v}{3} \phi^3 + \frac{u}{4} \phi^4 \right] = \int d^d x \mathcal{H},$$

il termine ϕ^3 con una semplice traslazione del tipo $\phi \rightarrow \phi + \alpha$ dove α è una costante opportuna, ridefinendo le costanti di accoppiamento t e h .

Più in generale qualunque field redefinition comporta una ridefinizione e un riarrangiamento delle costanti di accoppiamento in gioco. Poichè queste ridefinizioni non cambiano la fisica del sistema descritto, ciò implica che nello spazio delle costanti di accoppiamento ci sono delle varietà generate dal gruppo di queste trasformazioni i cui punti descrivono lo stesso stato fisico. Per esempio, se nella trasformazione $\phi \rightarrow \phi + \alpha$ supponiamo che il parametro di traslazione sia infinitesimo, la variazione al prim'ordine in α della densità Hamiltoniana \mathcal{H} è $\delta\mathcal{H} = \alpha(h + t\phi(x) + v\phi^2(x) + u\phi^3(x))$ che corrisponde alla seguente ridefinizione delle costanti di accoppiamento:

$$h \rightarrow h + \alpha t, \quad t \rightarrow t + \alpha v, \quad v \rightarrow v + \alpha u.$$

Questa trasformazione infinitesima genera una curva (=varietà unidimensionale dipendente dal parametro α) lungo cui la fisica del sistema rimane costante. La tangente a questo tipo di curve è nota come variabile di scaling ridondante. Similmente l'operatore a cui si accoppia questa tangente (nel nostro caso $\delta\mathcal{H}$) è detto scaling operator *ridondante*.

2.5.3 Singolarità logaritmiche a D=4

Esattamente a D=4 l'equazione del gruppo di rinormalizzazione per u diventa, per $h = 0$ e $t = 0$,

$$\dot{u} = -72 u^2 \tag{2.5.10}$$

dove si è posto $\dot{u} = \frac{du}{d\ell}$ con $\ell = \log(s)$. Quet'equazione dice che u è *marginalmente irrilevante* rispetto al punto gaussiano, cioè va a zero molto lentamente. Questa proprietà genera delle caratteristiche singolarità logaritmiche nelle funzioni termodinamiche per tutti i punti critici che non sono punti fissi, cioè $t = h = 0$, ma $u > 0$. Per vederle spostiamoci leggermente sal punto critico considerando l'equazione

$$\dot{t} = 2t - 24 ut, \tag{2.5.11}$$

dove i termini trascurati sono inessenziali.

E' noto che la parte singolare della densità di energia libera soddisfa l'importante equazione funzionale

$$f(t, u) = s^{-d} f(t(s), u(s)),$$

da cui si ricavano tutte le leggi di scala delle funzioni termodinamiche. Scegliamo ora il parametro $\ell = \log(s)$ in modo che $t_o = t(s_o) = O(1)$ sia fuori dalla regione

critica. Qui si può usare l'approssimazione di campo medio (o di Landau) e porre

$$f(t_o, u(s_o)) = V(\varphi_o) = -\frac{t_o^2}{u(s_o)}.$$

Perciò

$$f(t, u) = -\frac{t_o^2}{s_o^4 u(s_o)}.$$

Bisogna ora esprimere s_o e $u(s_o)$ come funzioni di u e t . L'integrazione della (2.5.10) dà

$$u(s_o) = \frac{u}{1 + cl_o}$$

dove si è posto $c = 72u$ e $\ell_o = \log s_o$. Inserendo questa soluzione nella (2.5.11) si ottiene

$$\log \frac{t_o}{t} = 2\ell_o - \frac{1}{3} \log(1 + cl_o).$$

Questa equazione trascendente si può risolvere iterativamente, tenendo conto che $\frac{t_o}{t}$ si può prendere grande a piacere (perchè?). Si ha

$$2\ell_o = \log \frac{t_o}{t} + \frac{1}{3} \log\left(1 + \frac{c}{2} \log \frac{t_o}{t}\right) + \dots$$

Inserendo questo nell'espressione trovata per $f(t, u)$ si ha

$$f(t, u) \propto -t^2 \left(1 + \frac{c}{2} \log \frac{t_o}{t}\right)^{\frac{1}{3}}$$

e quindi il calore specifico è

$$C = -\frac{d^2}{dt^2} f(t, u) \simeq |\log(t/t_o)|^{\frac{1}{3}}.$$

Dunque ha una singolarità logaritmica. È da notare che questa singolarità è presente solo se $u = \frac{c}{72} \neq 0$, cioè solo se il punto critico non coincide con il punto fisso.

Queste singolarità logaritmiche hanno lo stesso carattere di universalità degli indici critici e sono segnali tipici delle dimensioni critiche superiori.

Chapter 3

Sistemi quantistici

3.1 Integrali di cammino in meccanica quantistica

Siano P e Q gli operatori impulso e posizione di una particella di massa m soggetta a un potenziale $V = V(Q)$ Hamiltoniana:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(Q), [Q, P] = i\hbar$$

Nella rappresentazione di Heisenberg si ha $Q(t) = e^{-it\frac{H}{\hbar}} Q e^{it\frac{H}{\hbar}}$. Sia $|q, t\rangle$ un autostato dell'operatore posizione all'istante t ; $\Rightarrow Q|q\rangle = q|q\rangle, |q, t\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|q\rangle$. Si usa la normalizzazione standard $\langle q', t|q, t\rangle = \delta(q' - q)$. Analogamente $|p\rangle =$ autostato di P , $\langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{qp}{\hbar}}, \int dp|p\rangle\langle p| = 1$.

Problema: calcolare l'ampiezza di probabilit  $\langle q', t'|q, t\rangle$

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \langle q'|e^{\frac{iH(t'-t)}{\hbar}}|q\rangle$$

Poniamo per il momento $\hbar = 1$, supponiamo $\Delta t = t' - t \ll 1$ e trascuriamo i termini di ordine $(\Delta t)^2$. Si ha allora $e^{iH\Delta t} \equiv e^{i(\frac{P^2}{2m} + V(Q))\Delta t} = e^{i\frac{P^2}{2m}\Delta t} e^{iV(Q)\Delta t} (1 + O[(\Delta t)^2])^1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle q', t'|q, t\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle q'|e^{i\frac{p^2}{2m}\Delta t}|p\rangle \langle p|e^{iV(q)\Delta t}|q\rangle + O(\Delta t^2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle q'|e^{i\frac{p^2}{2m}\Delta t}|p\rangle \langle p|e^{iV(q)\Delta t}|q\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-i(q'-q)p + \frac{ip^2}{2m}\Delta t} e^{iV(q)\Delta t} \end{aligned}$$

¹Si e usata la proprieta' $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$

Posto $\epsilon = \frac{-i\Delta t}{2m}$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-i(q'-q)p - \epsilon p^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\left[p\sqrt{\epsilon} - \frac{i(q'-q)}{2\sqrt{\epsilon}}\right]^2 - \frac{(q'-q)^2}{4\epsilon}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{i(q'-q)^2 m}{2\Delta t}}}{\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = e^{-\frac{i(q'-q)^2 m}{2\Delta t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{-i\Delta t}{2m}}} = \frac{e^{-\frac{i(q'-q)^2 m}{2\Delta t}}}{\sqrt{\frac{-i2\pi\Delta t}{m}}} \end{aligned}$$

quindi

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \sqrt{\frac{im}{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{i(\Delta q)^2 m}{2\Delta t} + iV(q)\Delta t} + O(\Delta t^2).$$

Se $(\Delta t)^2$ non e' trascurabile, dividiamo l'intervallo $t' - t$ in un numero N sufficientemente grande di intervalli uguali $t = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_N = t'$ e poniamo $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Si ha l'ovvia identita'

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \langle q', t' | \int dq_{N-1} |q_{N-1}, t_{N-1}\rangle \langle t_{N-1}, q_{N-1} | \dots \int dq_1 |q_1, t_1\rangle \langle t_1, q_1 | q, t \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N-1} dq_i \sqrt{\frac{im}{2\pi\Delta t}} e^{-i\sum_{j=1}^N [(\Delta q_j)^2 \frac{m}{2\Delta t} - V(q_j)\Delta t]} + O(\Delta t^2), \end{aligned}$$

dove si e' potuto scrivere un unico esponenziale perche' gli esponenti non sono piu' operatori ma numeri. Nel limite $\Delta t \rightarrow 0$ l'esponente diventa l'integrale seguente

$$\sum_{j=1}^N \left[\frac{(\Delta q_j)^2 m}{2\Delta t} - V(q_j)\Delta t \right] \rightarrow \int_t^{t'} dt \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right) = S[q, \dot{q}],$$

dove il funzionale $S[q, \dot{q}]$ denota l'azione del punto materiale in esame.

In definitiva, reintroducendo la costante di Planck, si ha

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int \prod_1^N dq_j \sqrt{\frac{im}{2\pi\Delta t}} e^{\frac{-i}{\hbar} S[\dot{q}, q]} \equiv \int \mathcal{D}q e^{\frac{-iS}{\hbar}}, \quad (3.1.1)$$

che esprime l'ampiezza di probabilita' mediante un integrale di cammino: l'ampiezza di probabilita' $\langle q', t' | q, t \rangle$ e' la somma dei contributi dei cammini che partono all'istante t da q e raggiungono all'istante t' la posizione q' ; ogni cammino $q(t)$ contribuisce con un "peso" $e^{\frac{-iS[\dot{q}, q]}{\hbar}}$.

Il massimo contributo e' dato dalla traiettoria classica, cioe' quella che minimizza l'azione: $\delta S = 0$. Per i cammini molto diversi della traiettoria classica, una piccola variazione del cammino provoca una grande variazione di S e quindi una rapida oscillazione di $e^{-iS/\hbar}$; viceversa i cammini vicini alla traiettoria classica, cioe' tali che $|S - S_{cl}| \leq \hbar$, danno il contributo dominante. In molti casi si puo' tenere conto di queste fluttuazioni quantistiche sviluppando in serie di potenze di \hbar : il termine di ordine 0 e' dato dalla traiettoria classica.

Il modello ora descritto si puo' ovviamente generalizzare a traiettorie in uno spazio di dimensioni qualsiasi $q_i(t)$, $i = 1 \dots D$. Vedremo tra poco un altro tipo di generalizzazione non piu' di un modello di meccanica quantistica, ma uno di teoria dei campi.

Il limite $N \rightarrow \infty$ nell'integrale di cammino $\prod_j dq_j e^{-iS/\hbar}$ non e' matematicamente ben definito, perchè è difficile caratterizzare topologicamente il fattore oscillante $e^{-i\frac{S}{\hbar}}$. Si ricorre allora a una continuazione analitica a tempi immaginari $t \rightarrow i\tau$.

Con questa continuazione analitica il fattore di fase diventa reale, il che consente di porre il *path integral* in una forma matematicamente rigorosa, che Wiener aveva sviluppato nei primi anni '40 per descrivere il moto browniano. Qui ci contenteremo di vedere le modificazioni subite dall'azione S per effetto della sostituzione

$$t \rightarrow i\tau \Rightarrow dt \rightarrow id\tau, \dot{q} \equiv \frac{dq}{dt} = -i \frac{dq}{d\tau}, \dot{q}^2 = - \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2$$

$$\Rightarrow -i \int_t^{t'} \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right) dt = - \int_\tau^{\tau'} \left[\left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \frac{m}{2} + V(q) \right] d\tau = -S_E$$

S_E e' detta "azione euclidea" e la rappresentazione di $\langle q', t' | q, t \rangle$ mediante integrali di cammino diventa

$$\langle q', \tau | q, \tau \rangle = \int \mathcal{D}q e^{-\frac{S_E[q, q]}{\hbar}} \tag{3.1.2}$$

che ha la stessa forma della funzione di partizione di un sistema di meccanica statistica unidimensionale con le sostituzioni $H \leftrightarrow S_E$ e $\kappa T \leftrightarrow \hbar$.

Vediamo ora qualche proprieta' generale dei cammini che contribuiscono maggiormente all'integrale di cammino (3.1.1). L'analisi diventa particolarmente semplice se poniamo $V(q) = 0$ (modello gaussiano). Riscriviamo la (3.1.1) in forma discreta²

² Δt e' in realta' $\Delta\tau$ in questa descrizione euclidea

$$\int \prod_1^N dq_i \alpha_i e^{-\frac{\sum_j m(q_{j+1}-q_j)^2}{2\hbar\Delta t}}, \quad \alpha_i = \sqrt{\frac{m}{2\pi\Delta t}} \quad (3.1.3)$$

e calcoliamoci il valor medio

$$\langle (q_{j+1} - q_j)^2 \rangle \equiv \frac{\int \prod_1^N dq_i \alpha_i (q_{j+1} - q_j)^2 e^{-\frac{S_E}{\hbar}}}{\langle q', \tau' | q, \tau \rangle}$$

Poiche' tutti gli integrali sono gaussiani, si ha $\langle (q_{j+1} - q_j)^2 \rangle = c \frac{2\hbar\Delta t}{m}$, dove c e' una costante numerica opportuna³ In altri termini $\langle (q_{j+1} - q_j)^2 \rangle \propto \Delta t \Rightarrow$ I cammini che contribuiscono all'integrale (3.1.1) sono in media continui (perche' $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow q_{j+1} \rightarrow q_j$), ma non differenziabili (perche' $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (q_{j+1}-q_j)^2 \rangle}{\Delta t^2} \propto \frac{1}{\Delta t}$ non e' finito). Si puo' infatti dimostrare che i cammini differenziabili formano un sottoinsieme di misura nulla nello spazio dei cammini che contribuiscono al path integral (3.1.1). Si potrebbe inoltre far vedere che il set di cammini che contribuiscono maggiormente all'integrale in questione coincide con il set delle traiettorie di una particella soggetta al moto browniano.

E' da notare che una proprieta' caratteristica del moto browniano e', come vedremo, che la distanza media percorsa da una particella in un tempo Δt e' proporzionale a $\sqrt{\Delta t}$ e parallelamente dalla (3.1.3) si ricava, con la stessa procedura usata per $(q_{j+1} - q_j)^2$, che

$$\langle (q_j - q_k)^2 \rangle \propto \Delta t, \quad \forall j \text{ e } k \in 1, 2 \dots N$$

In altri termini, la distanza media tra due punti qualsiasi della traiettoria e' proporzionale alla radice quadrata della scala dei tempi. Questa non e' una proprieta' delle usuali curve continue, ma piuttosto delle strutture frattali.

3.2 La mappa tra MS e QFT

Torniamo ora all'eq. (3.1.1):

$$\langle q', \tau' | q, \tau \rangle = \int \mathcal{D}q e^{-\int_{\tau'}^{\tau} [(dq/d\tau)^2 \frac{m}{2} + V(q)] d\tau / \hbar} \quad (3.2.1)$$

Ponendo $\phi(\tau) = \sqrt{m} q(\tau)$ la (3.2.1) e', con un'opportuna scelta di $V(q)$, nient'altro che il modello di Landau-Ginzburg in una dimensione: basta porre $V(q) = \frac{t}{2}\phi^2 +$

³ $c = \int \prod_1^N dx_i \alpha_i (x_{j+1} - x_j)^2 e^{-\sum_k (x_{k+1} - x_k)^2} / \int \prod_1^N dx_i \alpha_i e^{-\sum_k (x_{k+1} - x_k)^2}$

$\frac{u}{4!}\phi^4$. Gli stati iniziale e finale $|q, \tau\rangle$ e $|q', \tau'\rangle$ individuano le condizioni al contorno del segmento $[\tau', \tau]$ dove è definita la teoria. Il limite termodinamico si ottiene ponendo $\tau \rightarrow -\infty$ e $\tau' \rightarrow +\infty$. È utile anche considerare condizioni al contorno periodiche, che comportano la somma su tutte le traiettorie chiuse: a tal fine basta porre nella (3.2.1) $q = q'$ e integrare ancora su q . In questo caso la corrispondente teoria euclidea sul reticolo unidimensionale è invariante per traslazioni multiple del passo reticolare $\Delta\tau$.

Ritornando al formalismo operatoriale e al tempo reale si ha

$$\int dq \langle q, t' | q, t \rangle = \int dq \langle q | e^{i\frac{H(t'-t)}{\hbar}} | q \rangle \equiv \text{tr} e^{i\frac{H(t'-t)}{\hbar}}$$

È ora facile dimostrare, con la continuazione analitica nel tempo immaginario, che la densità f di energia libera tende, nel limite termodinamico, all'energia dello stato fondamentale. Infatti, identificando la f di partizione Z con $\text{tr} e^{-H\frac{\tau'-\tau}{\hbar}}$ e ponendo $Z = e^{-f\frac{\tau'-\tau}{\hbar}}$ dove f è la densità di energia libera (Energia libera per unità di volume, che è una costante perché il sistema è invariante per traslazioni) e introducendo un set completo di autostati dell'energia $\{|n\rangle\} : H|n\rangle = E_n|n\rangle$, si ha

$$\text{tr} e^{-H\frac{\tau'-\tau}{\hbar}} = \sum_n \langle n | e^{-E_n\frac{\tau'-\tau}{\hbar}} | n \rangle \rightarrow \langle 0 | e^{-E_0\frac{(\tau'-\tau)}{\hbar}} | 0 \rangle$$

$$f = E_0$$

c.v.d.

In teoria quantistica dei campi un ruolo importante è giocato dal prodotto cronologico o T -prodotto. Siano $A(t)$ e $B(t)$ due operatori dipendenti dal tempo t e definiamo il T -prodotto di A e B nel modo seguente

$$T(A(t_1)B(t_2)) = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & \text{se } t_1 > t_2 \\ B(t_2)A(t_1) & \text{se } t_1 < t_2 \end{cases}$$

È facile ottenere una rappresentazione con integrali di cammino del T -prodotto degli operatori di posizione:

$$\langle q', t' | T(Q(t_1)Q(t_2)) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q q(t_1)q(t_2) e^{-i\frac{S}{\hbar}}. \quad (3.2.2)$$

Infatti il ruolo del T -prodotto è proprio quello di far comparire gli operatori $Q(t_i)$ nella posizione giusta quando si suddivide l'intervallo $t' - t$ in N intervallini Δt .

L'equazione (3.2.2) mostra che il valore di attesa del T -prodotto corrisponde al correlatore nel linguaggio della meccanica statistica. Inoltre si dimostra con un ragionamento analogo a quello sull'energia libera, che il limite termodinamico della (3.2.2) coincide con il valore di attesa nel vuoto del T -prodotto, cioè

$$\lim_{t'-t \rightarrow \infty} \frac{\langle q', t' | q(t_1)q(t_2) | q, t \rangle}{\langle q', t' | q, t \rangle} = \langle 0 | T (Q(t_1)Q(t_2)) | 0 \rangle$$

Abbiamo usato come modello illustrativo un modello particolarmente semplice descritto da una sola coordinata lagrangiana $Q(t)$. In realtà il procedimento è di grande generalità. Per esempio in una teoria di campo scalare in d dimensioni spaziali, detto $|\phi, t\rangle$ lo stato che descrive una data configurazione iniziale $\phi(x_i, t)$ ($i = 1 \dots d$) e $|\phi', t'\rangle$ una conf. finale e $S[\phi]$ l'azione della teoria, si può dimostrare facilmente che vale la seguente rappresentazione di path integral

$$\langle \phi', t' | \phi, t \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-i\frac{S}{\hbar}}$$

dove $\mathcal{D}\phi$ è l'integrazione funzionale, o somma sulle configurazioni, come è stata definita per il modello di Landau-Ginzburg. L'integrazione funzionale è particolarmente semplice se la teoria è posta su un reticolo. La trascrizione su reticolo si può fare solo se $\xi \gg a$ ($a =$ passo reticolare) \Rightarrow le teorie quantistiche di campo nel limite continuo corrispondono a teorie su reticolo in prossimità di una transizione del II ordine. In conclusione, la rappresentazione di path integral delle ampiezze di transizione e la continuazione analitica a tempi immaginari (rotazione di Wick) consente di trascrivere ogni modello di meccanica quantistica o di teoria dei campi quantistica in un sistema di meccanica statistica classica. Possiamo stabilire il seguente dizionario tra le due formulazioni:

<i>teoria quantistica di campo</i>	<i>meccanica statistica classica</i>
integrazione funzionale	somma sulle configurazioni
d dimensioni spaziali	$D = d + 1$ dimensioni spaziali
Azione euclidea S_E	Hamiltoniana H
\hbar	κT
Ampiezza di transizione	Funzione di partizione
Valore di attesa nel vuoto del T -prodotto	Funzioni di correlazione
Energia dello stato fondamentale	Densità di energia libera
Massa della particella più leggera	Inverso della lunghezza di correlazione

3.2.1 Limite continuo

Nelle teorie quantistiche di campo il reticolo che abbiamo introdotto è semplicemente un artificio per dare un significato preciso all'integrazione funzionale, ma le proprietà fisiche non possono dipendere dal valore del passo reticolare a . Quindi questa procedura è giustificata solo se tutte le scale fisiche in gioco, quando sono espresse in unità di lunghezza, sono molto più grandi del passo reticolare. Dal punto di vista del corrispondente modello di meccanica statistica classica, questo equivale alla condizione che la lunghezza di correlazione ξ sia molto più grande del passo reticolare, il che corrisponde a richiedere che il sistema sia vicino a un punto critico. Quindi la vera corrispondenza stabilita è tra un sistema di teoria dei campi quantistica nel continuo e un corrispondente sistema statistico classico vicino al punto critico.

Il modello di Landau-Ginzburg è un buon esempio di questo tipo perchè descrive il comportamento di un sistema (ferromagnetico) in prossimità del punto critico dove $\xi \gg a$, per cui la struttura reticolare non gioca alcun ruolo. Per rendere più spedite le manipolazioni successive conviene usare la notazione del continuo, facendo formalmente il limite $a \rightarrow 0$:

$$\Rightarrow H_{GL}[\phi] \rightarrow \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi(x))^2 + \frac{1}{2} t \phi^2(x) + \frac{1}{4!} u \phi^4(x) \right]$$

In realtà questo è solo un limite formale, utile per semplificare la notazione, per rendere più agevole la condizione $\xi \gg a$. È da notare infatti che la definizione esatta di Z coinvolge, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, un'integrazione per ogni sito

$$Z = \int \prod_i d\phi_i e^{-H_{LG}(\phi)} .$$

Quindi, a rigore, non c'è nessuna condizione di continuità che legghi in qualche modo il valore di ϕ per due siti vicini (che giustificerebbe la sostituzione della differenza finita $\phi(x + \mu) - \phi(x)$ con la derivata $\partial_\mu \phi$). Formalmente si può porre

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^d x [\frac{1}{2} \sum_\mu (\nabla_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} t \phi^2 + \frac{1}{4!} u \phi^4]}$$

dove, in accordo col paragrafo precedente, si è introdotto il simbolo di integrazione funzionale $\mathcal{D}\phi = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{N}(a) \prod_i d\phi_i$. $\mathcal{N}(a)$ è un fattore di scala introdotto per rendere finito il limite; tuttavia il limite continuo è ben definito solo se è ben definita l'integrazione funzionale (come si è visto nel caso dello studio delle proprietà frattali degli integrali di cammino nel caso gaussiano). Lo strumento di elezione per studiare questo limite è il gruppo di rinormalizzazione.

3.2.2 Sistemi quantistici in equilibrio con un termostato

Un sistema quantistico in equilibrio con un termostato alla temperatura T è descritto dalla funzione di partizione

$$Z = \text{tr } e^{-\beta H} , \quad (3.2.3)$$

dove H è operatore Hamiltoniano che descrive il sistema e la traccia indica la somma su un set completo di stati.

Nel caso specifico di una particella materiale di massa m che si muove in un potenziale assegnato $V(Q)$ si ha $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$, $[Q, P] = i\hbar$, dove le notazioni sono le stesse di §3.1. Si ha

$$Z = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle .$$

Questa è un'espressione molto simile a quella studiata nell'introduzione degli integrali di cammino. Infatti avevamo trovato (vedi l'eq.(3.1.2)) che

$$\langle q', t' | q, t \rangle \equiv \langle q' | e^{\frac{iH(t'-t)}{\hbar}} | q \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{-i}{\hbar} \int_t^{t'} \mathcal{L}(\dot{q}, q) dt} \equiv \int \mathcal{D}q e^{\frac{-iS}{\hbar}} . \quad (3.2.4)$$

È dunque chiaro che se noi facciamo una rotazione di Wick $t \rightarrow i\tau$ e poniamo $\frac{i(t'-t)}{\hbar} = -\beta$ e $q' = q$ (cosicché consideriamo soltanto cammini chiusi) e infine aggiungiamo un'ulteriore integrazione all'integrale sui cammini $\int \mathcal{D}q$, integrando sulla posizione del punto iniziale $q(\tau) =$ punto finale $q(\tau' = \tau + \beta)$, otteniamo una rappresentazione con integrali di cammino della funzione di partizione del sistema quantico:

$$Z = \int \mathcal{D}[q] e^{-\int_0^\beta \mathcal{L}_E(\dot{q}, q) d\tau} ,$$

dove $\mathcal{D}[q]$ denota ora la somma su tutti i cammini chiusi e \mathcal{L}_E è la lagrangiana euclidea, ottenuta con la rotazione di Wick.

Come avevamo fatto per gli integrali di cammino, così anche questa rappresentazione si può estendere a sistemi con un numero arbitrario di gradi di libertà. Supponiamo ad esempio, in analogia a quanto avevamo fatto nello studio dei sistemi di Landau-Ginzburg, che il sistema quantico sia un sistema in D dimensioni spaziali e che le sue possibili configurazioni siano descritte da un campo scalare $\phi(\vec{x})$, dove \vec{x} è un vettore D -dimensionale. Per descrivere il sistema in equilibrio alla temperatura $T = 1/\beta$ mediante un integrale funzionale, occorre supporre che

il campo ϕ dipenda anche dalla variabile τ (tempo immaginario) e che sia una funzione periodica di periodo β , cioè

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \phi(\vec{x}, \tau + \beta). \quad (3.2.5)$$

Utilizzando queste configurazioni periodiche la funzione di partizione del sistema quantico D-dimensionale ammette la seguente rappresentazione in termini di integrazione funzionale di un sistema in D+1 dimensioni

$$Z \equiv \text{tr} e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\int_0^\beta \mathcal{L}_E[\phi] d\tau}, \quad (3.2.6)$$

dove ora $\mathcal{D}[\phi]$ indica la somma su tutte le configurazioni periodiche definite dalla (3.2.5) e la lagrangiana \mathcal{L}_E è ora un funzionale della configurazione ϕ . Un altro modo più generale per legare il sistema quantico a un equivalente sistema classico si basa su una identità operatoriale che si può costruire nella maniera seguente: si suddivide l'intervallo β in N intervallini di lunghezza $\delta\tau = \beta/N$. Sfruttando il noto limite $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 - x/N)^N = e^{-x}$ si può ottenere la seguente identità operatoriale

$$\text{tr} e^{-\beta H} = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \text{tr} [(1 - \delta\tau H)(1 - \delta\tau H) \dots (1 - \delta\tau H)], \quad (3.2.7)$$

dove la parentesi quadra contiene $N = \beta/\delta\tau$ fattori. Questa identità, nota come *formula di Trotter*, può essere reinterpretata come il limite continuo della funzione di partizione di un sistema della meccanica statistica classica associato alla matrice di trasferimento $T = 1 - \delta\tau H$ che ne descrive l'evoluzione nella direzione β in un reticolo con passo reticolare $\delta\tau$, per cui $Z = \text{tr} T^N$ (si vedano ad es. gli appunti di MS)). Dunque la (3.2.6) e la (3.2.7) mostrano in due modi differenti che *la funzione di partizione un sistema quantico in D dimensioni spaziali coincide con la funzione di partizione canonica di un opportuno sistema classico in D+1 dimensioni, in cui la dimensione aggiuntiva ha un'estensione finita β e le condizioni al contorno lungo questa direzione sono periodiche.*

In particolare la funzione di partizione di un sistema quantistico D-dimensionale a $T = 0$ è esattamente equivalente alla funzione di partizione di un opportuno sistema classico in D+1 dimensioni nel limite termodinamico. La temperatura del sistema quantistico non ha nulla a che fare con quella del sistema classico corrispondente, che dipende invece dalle costanti di accoppiamento del sistema quantistico.

3.2.3 Catena lineare di spin in campo trasverso

Un'applicazione illuminante della formula di Trotter è fornita dal sistema quantistico costituito da una catena lineare di spin di lunghezza L immerso in campo trasverso h , definito dall'Hamiltoniana

$$\widehat{H}(\lambda, h) = - \sum_n [\lambda \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z + h \sigma_n^x] , \quad (3.2.8)$$

dove le σ sono matrici di Pauli associate ai nodi di un reticolo unidimensionale. Matrici appartenenti a nodi diversi commutano, mentre quelle associate allo stesso nodo anticommutano:

$$(\sigma_n^z)^2 = (\sigma_n^x)^2 = 1; \{ \sigma_n^x, \sigma_n^z \} = 0; [\sigma_n^x, \sigma_{m \neq n}^z] = 0 . \quad (3.2.9)$$

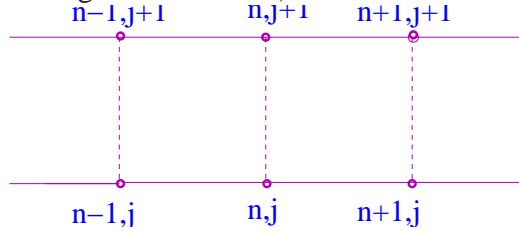
Vogliamo calcolare $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$ con la formula di Trotter. Utilizziamo come set completo di stati gli autostati di σ_n^z , cioè il set di configurazioni di spin associati ai nodi $|\{S_i\}\rangle = \dots |S_n\rangle |S_{n+1}\rangle \dots$, con $S_n = \pm 1$. σ_n^x non è diagonale in questa base e si ha, per via delle proprietà di anticommute, $\sigma_n^x |S_n\rangle = | - S_n \rangle$. Scriviamo ora la transfer matrix della formula di Trotter nella forma

$$\begin{aligned} T &\equiv 1 - \delta\tau \widehat{H} = \left(1 + \delta\tau h \sum_n \sigma_n^x \right) e^{\delta\tau \lambda \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z} + O(\delta\tau^2) = \\ &= \sqrt{h\delta\tau} \prod_n \left[\frac{1}{\sqrt{h\delta\tau}} + \sqrt{h\delta\tau} \sigma_n^x \right] e^{K_1 \sum_n S_{n,j} S_{n+1,j}} + O(\delta\tau^2) , \end{aligned}$$

con

$$K_1 = \delta\tau \lambda . \quad (3.2.10)$$

Si è aggiunta l'etichetta j alla configurazione e si interpreta l'espressione racchiusa in parentesi quadre come l'operatore che fa evolvere dalla configurazione j alla $j + 1$. Si interpreta poi questa nuova configurazione come la conf. di una nuova catena orizzontale spostata di un passo reticolare in direzione verticale (si veda la figura sottostante).



E' immediato verificare che l'azione del termine in parentesi quadre si puo' riscrivere nella forma

$$\langle S_{n,j+1} | \frac{1}{\sqrt{h\delta\tau}} + \sqrt{h\delta\tau} \sigma_n^x | S_{n,j} \rangle = e^{K_2 S_{n,j} S_{n,j+1}}$$

con

$$e^{K_2} = \frac{1}{\sqrt{h\delta\tau}} \quad (3.2.11)$$

Si genera cosi' un reticolo quadrato su cui è definito un modello di Ising standard senza campo magnetico e con accoppiamenti molto asimmetrici nelle due direzioni. Si ottiene dunque l'equivalenza

$$\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \left(\frac{1}{h\delta\tau} \right)^{N/2} \sum_{\{S_{x,y}\}} e^{\sum_{x,y} (K_1 S_{x,y} S_{x+1,y} + K_2 S_{x,y} S_{x,y+1})}, \quad (3.2.12)$$

con $\beta = N\delta\tau$. Nonostante gli accoppiamenti asimmetrici, è facile verificare che il sistema è autoduale rispetto alla trasformazione di Kramers e Wannier e la relazione tra le costanti di accoppiamento della versione duale è un'ovvia generalizzazione di quella simmetrica:

$$\sinh 2\tilde{K}_1 = 1/\sinh 2K_2; \quad \sinh 2\tilde{K}_2 = 1/\sinh 2K_1.$$

Ne consegue che il modello di Ising in questione possiede, nel limite termodinamico (cioè non solo $L \rightarrow \infty$ ma anche $\beta \rightarrow \infty$, una linea di punti critici data dalla relazione

$$\sinh 2K_1 \sinh 2K_2 = 1.$$

Inserendo in questa la (3.2.10) e la (3.2.11) si ottiene che la catena di spin in questione ha una transizione di fase ordine-disordine del II ordine per $h = \lambda$ a temperatura $T = 0$. Questo è un tipico esempio di transizione di fase di un sistema quantico a temperatura zero.

Cerchiamo ora di comprendere per una via completamente diversa il fatto che la catena di spin in questione ha una transizione di fase per $\lambda = h$.

Le proprietà fisiche di questo modello di spin non dipendono certo dalla rappresentazione usata per le matrici di Pauli, ma solo dalle loro proprietà algebriche. Introduciamo ora un nuovo set di operatori che hanno esattamente le stesse proprietà delle σ_n^x e σ_m^z , ma sono esprimibili in forma composta e non locale in termini delle σ :

$$\mu_n^x = \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z; \quad \mu_n^z = \prod_{j \leq n} \sigma_j^x. \quad (3.2.13)$$

È semplice verificare che questi operatori soddisfano esattamente tutte le proprietà delle σ elencate in (3.2.9), perciò la catena di spin descritta dall'Hamiltoniana

$$\widehat{H}(\lambda, h) = - \sum_n [\lambda \mu_n^z \mu_{n+1}^z + h \mu_n^x]$$

ha esattamente le stesse proprietà di quella descritta da $\widehat{H}(\lambda, h)$. Ma esprimendo le μ in funzione delle σ si ottiene

$$\widehat{H}(\lambda, h) = \widehat{H}(h, \lambda) ;$$

Dunque la teoria è simmetrica rispetto allo scambio $\lambda \leftrightarrow h$.

Nell'hamiltoniana $\widehat{H}(\lambda, h)$ il termine in λ è un accoppiamento ferromagnetico che tende ad ordinare gli spin, mentre il termine in h tende a disordinare il sistema, perchè cambia di segno gli spin su cui agisce. Perciò, se il sistema ha una transizione di fase per $h/\lambda = \rho_o$, la fase ordinata con $\langle \sigma_n^z \rangle \neq 0$ occupa la regione $h/\lambda < \rho_o$. Ma se $\rho_o \neq 1$, esiste, per via della simmetria $\lambda \leftrightarrow h$, un'altra transizione ordine-disordine per $h/\lambda = 1/\rho_o$; quindi, se supponiamo che la transizione di fase sia unica deve valere $\rho_o = 1$, come richiede la trasformazione di Kramers e Wannier. Valgono ovviamente le doppie implicazioni

$$\langle \sigma_n^z \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \langle \mu_n^z \rangle = 0 ; \langle \sigma_n^z \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mu_n^z \rangle \neq 0 .$$

Se $\langle \sigma^z \rangle$ è il parametro d'ordine, $\langle \mu^z \rangle$ è il parametro di disordine e viceversa. È facile verificare infine che la trasformazione (3.2.13) è una trasformazione involutiva. Si ha infatti

$$\sigma_{n+1}^x = \mu_n^z \mu_{n+1}^z ; \sigma_{n+1}^z = \prod_{j \leq n} \mu_j^x .$$

3.3 Zeta-function regularization

Come applicazione dell'equivalenza tra un sistema quantistico in equilibrio con un termostato e un sistema classico in una dimensione in piu' compattificata (il tempo immaginario di larghezza $\beta \hbar c$), vediamo il problema della radiazione elettromagnetica in equilibrio a una temperatura T in uno spazio d dimensionale. Il punto di partenza è lo studio di un campo scalare libero in $d + 1$ dimensioni.

La classe di integrali funzionali gaussiani della forma

$$Z = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\frac{1}{2} \int d^D x \int d^D y \phi(x) A(x, y) \phi(y)} , \quad (3.3.1)$$

dove $A(x, y)$ è una matrice invertibile, si può scrivere, decomponendo ogni configurazione $\phi = \sum_n a_n \phi_n$ nella base delle autofunzioni $\phi_n(x)$ di A e ponendo $\mathcal{D}[\phi] = \prod_n \kappa da_n$, dove κ è una costante di normalizzazione con le dimensioni del campo ϕ , nel modo seguente

$$\prod_n \int \kappa da_n e^{-\frac{1}{2} \lambda_n a_n^2} = \prod_n \kappa \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}} = \det(A/\mu)^{-\frac{1}{2}}, \quad \mu = 2\pi/\kappa^2, \quad (3.3.2)$$

dove λ_n sono gli autovalori di A : $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$ e si è usato il noto integrale gaussiano unidimensionale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2} \lambda x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

Un tipico operatore A è l'operatore cinetico del campo scalare libero, definito dall'azione euclidea

$$S = \frac{1}{2} \int d^D x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} \int d^D x \phi (-\partial^2) \phi,$$

dove ∂^2 è il Laplaciano. Il determinante di A di solito diverge perchè i suoi autovalori crescono senza limite. Per esempio gli autovalori di $-\partial^2$ per un sistema chiuso in una scatola di lato L con condizioni al contorno periodiche sono

$$\sum_{i=1}^D \left(\frac{2\pi n_i}{L} \right)^2, \quad (n_i \in \mathbb{Z})$$

Occorre dunque regolarizzare il determinante. A tal fine si introduce ⁴ una generalizzazione della funzione ζ di Riemann associata all'operatore A :

$$\zeta_A = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^s}, \quad (3.3.3)$$

dove s è un parametro complesso. È facile dimostrare che nel caso del Laplaciano questa serie converge per $\Re(s) > D$ e assumiamo che questa proprietà valga per il generico operatore A . Nel piano complesso di s può essere prolungata analiticamente su tutto il piano complesso e le uniche singolarità al finito sono

⁴S.W. Hawking, *Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime*, Commun. Math. Phys. **55** (1977) 133.

dei poli semplici per $s = 1, 2, \dots, D/2$. Possiamo allora usare questa proprietà per regolarizzare il determinante, usando una procedura analoga a quella del paragrafo precedente:

$$\begin{aligned} \log \det(A/\mu) &= \sum'_n \log \lambda_n - \log \mu \sum'_n \lambda_n^0 = \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\zeta_A(s)}{ds} - \log \mu \zeta_A(0) = -\zeta'_A(0) - \log \mu \zeta_A(0), \end{aligned}$$

per cui si ha

$$Z = \det(A/\mu)^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log \mu \zeta_A(0) + \frac{1}{2} \zeta'_A(0)}. \quad (3.3.4)$$

Gli autovalori dell' operatore laplaciano $-\partial^2$ in un parallelepipedo in $D = d+1$ dimensioni di taglia $L^d \times (\beta\hbar c)$ con condizioni periodiche in tutte le direzioni sono

$$\lambda_{n_1, n_2, \dots, n_d, n} = \sum_{i=1}^d \left(\frac{2\pi n_i}{L} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta\hbar c} \right)^2, \quad (n_i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Nel calcolo di $\zeta_{-\partial^2}(s)$ possiamo sostituire, nel limite termodinamico $L \rightarrow \infty$, alla somma sugli interi n_i il corrispondente integrale

$$\begin{aligned} \zeta_{-\partial^2}(s) &= \frac{L^d}{(2\pi)^d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^d x \frac{1}{\left(x^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta\hbar c} \right)^2 \right)^s} = \\ &= \frac{L^d}{(2\pi)^d} \Omega_d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta\hbar c}{2\pi n} \right)^{s-d} \int_0^{\infty} \frac{y^{d-1} dy}{(1+y^2)^s}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ é al solito l'angolo solido d-dimensionale. L'integrale si può esprimere mediante la funzione Beta $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{d-1} dy}{(1+y^2)^s} = \frac{\Gamma(s - \frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})}{2 \Gamma(s)}.$$

Si può dimostrare che il termine con $n = 0$ è in realtà nullo. Si ha perciò

$$\zeta_{-\partial^2}(s) = \frac{L^d}{(2\pi)^d} \Omega_d \left(\frac{\beta\hbar c}{2\pi} \right)^{s-d} \zeta_R(s-d) \frac{\Gamma(s - \frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(s)} \quad (3.3.6)$$

dove ζ_R è la funzione zeta di Riemann.

Supponiamo per semplicità che la dimensione d non sia un intero pari (in effetti il caso fisicamente più importante è $d = 3$). In questo caso $\zeta_{-\partial^2}(s)$ non è singolare per $s = 0$ e $\zeta_{-\partial^2}(0) = 0$ per via della $\Gamma(s)$ a denominatore, che ha un polo semplice in $s = 0$. Per lo stesso motivo l'unico contributo non nullo alla derivata prima di $\zeta_{-\partial^2}(s)$ in $s = 0$ proviene dalla derivata di $1/\Gamma(s)$. Si ha dunque

$$\log Z = \frac{1}{2} \zeta'_{-\partial^2}(0) = \frac{L^d}{(\beta\hbar c)^d} \Omega_d \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(-\frac{d}{2})}{2} \zeta_R(-d). \quad (3.3.7)$$

L'analogo calcolo fatto per il sistema quantistico in equilibrio con un termostato è una semplice generalizzazione di quello usato in tutti i libri di testo per il corpo nero. Trascurando la costante additiva infinita dovuta all'energia di punto zero si ha

$$\log Z = \frac{L^d}{(h)^d} \Omega_d \int p^{d-1} dp \log \frac{1}{1 - e^{\beta pc}} = \frac{L^d}{(\beta\hbar c)^d} \frac{\Omega_d}{d} \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^d dx}{1 - e^{-x}}$$

ossia

$$\log Z = \frac{L^d}{(\beta\hbar c)^d} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(d+1)}{d} \zeta_R(d+1). \quad (3.3.8)$$

La verifica dell'uguaglianza tra la (3.3.7) e la (3.3.8), che esprime l'equivalenza tra un sistema quantistico in d dimensioni e il corrispondente sistema classico in $d+1$, è tutt'altro che banale. Utilizzando la formula di duplicazione della Gamma di Eulero

$$\Gamma(d+1) = \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+d}{2}\right) \frac{2^d}{\sqrt{\pi}}, \quad (3.3.9)$$

il confronto tra le due diverse espressioni di $\log Z$ porta a scrivere l'identità seguente

$$\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \zeta_R(-d) = \pi^{-\frac{1+d}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \zeta_R(d+1) \quad (3.3.10)$$

che una famosa identità dovuta a Riemann e che ha un ruolo importante in teoria dei numeri.

3.4 Effetto Casimir e energia del vuoto

Consideriamo un sistema formato idealmente da due conduttori piani paralleli di dimensioni $L \times L$ posti nel vuoto a una distanza ℓ uno dall'altro alla temperatura

$T = 0$. Si vuole studiare un effetto prodotto dalle fluttuazioni quantistiche della radiazione elettromagnetica sui due conduttori, che sono supposti elettricamente neutri.

Per $L \gg \ell$ le condizioni al contorno nelle due direzioni parallele ai piani sono ininfluenti. Conviene allora pensare il sistema formato da un unico parallelepipedo di dimensioni $L \times L \times \ell$ a pareti conduttrici, cosicchè coincide con quello studiato per il corpo nero. Ci sono però due importanti differenze

- Il sistema è a $T = 0$, quindi in condizioni di equilibrio l'energia interna del sistema è data dalla somma delle energie dello stato fondamentale degli oscillatori armonici che descrivono i modi normali del campo elettromagnetico in equilibrio nella cavità.
- Le pareti sono ora dei conduttori, quindi i modi normali permessi sono quelli in cui il campo si annulla ai bordi

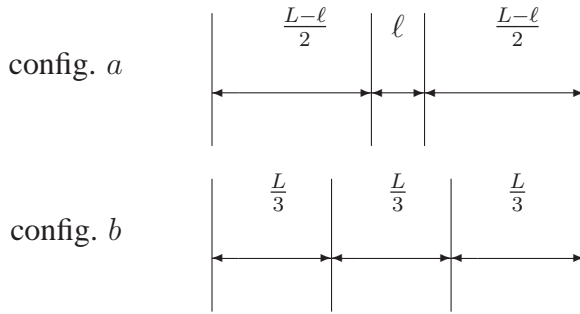
L'energia interna del sistema è data da

$$E = \frac{2\hbar}{2} c \sum_{n_x, n_y, n_z \in \mathcal{N}} \sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2) + \frac{\pi^2}{\ell^2} n_z^2}, \quad (3.4.1)$$

dove il 2 a numeratore tiene conto dei due stati di polarizzazione della radiazione. Ovviamente la somma precedente è divergente e così scritta non ha alcun senso. Questa costante infinita l'avevamo già incontrata nel calcolo dell'energia interna del corpo nero e l'avevamo trascurata con la scusa che l'energia è definita a meno di una costante additiva. Ma se noi ora stabiliamo, per eliminare questo infinito, che l'energia di questo sistema è nulla per un dato valore di ℓ , diciamo $\ell = L$, nessuno ci può assicurare che il valore dell'energia resti nullo al variare di ℓ . A noi interessa in realtà la differenza di energia tra il sistema in esame e quello in cui $\ell \rightarrow L$. Possiamo pensare di operare nel seguente modo:

- innanzitutto introduciamo un "cut off" nell'eq.(3.4.1) per renderla finita, ad esempio limitando la somma sui tre interi n_x, n_y, n_z da 0 a \mathcal{N} (= valore del cut off)
- calcoliamo poi la differenza di energia tra i due sistemi in questione
- eliminiamo il cut off facendo il limite $\mathcal{N} \rightarrow \infty$

Naturalmente non è assicurato a priori che questa procedura dia necessariamente un risultato finito ed è proprio quello che succede in questo caso. Esiste però un sistema leggermente più complesso in cui questa procedura ha successo: invece di considerare due sistemi distinti, consideriamo due configurazioni diverse dello stesso sistema, formato da quattro piani paralleli $L \times L$ posti rispettivamente alle distanze seguenti:



e definiamo l'energia per unità di superficie

$$\varepsilon \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} E/L^2 = \lim_{L \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty} \frac{E_a - E_b}{L^2}$$

dove E_a e E_b sono le energie delle due configurazioni calcolate con il cut off N . Il risultato di questa procedura (detta *regolarizzazione*) è finito e risulta essere, come vedremo

$$\varepsilon = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 \ell^3} , \quad (3.4.2)$$

quindi i due conduttori piani sono soggetti a una forza di attrazione, o, meglio, a una pressione $P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \ell}$ pari a

$$P = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 \ell^4} . \quad (3.4.3)$$

Questo è l'effetto scoperto da Casimir nel 1948. Esso a rigore è un effetto macroscopico, dato che la forza che agisce su 1 cm^2 tra due piatti posti a $1 \mu\text{m}$ di distanza è circa $1.3 \times 10^{-7} \text{ N}$, che rientra nel range misurabile in laboratorio, ma la sua verifica sperimentale è estremamente difficile a causa di molti effetti parassiti, quali le forze di Van der Waals, le rugosità dei materiali, gli effetti dei bordi, la conduttività finita delle piastre, le vibrazioni termiche , ecc.. La prima osservazione reale del fenomeno si deve all'esperienza del 1968 di Tabor e Winterton

⁵, ma solo nel 1997 si ebbe una conferma convincente e definitiva dovuta a Lamoreaux con l'utilizzo dell'interferometria laser e l'uso di una base piezoelettrica ⁶.

3.5 Come ricavare l'effetto Casimir dall'energia libera del corpo nero

L'effetto Casimir ha strette analogie con la termodinamica del corpo nero nella sua formulazione classica con una dimensione compattificata in più di larghezza $\beta\hbar c$. In entrambi i casi il sistema è racchiuso in un parallelepipedo in quattro dimensioni. nel caso del corpo nero le dimensioni che si fanno tendere all'infinito per ottenere il limite termodinamico sono le tre direzioni spaziali, mentre quella temporale legata alla temperatura è tenuta costante. Nell'effetto Casimir si mandano all'infinito due direzioni spaziali e la direzione associata alla temperatura, perchè il sistema è idealmente a temperatura zero, mentre è tenuta costante la distanza tra i due piatti conduttori. Una differenza importante è che nel caso dell'effetto Casimir le condizioni al contorno sui due piatti non sono periodiche ma fisse, dunque nella formula (3.3.5) la somma su n corre solo da 1 a ∞ (quindi ci vuole un fattore $\frac{1}{2}$) e al posto di $\frac{2\pi n}{\beta\hbar c}$ occorre sostituire $\frac{\pi n}{\ell}$, cioè $\beta\hbar c \rightarrow 2\ell$ e una delle direzioni spaziali $L \rightarrow \beta\hbar c$ con β tendente all'infinito . Dunque si ha

$$\log Z_{Casimir}(\ell) = 2 \frac{1}{2} \frac{L^2 \beta \hbar c}{8 \ell^3} \frac{\zeta_R(4)}{\pi^2} = \frac{L^2 \beta \hbar c}{\ell^3} \frac{\pi^2}{720} \quad (3.5.1)$$

dove il primo fattore 2 si riferisce ai due stati di polarizzazione della luce. Dunque l'energia del sistema è

$$E = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = -\frac{L^2 \hbar c}{\ell^3} \frac{\pi^2}{720} \quad (3.5.2)$$

che coincide con la (3.4.2).

⁵D.Tabor and R.H.S. Winterton, Nature 219 (1968) 1120

⁶S.K.Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. 58 (1997) 5

Chapter 4

Rottura spontanea di simmetrie continue

In fisica classica, l'invarianza dell'azione per effetto di un gruppo di Lie di trasformazioni (dette impropriamente nella letteratura fisica simmetrie continue, cioè dipendenti con continuità da uno o più parametri reali) è strettamente legato all'esistenza di leggi di conservazione. Questo è particolarmente evidente nella teoria dei campi classica, dove il *teorema di Noether* (v. §4.1) associa una corrente conservata ad ogni generatore infinitesimo della simmetria. Queste leggi di conservazione non sono necessariamente valide nei corrispondenti sistemi quantistici per due ordini di motivi. Innanzitutto, affinché una simmetria classica sia elevata a simmetria della teoria quantistica, occorre che anche la misura di integrazione dell'integrale funzionale sia invariante. Se questo non succede, si dice che c'è un'anomalia nella teoria e la simmetria in questione di fatto non vale per il sistema reale (cioè quantistico).

Il secondo motivo che può non permettere di associare una legge di conservazione a una simmetria è il fenomeno della rottura spontanea di una simmetria di Lie. In questo caso, pur essendo la teoria invariante per queste trasformazioni anche a livello quantistico (assenza di anomalie), alcune delle cariche conservate classicamente non sono ben definite quantisticamente, per la presenza nello spettro della fase a simmetria spontaneamente rotta di eccitazioni di massa nulla (*modi di Goldstone*, v. §4.2). La presenza di queste eccitazioni di massa nulla è un fenomeno molto generale che si osserva sia nei sistemi descritti dalla teoria quantistica dei campi, sia nei sistemi statistici.

4.1 Teorema di Noether

Consideriamo nello spazio di Minkowski un'azione $S = S[\phi_a]$ di un arbitrario sistema fisico invariante rispetto a un gruppo di Lie G di ordine n che trasforma il campo o parametro d'ordine ϕ_a come un multipletto di una rappresentazione irriducibile di dimensione m di G (per esempio: $G = O(N)$, $n = N(N-1)/2$, ϕ_a vettore di $O(N)$, $a = 1, \dots, N \equiv m$). Una trasformazione infinitesima di parametro ϵ_i ($i = 1, \dots, n$) mappa ϕ_a in $\phi'_a = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x)$, ($a = 1, \dots, m$) con

$$\delta\phi_a(x) = \epsilon_i T_a^{ib} \phi_b(x), \quad (4.1.1)$$

dove T^i denota un generatore infinitesimo del gruppo G . Poichè per ipotesi questa trasformazione è una simmetria, la corrispondente variazione δS dell'azione è nulla. Se però assumo che ϵ_i anzichè essere costante è una funzione arbitraria di x l'azione non è più invariante. Se come al solito S dipende solo da ϕ_a e dalle sue derivate prime, δS ha necessariamente la forma

$$\delta S = \int d^4x \partial^\mu \epsilon_i(x) j_\mu^i = - \int d^4x \epsilon_i(x) \partial^\mu j_\mu^i.$$

E' facile ora verificare che se si utilizzano le equazioni del moto la corrente j_μ^i è conservata. Infatti tali equazioni implicano $\delta S = 0$ per una variazione $\delta\phi$ arbitraria del campo ϕ , e quindi in particolare per una variazione del tipo (4.1.1). Poichè $\epsilon_i(x)$ è una funzione arbitraria di x , si hanno le leggi di conservazione

$$\partial^\mu j_\mu^i = 0, \quad (4.1.2)$$

dalle quali si possono ottenere n costanti del moto (Teorema di Noether)

$$Q^i = \int d^3x j_0^i. \quad (4.1.3)$$

4.2 Modi di Goldstone

Consideriamo in particolare una teoria invariante rispetto a un gruppo $O(N)$ in cui il parametro d'ordine è un campo ϕ_a ($a = 1, \dots, N$) che si trasforma come un vettore di $O(N)$. Accendiamo nel sistema un "campo magnetico" esterno h_a che provoca una rottura esplicita della simmetria. Indichiamo con $\mathcal{H}_0[\phi]$ l'Hamiltoniana

del sistema invariante e con $\mathcal{H}[\phi, h] = \mathcal{H}_o[\phi] - \int dx^d \phi_a(x) h^a$ l'Hamiltoniana perturbata. Poichè la funzione di partizione

$$Z = \int \prod_a \mathcal{D}\phi_a e^{-\beta\mathcal{H}} = e^{-\beta F}$$

non dipende dalle variabili di integrazione ϕ_a , l'energia libera di Helmholtz F dipende solo dal campo esterno h_a . Vista la forma con cui appare il campo esterno nell'Hamiltoniana perturbata è chiaro che se noi associamo ad ogni rotazione del parametro d'ordine ϕ_a un' analoga rotazione del campo esterno, il sistema complessivo è ancora $O(N)$ invariante¹. Quindi, se h_a è costante, F non può che dipendere dal modulo $|h| = \sqrt{\sum_{a=1}^N h_a^2}$. La densità di energia libera $f = F/V$ avrà uno sviluppo in serie di Taylor del tipo

$$f = f(h) = f(0) - |h|m - \frac{1}{2}\chi_L|h|^2 + O(|h|^3)$$

dove m è la magnetizzazione spontanea che per comodità scegliamo nella direzione N ($m = \langle \phi_N \rangle \Rightarrow m = -\frac{\partial f}{\partial h_N}$) e χ_L è la suscettività nella stessa direzione. Supponiamo ora di raggiungere la fase a simmetria spontaneamente rotta nel modo seguente

$$\begin{aligned} h_N = h, \quad h_a = 0, \quad a \neq N, \quad h \rightarrow 0^+ \\ \Rightarrow \langle \phi_a \rangle = m\delta_{aN} . \end{aligned}$$

Vogliamo ora far vedere che nella fase a simmetria spontaneamente rotta esistono delle eccitazioni di massa nulla (cioè caratterizzate da una lunghezza di correlazione $\xi \rightarrow \infty$). Poichè la suscettività diverge in presenza di eccitazioni di massa nulla (come si è già osservato nei sistemi magnetici), calcoliamoci la suscettività χ_{ab} , definita dalla relazione:

$$\begin{aligned} \chi_{ab} &\equiv -\frac{\partial^2 f}{\partial h_a \partial h_b} \\ &\Downarrow \\ \chi_{ab} &= -\frac{\partial}{\partial h_a} \left(\frac{h_b}{|h|} \frac{\partial f}{\partial |h|} \right) = -\frac{h_a h_b}{|h|^2} \frac{\partial^2 f}{\partial |h|^2} - \left(\frac{\partial}{\partial h_a} \frac{h_b}{|h|} \right) \frac{\partial f}{\partial |h|} = \end{aligned}$$

¹Il campo esterno h^a fa parte dell'apparato che misura la risposta del sistema ad una perturbazione che rompe esplicitamente la simmetria. Il gruppo $O(N)$ che ruota simultaneamente ϕ_a e h^a è quindi una simmetria del sistema + apparato di misura.

$$= -\frac{h_a h_b}{|h|^2} f'' - \left(\delta_{ab} - \frac{h_a h_b}{|h|^2} \right) \frac{1}{|h|} f'$$

Poiche' $h_a = h\delta_{aN} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \chi_{ab} &= -f'' \delta_{aN} \delta_{bN} - (\delta_{ab} - \delta_{aN} \delta_{bN}) \frac{1}{|h|} f' \\ &= \delta_{ab} [\chi_L + \chi_T (1 - \delta_{aN})] \\ \chi_L &= -f'' , \quad \chi_T = -\frac{1}{h} f' = \frac{m}{h} \end{aligned}$$

In altre parole, la suscettivita' trasversa $\chi_T = \chi_{aa}$, ($a \neq N$) diverge per $h \rightarrow 0^+$, $m \neq 0$. Dunque nella fase a simmetria spontaneamente rotta, fuori dal punto critico ($m \neq 0$) ci sono delle correlazioni a lungo raggio ($\chi_T \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow \infty$) corrispondenti a eccitazioni o quasiparticelle di massa nulla ($\xi \rightarrow \infty$) con i numeri quantici del sottogruppo di stabilita' $O(N-1)$ (cioe' la parte di simmetria non spontaneamente rotta).²

Le eccitazioni a massa nulla che abbiamo individuato si dicono bosoni o modi di Goldstone. Questo fenomeno che ora abbiamo descritto e' del tutto generale: ogni qual volta una simmetria continua si rompe spontaneamente, in tutta la fase a simmetria spontaneamente rotta si propagano delle eccitazioni a massa nulla. Ad esempio i fononi di un cristallo possono essere considerati come i bosoni di Goldstone della rottura spontanea dell'invarianza per traslazioni del sistema nella fase solida.

Vediamo di capire in modo piu' intuitivo l'origine di questo fenomeno: quando la simmetria spontaneamente rotta e' un gruppo continuo, gli stati fondamentali (o vuoti) della teoria sono degeneri e formano un insieme continuo che si puo' etichettare con i parametri del gruppo. Consideriamo come esempio una semplice generalizzazione del modello di Landau-Ginzburg, in cui il parametro d'ordine, anziche' essere un campo reale $\phi(x)$ e' un campo complesso $\psi(x)$ e scriviamo l'Hmiltoniana nella forma

$$H_{LG}[\psi] = \int d^3x \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + V(|\psi|^2) \right) .$$

In questo caso il gruppo di simmetria e' il gruppo $U(1)$ generato dalle trasformazioni

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) .$$

²L'identita' che abbiamo trovato tra χ_T e $\frac{m}{h}$ e' un tipico esempio di *identita' di Ward*, cioe' identita' tra funzioni di correlazione che derivano dall'invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni; queste identita' giocano un ruolo molto importante nella teoria quantistica dei campi.

Nel caso di rottura spontanea di questa simmetria ogni vuoto puo' essere etichettato con un parametro angolare α :

$$\langle \psi \rangle = \psi_o = \rho_o e^{i\alpha}$$

$H_{LG}[\psi]$ e' minimo per $\psi = \psi_o$.

Consideriamo ora una configurazione che interpola tra due vuoti differenti: supponiamo ad esempio che $\psi(x) = \rho_o$ per $x_1 \ll -A$ e $\psi(x) = \rho_o e^{i\alpha_o}$ per $x_1 \gg A$, dove x_1 è una delle coordinate del sistema.

Possiamo interpolare queste due configurazioni ponendo

$$\psi(x) = \rho_o e^{i\theta(x)}$$

con $\theta(x)$ come opportuna funzione interpolante.

Se inseriamo questa configurazione nell'Hamiltoniana, l'unico termine che risente della presenza di $\theta(x)$ e' il termine cinetico $|\nabla\psi|^2$. Tutti gli altri termini dell'eq. di LG sono funzioni di $|\psi(x)| = \rho_o$. Poiche' $\nabla\psi(x) = \rho_o e^{i\theta(x)} \nabla\theta(x)$, si ha

$$H_{LG}[\psi] - H_{LG}[\psi_o] = \int d^3x \frac{1}{2} |\nabla\psi(x)|^2 = \frac{\rho_o^2}{2} \int d^3x (\nabla\theta(x))^2 = \Delta E . \quad (4.2.1)$$

Quindi nella fase a simmetria spontaneamente rotta ($\rho > 0$), quanto piu' A e' grande³, tanto piu' il gradiente di θ puo' essere reso piccolo, \Rightarrow esistono delle eccitazioni che interpolano tra diversi vuoti che hanno un'energia ΔE tanto piu' piccola quanto piu' grande e' la loro lunghezza d'onda⁴: sono questi i bosoni di Goldstone. Detto in altri termini, $\theta(x)$ descrive un campo di massa nulla, in quanto θ contribuisce a H_{GL} solo con il termine cinetico $(\nabla\theta)^2$.

Vediamo ora un approccio piu' sistematico: Scriviamo esplicitamente l'Hamiltoniana H_{GL} per una teoria $O(N)$ invariante

$$H_{GL}[\phi_a] = \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2} \sum_a^N (\nabla\phi^a)^2 + \frac{t}{2} \left(\sum_a \phi_a^2 \right) + \frac{u}{4!} \left(\sum_a \phi_a^2 \right)^2 - \sum_a h^a \phi_a \right\}$$

Sia ϕ_o^a una configurazione di minimo; ponendo $h_a = h\delta_{aN}$ si ha:

$$\langle \phi_a \rangle = \phi_o \delta_{aN} , \quad t\phi_o + \frac{u}{3!} \phi_o^3 = h \quad (\text{condizione di minimo})$$

³Qui la scala delle lunghezze dipende dal valore della differenza di fase α_o tra i due vuoti.

⁴La trasformata di Fourier del gradiente ∇ e' il numero d'onda $k = 2\pi/\lambda$, dove $\lambda \propto A$ e' la lunghezza d'onda dell'eccitazione che interpola tra i due vuoti.

Per studiare lo spettro delle eccitazioni (quantistiche) di energia piu' bassa basta porre $\phi(x)^a = \phi_o^a + \bar{\phi}^a(x)$, dove $\bar{\phi}^a$ descrive una perturbazione dello stato fondamentale. Poiche' H_{GL} ha un minimo per $\phi(x) = \phi_o$, non compaiono termini lineari in $\bar{\phi}$.

$$H_{GL}[\phi] = H_{GL}[\phi_o] + \tilde{H}_{GL}[\bar{\phi}]$$

Separiamo le N direzioni in una longitudinale $a = N$ e $N - 1$ trasversali $t = 1, 2 \dots N - 1$

$$\sum_a (\nabla \bar{\phi}^a)^2 = \sum_t (\nabla \bar{\phi}_t)^2 + (\nabla \bar{\phi}_N)^2$$

$$\sum_a (\bar{\phi}_a)^2 = \sum_t (\bar{\phi}_t)^2 + \bar{\phi}_N^2$$

$$\left(\sum_a \bar{\phi}_a^2 \right)^2 = \left(\sum_t \bar{\phi}_t^2 \right)^2 + 2 \sum_t \bar{\phi}_t^2 \bar{\phi}_N^2 + \bar{\phi}_N^4$$

$$\bar{\phi}_N^4 = (\phi_o + \bar{\phi}_N(x))^4 = 4\bar{\phi}_N(x)\phi_o^3 + \phi_o^4 + 6\phi_o^2\bar{\phi}_N^2(x) + 4\phi_o\bar{\phi}_N^3(x) + \bar{\phi}_N^4$$

I termini lineari si devono cancellare per la proprieta' di minimo di H .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{H}_{GL}[\bar{\phi}] = \int d^D x & \left[\frac{1}{2} (\nabla \bar{\phi}_N)^2 + \frac{\mu_L^2}{2} \bar{\phi}_N^2 + \frac{1}{2} \sum_t (\nabla \bar{\phi}_t)^2 + \frac{\mu_T^2}{2} \sum_t \bar{\phi}_t^2 + \right. \\ & \left. + \frac{g_3}{3!} \bar{\phi}_N \sum_t \bar{\phi}_t^2 + \frac{g_3}{3!} \bar{\phi}_N^3 + \frac{u}{4!} \bar{\phi}_N^4 + \frac{u}{4!} \left(\sum_a \bar{\phi}_a^2 \right)^2 \right] \end{aligned}$$

dove

$$\mu_L^2 = t + \frac{1}{2} u \phi_o^2, \quad \mu_T^2 = t + \frac{1}{3!} u \phi_o^2, \quad g_3 = u \phi_o.$$

Utilizzando la condizione di minimo

$$t \phi_o + \frac{u}{3!} \phi_o^3 = h$$

$$\Rightarrow \mu_L^2 = 3 \frac{h}{\phi_o} - 2t, \quad \mu_T^2 = \frac{h}{\phi_o}$$

Poiche' nella fase a simmetria spontaneamente rotta $t < 0$, si ha $\mu_L > \mu_T$. Nel limite $u \rightarrow 0$ possiamo utilizzare i risultati del modello gaussiano: la teoria e' la somma di un campo libero longitudinale che ha un correlatore, nello spazio degli impulsi, della forma

$$G_L(p) = \frac{1}{p^2 + \mu_L^2}$$

e $N - 1$ campi di correlatore

$$G_T(p) = \frac{1}{p^2 + \mu_T^2} = \frac{1}{p^2 + h/\phi_o}$$

Nel limite $h \rightarrow 0$ questi $N - 1$ campi descrivono eccitazioni di massa 0 dette appunto bosoni di Goldstone. Si dice *teorema di Goldstone* l'affermazione che la fase a simmetria spontaneamente rotta di un gruppo continuo contiene eccitazioni di massa nulla. Il metodo che abbiamo usato è un metodo molto generale che si può applicare ogniqualevolta si sappiano trattare perturbativamente le fluttuazioni attorno a un vuoto della teoria.

4.3 Dimensione critica inferiore

È noto (v. la parte del corso sui sistemi critici) che l'approssimazione di campo medio è tanto migliore quanto più la dimensionalità dello spazio è alta, e si definisce dimensione critica superiore la dimensione spaziale in cui la descrizione del comportamento critico data dal campo medio è esatta. Al contrario, le fluttuazioni di un sistema attorno una configurazione di equilibrio sono tanto più importanti quanto più la dimensione dello spazio è bassa. Queste fluttuazioni tendono ovviamente a disordinare il sistema e quindi ad abbassare la temperatura di transizione verso la fase ordinata; se la dimensione è minore o uguale a un valore critico d_c detto *dimensione critica inferiore* la temperatura di transizione si riduce a zero, per cui il sistema non possiede una fase a simmetria spontaneamente rotta. Per il modello di Ising e per tutti modelli con una simmetria discreta e con interazioni a corto raggio si ha $d_c = 1$, mentre per i modelli con simmetria continua risulta $d_c = 2$.

Benchè le affermazioni precedenti si possano dimostrare rigorosamente, qui ci si contenta di darne una giustificazione plausibile con dei semplici argomenti intuitivi basati sul costo necessario, in termini di energia libera $F = E - TS$, per disordinare una fase ordinata.

Consideriamo come primo esempio un modello di Ising unidimensionale su reticolo, definito dall'hamiltoniana $\mathcal{H} = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}$ e supponiamo che il sistema sia in una fase ordinata con $\sigma = +1$. Qual'è il costo in energia libera per creare un domino di dimensione ℓ di magnetizzazione opposta attorno a un dato sito j in cui si è posto $\sigma_j = -1$? Ognuno dei due estremi del dominio contribuisce con un'energia $E = 2J$, ma il domino può occupare ℓ posizioni diverse attorno

a j , perciò $\Delta S = \kappa \log \ell$ e quindi $\Delta F \sim 4J - \kappa T \log \ell$. In conclusione, la formazione di in tale dominio per ℓ sufficientemente grande e T arbitrario produce sempre un abbassamento di F per ogni valore di T e la fase ordinata non può essere stabile. Viceversa in due dimensioni l'energia di un dominio di perimetro ℓ è $E \sim 2J\ell$. Per calcolarne l'entropia consideriamo il bordo del dominio come un cammino casuale chiuso che ad ogni passo, nel reticolo quadrato, ha al massimo tre possibilità (perchè non può tornare su se stesso), perciò il numero possibile di configurazioni è circa c^ℓ , con $c < 3$. Quindi $\Delta F = 2J\ell - \kappa T \ell \log c$ e a temperature sufficientemente basse la fase ordinata è stabile rispetto alla formazione di domini di spin opposto.

Se la simmetria è continua il discorso è un po' diverso. Possiamo, per fare un esempio concreto, considerare un modello con simmetria $O(3)$, sostituendo nell'hamiltoniana di Ising al posto del segno σ_i un vettore $\vec{\sigma}_i$. Se si forma un dominio di dimensione ℓ che possiede al centro uno spin di verso opposto rispetto a quelli della frontiera, gli spin intermedi hanno a disposizione una distanza $O(\ell)$ per interpolare, col minor costo energetico possibile, lo spin al centro con quelli alla frontiera. L'angolo relativo tra due spin contigui (che è la grandezza che interviene nell'hamiltoniana) è dell'ordine di π/ℓ e la densità di energia (che è $\propto (\nabla\theta)^2$, vedi l'eq.(4.2.1)) è $O(1/\ell^2)$. Questa dà un'energia totale, in d dimensioni, $E = O(\ell^{d-2})$ per un dominio il cui volume è $O(\ell^d)$, da compararsi con $O(\ell^{d-1})$ nel caso di simmetria discreta. Questo significa che gli effetti entropici sono sempre dominanti per $d \leq 2$.

L'argomento intuitivo precedente è corroborato dal teorema di Mermin- Wagner-Hohenberg (noto in teoria dei campi come teorema di Coleman) che stabilisce in modo rigoroso che a temperatura $\neq 0$ non ci può essere rottura spontanea di una simmetria continua (cioè con un valore di aspettazione non nullo del parametro d'ordine) in dimensioni $d \leq 2$ nei modelli con accoppiamenti a corto raggio. In particolare per un modello con simmetria $O(n)$ in due dimensioni Mermin e Wagner nel 1966 e Hohenberg nel 1967 mostrarono ⁵ che per un campo magnetico sufficientemente piccolo vale la seguente disuguaglianza per la magnetizzazione $M = \frac{\partial \log Z}{\partial h}$

$$M(h) \leq \sqrt{\frac{4\pi\beta}{n-1}} \frac{1}{\sqrt{C - \log h}}$$

dove C è un'opportuna costante. Da questa disuguaglianza segue ovviamente che la magnetizzazione spontanea $\lim_{h \rightarrow 0} M(h)$ è nulla per ogni valore finito della temperatura.

⁵si veda ad es. la dimostrazione a pag.219 del libro di Itzykson e Drouffe citato in bibliografia.

Nel paragrafo seguente è descritta schematicamente una dimostrazione semplificata del teorema.

4.4 Il teorema di Mermin-Wagner-Hohenberg

Un modo per definire esattamente la rottura spontanea di simmetria senza ricorrere all'introduzione di un campo magnetico consiste nel fissare le condizioni al contorno scegliendo una particolare direzione $\vec{\phi} = \phi_0$ del parametro d'ordine $\vec{\phi}$ di una teoria $O(n)$ invariante. Queste condizioni al contorno selezionano uno dei possibili vuoti in cui si dispone la teoria nel caso di rottura spontanea. Nel limite termodinamico $\langle \vec{\phi} \rangle$ calcolato al centro del reticolo è diverso da 0 solo se c'è una rottura spontanea della simmetria. Quindi per dimostrare che non c'è rottura spontanea basta dimostrare che il valor medio $\langle \vec{\phi} \rangle$ calcolato nel centro del reticolo è indipendente dalle condizioni al bordo nel limite termodinamico.

Consideriamo un modello bidimensionale del tipo di Landau-Ginzburg:

$$H = \frac{1}{2} \int d^2x \left(\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} + V(|\vec{\phi}|) \right)$$

e sia ϕ_0 una delle configurazioni di vuoto che rompono spontaneamente la simmetria $O(n)$, cioè $V'(\phi_0) = 0$, $\phi_0 \neq 0$. Costruiremo ora a partire da ϕ_0 e $-\phi_0$ un insieme di configurazioni di $\vec{\phi}$ che è sufficiente a dimostrare l'assenza di rottura spontanea di simmetria. Partiamo da una famiglia di quadrati concentrici (vedi la figura) di lato crescente L_0, L_1, \dots, L_N , con $L_k = 2L_{k-1}$. Il quadrato più interno di lato L_0 è posto al centro del reticolo e, tanto per fissare le idee, supponiamo che esso si estenda per qualche passo reticolare, mentre quello di lato L_N contiene tutto il sistema. Il limite termodinamico si otterrà ponendo $N \rightarrow \infty$. Fissiamo ora le condizioni al contorno scegliendo $\vec{\phi} = \phi_0$ sul perimetro di L_N . Per descrivere una delle configurazioni di tutto il reticolo che vogliamo costruire, cominciamo con assegnare sul perimetro di ogni quadrato il vettore $\pm\phi_0$ e precisamente al quadrato di posizione k il vettore $S_k \phi_0$, dove $S_k = \pm 1$ è una variabile di Ising su cui sommeremo. In questo modo abbiamo fissato solo parzialmente la configurazione, perchè per ora è definita solo sui perimetri della famiglia di quadrati concentrici. Estenderemo la configurazione a tutti gli altri nodi del reticolo con la seguente regola.

- Se due quadrati consecutivi hanno lo stesso segno, cioè se $S_{k-1} = S_k$ assegnamo a tutti i nodi compresi fra i due quadrati il vettore $\vec{\phi} = S_k \phi_0$

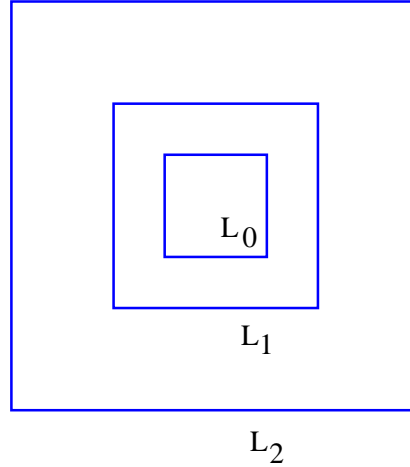


Figure 4.1: Schema della scomposizione in quadrati concentrici del reticolo bidimensionale per la costruzione dell'insieme di configurazioni che permettono di dimostrare l'assenza di magnetizzazione spontanea nei modelli con simmetria $O(n)$ con $n \geq 2$.

- Se invece $S_k = -S_{k-1}$ interpoliamo la configurazione cercando la configurazione che minimizza l'energia facendo ruotare $\vec{\phi}$ con continuità da $-\phi_0$ a ϕ_0 senza mai abbandonare il minimo di V , proprio come si è fatto nel paragrafo precedente nella discussione sulla stabilità del vuoto ordinato. In questo modo tutto il contributo dell'energia viene dal termine cinetico che deve essere minimo. Possiamo ad es. far variare $\vec{\phi}$ con un fattore di fase del tipo $\phi_0 e^{\theta(x)}$ con $L_k \leq x \leq L_{k+1} = 2L_k$ e $\theta(L_k) = 0$, $\theta(2L_k) = \pi$. La funzione $\theta(x)$ che minimizza il contributo del termine cinetico è ovviamente lineare: $\theta(x) = \pi(x - L_k)/L_k$. Si ha $\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} \propto 1/L_k^2$ e quindi il costo in energia di questa interpolazione è finito: $\Delta E_{L_k} \propto \frac{L_k^2 - L_{k-1}^2}{L_k^2} \leq \Delta E < \infty$, dove ΔE è il valore di ΔE_L nel limite termodinamico $L \rightarrow \infty$

Il contributo di queste configurazioni alla funzione di partizione è dunque ben approssimato, a meno di una costante moltiplicativa (*Esercizio: determinare questa costante moltiplicativa*) dalla funzione di partizione

$$Z_I = \sum_{\{S_i\}} e^{-\mathcal{H}}$$

di un modello di Ising unidimensionale definito dall'Hamiltoniana seguente

$$\mathcal{H} = -\frac{\Delta E}{2} \sum_{k=0}^N S_k S_{k+1}$$

dove si è posto $S_N = 1$. Utilizzando ora il noto metodo dello sviluppo ad alta temperatura si dimostra subito che

$$\langle S_0 \rangle = \tanh^N \left(\frac{\Delta E}{2} \right)$$

e dunque $\langle S_0 \rangle \rightarrow 0$ nel limite termodinamico. In conclusione, abbiamo trovato un insieme di configurazioni del sistema bidimensionale con simmetria $O(n)$ per cui il valor medio di $\vec{\phi}$ calcolato sul quadrato più interno è zero nel limite termodinamico. Se aggiungiamo anche le altre configurazioni non facciamo altro che aumentare le fluttuazioni termiche del sistema, e quindi a maggior ragione

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \vec{\phi} \rangle = 0$$

qed.

Una motivazione semplice per giustificare questo teorema da un altro punto di vista è l'osservazione che non possono esistere modi di Goldstone in $d \leq 2$ dimensioni. Infatti il correlatore di un campo di massa nulla in $d = 2$ soddisfa l'eq. (2.1.4) che nel limite continuo diventa

$$-\Delta G(x, y) = \delta(x)\delta(y)$$

la cui unica soluzione a simmetria radiale⁶ è $G(x, y) = c - \frac{1}{2\pi} \log r$, (c è una costante arbitraria) che è divergente a grandi distanze (divergenza infrarossa) ed è sorgente di inconsistenze, perchè come si è già visto al § 2.1.2, il correlatore dovrebbe essere sempre positivo. Analogamente in una dimensione il correlatore soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x) = -\delta(x) ,$$

la cui soluzione $G(x) = c - \frac{|x|}{2}$ è anch'essa divergente infrarossa. In conclusione i modi di Goldstone in $d \leq 2$ dimensioni non possono esistere e quindi neanche il vuoto in cui si propagano, cioè una fase a simmetria spontaneamente rotta, la cui esistenza richiede necessariamente anche quella dei modi di Goldstone.

⁶Infatti il laplaciano in coordinate polari (r, ϕ) è $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} f) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f$, da cui, ponendo $\frac{\partial}{\partial \phi} G = 0$, si ha $G(r) \propto \log r$. Poichè $\Delta \log r = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \theta(r) = \frac{1}{r} \delta(r)$, si ha $\delta(x)\delta(y) dx dy = \delta(r) dr \frac{d\phi}{2\pi}$, come si può verificare integrando su una funzione di prova entrambi i membri. Si ottiene la normalizzazione riportata nel testo

4.5 Il modello XY bidimensionale

Il modello XY è un modello con simmetria $U(1)=O(2)$ ottenuto assegnando ad ogni nodo j di un reticolo in d dimensioni un vettore unimodulare bidimensionale $S_j = e^{i\theta_j} \equiv (x_j = \cos \theta_j, y_j = \sin \theta_j)$; il suo nome deriva banalmente dal fatto che le componenti cartesiane che definiscono in ogni nodo il vettore sono x e y . È una generalizzazione diretta del modello di Ising, che si otterrebbe limitando θ ai due valori 0 e π , mentre in questo modello $0 \leq \theta \leq 2\pi$. L'Hamiltoniana è

$$H = -\frac{K}{2} \sum_{\langle ij \rangle} (S_i S_j^* + S_i^* S_j) = -K \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j). \quad (4.5.1)$$

in $d=3$ il modello ha una transizione ordine-disordine che è nella stessa classe di universalità del punto lambda dell'elio superfluido.

Qui studiamo il caso in due dimensioni, che è di grande interesse teorico per vari motivi.

Innanzitutto questo modello bidimensionale, in base al teorema di Mermin-Wagner - Hohenberg, non può avere una rottura spontanea di simmetria, il che non esclude che abbia una transizione di fase. La funzione di partizione è

$$Z = \int_0^{2\pi} \prod_j d\theta_j e^{-H} \quad (4.5.2)$$

dove la temperatura è inglobata in $K \propto 1/T$. A bassissima temperatura, cioè K molto grande, il sistema tende ad ordinarsi e gli angoli $\theta_i - \theta_j$ sono molto piccoli, per cui, a parte una costante moltiplicativa, la funzione di partizione è dominata dal termine gaussiano nello sviluppo del coseno. che nella notazione del continuo diventa

$$H = \int d^2x \frac{K}{2} \sum_{\alpha=1,2} \partial_\alpha \theta(x) \partial^\alpha \theta(x) - \frac{1}{4!} (\partial_\alpha \theta(x) \partial^\alpha \theta(x))^2 + \dots \quad (4.5.3)$$

È da notare che K , pur essendo un accoppiamento marginale, non può essere riassorbito in una ridefinizione del campo θ che è un angolo e quindi varia da 0 a 2π ; dunque l'equazione del gruppo di rinormalizzazione par essere

$$a \frac{d}{da} K \equiv \dot{K} = 0. \quad (4.5.4)$$

È anche facile verificare, utilizzando il metodo usato per ricavare la (2.2.2), che i termini di ordine superiore nello sviluppo (4.5.3) corrispondono a costanti di accoppiamento irrilevanti, dunque per ogni valore di K (purchè abbastanza grande, come vedremo) le traiettorie del gruppo di rinormalizzazione fanno fluire il sistema verso un punto fisso gaussiano. L'Hamiltoniana di punto fisso è

$$H^* = \int d^2x \frac{K}{2} \partial_\alpha \theta \partial^\alpha \theta . \quad (4.5.5)$$

Cominciamo col calcolarci il correlatore

$$\langle S_x S_y^* \rangle = \langle e^{i\theta_x - i\theta_y} \rangle = e^{G(x-y) - G(0)} ,$$

dove si è usata la (2.3.2) con $B_x = -B_y = i$. Ricordando poi che il correlatore gaussiano bidimensionale è dato da ⁷

$$\langle \theta_x \theta_y \rangle \equiv G(x-y) = c - \frac{1}{2\pi K} \log |x-y| ,$$

si ha

$$\langle S_x S_y^* \rangle = \frac{C}{|x-y|^{1/2\pi K}} . \quad (4.5.6)$$

Questa legge di potenza mostra che il sistema è critico e l'esponente magnetico

$$\eta = \frac{1}{2\pi K} \quad (4.5.7)$$

varia con continuità con K , il che corrisponde ad un comportamento molto diverso rispetto ai sistemi fisici finora studiati.

Ci sono però delle configurazioni in θ di cui lo sviluppo (4.5.3) non tiene conto: i vortici. Come avevamo già visto nell'elio superfluido, nel limite continuo un vortice centrato nel punto (x_o, y_o) di un sistema di riferimento cartesiano è dato da

$$\theta(x, y) = n \alpha = n \arctan[(y - y_o)/(x - x_o)] ,$$

dove l'intero relativo n è la vorticità e α è l'angolo delle coordinate polari con origine nel centro del vortice. A grande distanza dal suo centro un vortice è lentamente variabile e quindi contribuisce a (4.5.3) e per una semplice ragione topologica più volte discussa, questa configurazione è stabile e non si può trascurare

⁷La costante K davanti al logaritmo è dovuta al fatto che l'Hamiltoniana gaussiana non ha la normalizzazione canonica $\frac{1}{2}$ ma $\frac{K}{2}$.

il suo contributo alla funzione di partizione anche quando K è grande, nonostante in prossimità del suo centro vari rapidamente.

Con un conto analogo a quello fatto per l'elio superfluido si può facilmente calcolare l'energia di un vortice tenendo conto che dall'equazione precedente si ha $\partial_\alpha \theta(\vec{x}) \partial^\alpha \theta(\vec{x}) = 1/r^2$ dove r è la distanza di x dal centro del vortice si ha

$$E = n^2 \pi K \log L/b, \quad (4.5.8)$$

dove L è la dimensione lineare del vortice e b è un parametro che fissa la scala microscopica al di sotto della quale le considerazioni topologiche sulle condizioni di continuità del vortice non valgono più. Perché l'energia totale sia finita occorre che la vorticità totale sia zero. Vediamo ora quando le configurazioni di vortice sono termodinamicamente stabili. Supponiamo che il sistema possa essere descritto da un gas rarefatto di vortici e che ogni vortice abbia a disposizione un dominio di area L^2 . Il numero di configurazioni a sua disposizione è L^2/a^2 dove a è il passo reticolare; la sua energia è data dalla (4.5.8), dunque la variazione di energia libera dovuta alla creazione di un vortice è

$$\frac{\Delta F}{\kappa T} = n^2 K \pi \log L/b - 2 \log L/a, \quad (4.5.9)$$

dunque per $K \leq K_{KT} \equiv \frac{2}{\pi}$ i vortici di vorticità 1 sono stabili. Questo valore critico di K , detto punto di Kosterlitz-Thouless (KT), è il punto terminale della linea di punti fissi gaussiani e il sistema per $K > K_{KT}$ si comporta in maniera diversa come ora vedremo.

Per tener conto anche della presenza dei vortici, conviene passare al formalismo gran canonico, con una grand partition function \mathcal{Q} che dipende oltre che da K anche dalla fugacità y_o che controlla il numero di vortici

$$\mathcal{Q} = Z_{gauss} + Z_2 y_o^2 + Z_4 y_o^4 + \dots$$

dove il termine del prim'ordine in y_o non c'è per la condizione sulla vorticità totale nulla. Possiamo riscrivere l'equazione precedente in forma più dettagliata:

$$\mathcal{Q} = Z_{gauss} + y_o^2 \int d^2x d^2y e^{-E(x,y)} + \dots \quad (4.5.10)$$

dove $E(x, y)$ è l'energia (libera) di due vortici con vorticità opposta con centro in x e y . La dimensione di questi vortici è dell'ordine della loro mutua distanza e

la loro energia totale è, per grandi distanze, approssimativamente la somma delle loro energie

$$E(x, y) = 2\pi K \log |x - y|/c,$$

dove c è una costante opportuna. Si può osservare una forte somiglianza della (4.5.10) con la (2.5.1) e la (2.5.3) che consente di leggere le dimensioni di scala x_{y_0} di y_0 . Possiamo riassorbire tutte le varie costanti moltiplicative in gioco nella nuova fugacità y , per cui, utilizzando la (2.5.2), possiamo scrivere

$$a \frac{d}{da} y \equiv \dot{y} = (2 - x_y) y = (2 - \pi K) y = x y,$$

dove x è la costante di accoppiamento che conviene usare al posto di K , dato che si annulla proprio a K_{KT} . L'equazione precedente ci dice che y diventa rilevante per $K < K_{KT}$ e quindi i vortici vengono prodotti in coppia e il sistema si comporta nell'infrarosso come un gas di vortici. È da notare che i vortici di vorticità $n > 1$ corrispondono a costanti di accoppiamento irrilevanti a K_{KT} , come si verifica immediatamente dalle formule precedenti. Continuando con l'analogia alle (2.5.1) e (2.5.3) e la corrispondente OPE, si vede che la fusione di due operatori locali che descrivono la creazione di vortici genera come operatore ϕ_k l'identità, che può essere riassorbito con una modifica (infinitesima) della normalizzazione, e quindi in una modifica di K e dunque di x . La (2.5.2) suggerisce quindi $\dot{x} = A y^2$ dove A è una costante che per consistenza deve essere positiva. Infatti se ci sono vortici, cioè $y \neq 0$, il sistema è più disordinato, dunque per effetto del gruppo di rinormalizzazione K diminuisce, ossia $\dot{x} > 0$. In conclusione le equazioni del gruppo di rinormalizzazione nell'intorno del punto KT si possono scrivere nella forma

$$\dot{y} = x y \tag{4.5.11}$$

$$\dot{x} = A y^2 \tag{4.5.12}$$

Queste sono le equazioni di Kosterlitz. È importante la loro simmetria rispetto a $y \rightarrow -y$ che assicura che i vortici siano prodotti in coppia ed esclude la presenza di altri termini del secondo ordine in queste equazioni.

Dividendo membro a membro le due equazioni possiamo ricavare la forma generale delle traiettorie del RG

$$\dot{y}/\dot{x} \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{x}{A y} \Rightarrow A y^2 - x^2 = c,$$

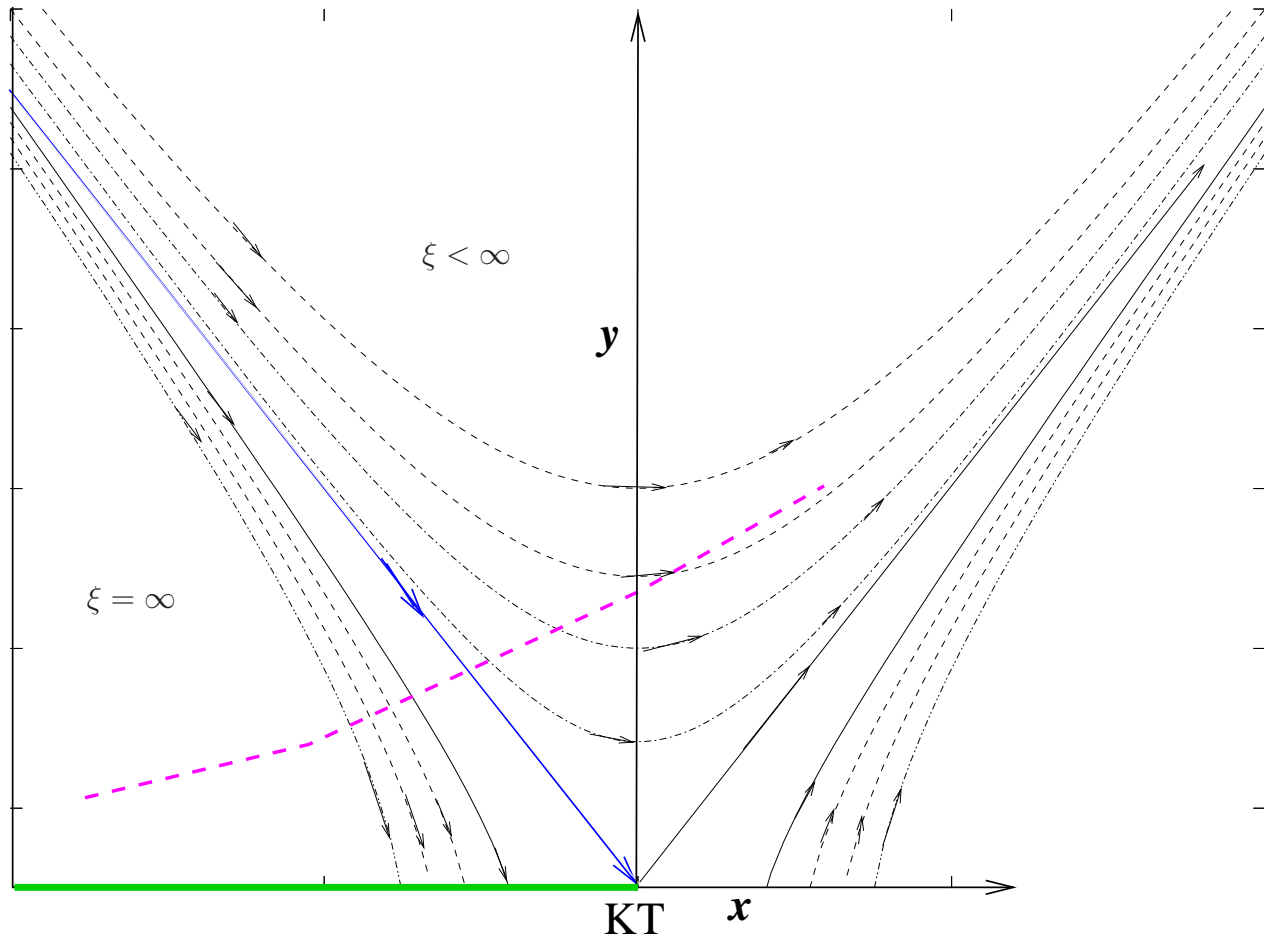


Figure 4.2: Le traiettorie del gruppo di rinormalizzazione di Kosterlitz

che chiaramente formano un fascio di iperboli. Per $c < 0$ esse tagliano l'asse delle x . Nel semipiano $x < 0$ il verso di percorrenza è verso il basso, come vuole la (4.5.11), e terminano lungo la semiretta $y = 0, x \leq 0$ formata dai punti fissi gaussiani. La traiettoria

$$\sqrt{A}y + x = 0, y \leq 0 \quad (4.5.13)$$

è la linea di separazione tra la regione critica ($\xi = \infty$) controllata dalla linea di punti fissi e il resto, controllato da un punto fisso ad alta temperatura che non si può rappresentare nello stesso diagramma dei flussi, che è valido solo per x e y piccoli. Il punto fisso di KT, rappresentato dall'origine nel piano xy , è caratterizzato da valori razionali degli esponenti critici η e δ , infatti ponendo $K = K_{KT}$

nella (4.5.7) e ricordando che $\delta = (d + 2 - \eta)/(d - 2 + \eta)$ si ottiene $\eta = \frac{1}{4}$ e $\delta = 15$. Viceversa ν non è definito (o vale ∞) perchè la legge con cui diverge ξ non è una legge di potenza. Per studiare con che legge ξ diverge, scegliamo un dato modello XY di partenza, ad es. quello definito dalla (4.5.1). Pochè questo modello dipende da un sol parametro, esso sarà rappresentato da una curva nel piano xy (si veda la linea tratteggiata in figura). Poniamoci subito al di sopra della linea critica di KT (4.5.13); in questa regione le traiettorie si possono descrivere con le iperboli $Ay^2 - x^2 = \alpha t$, dove t ha il ruolo di temperatura ridotta, in quanto il sistema diventa critico a $t = 0$. Queste traiettorie possono far evolvere il sistema da un valore iniziale $x = x(0)$ negativo a un valore finale $x(\ell = \log s) > 0$ che conviene scegliere dell'ordine $O(1)$. L'equazione (4.5.12) lungo la suddetta traiettoria dà

$$\dot{x} = \alpha t + x^2, \Rightarrow d\ell = \frac{dx}{x^2 + \alpha t},$$

da cui

$$\int_0^\ell d\ell = \int_{x(0)}^{x(\ell)} \frac{dx}{x^2 + \alpha t} \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha t}}, \quad (t \rightarrow 0).$$

Combinando questo risultato con la nota equazione funzionale per ξ

$$\xi(x(\ell), y(\ell)) \equiv \xi_o = \xi(x(0), y(0)) / \exp[\ell] \equiv \xi/s$$

si ha

$$\xi = \xi_o e^{\pi/\sqrt{\alpha t}}, \quad (4.5.14)$$

dunque ξ diverge secondo una precisa legge esponenziale.

4.5.1 Trasformazione di dualità

Il fattore di Boltzmann associato ai link nel modello XY è una funzione periodica di periodo 2π , e quindi si può sviluppare in serie trigonometrica. In particolare per il modello (4.5.1) si ha

$$e^{K \cos(\theta_i - \theta_j)} = \sum_{m_{ij} \in \mathbb{Z}} I_{m_{ij}}(K) e^{i m_{ij}(\theta_i - \theta_j)} \quad (4.5.15)$$

dove le $I_n(z) = I_{-n}(z)$ sono le funzioni di Bessel modificate. Per i nostri scopi ci basta sapere che per K grande

$$I_n(K)/I_0(K) \sim e^{-n^2/2K}, \quad (K \gg 1). \quad (4.5.16)$$

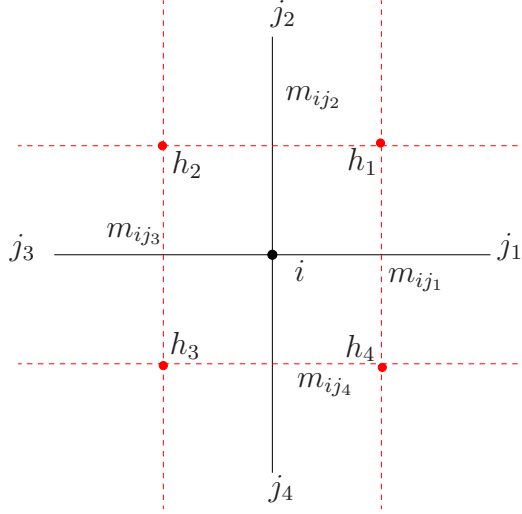


Figure 4.3: I quattro link incidenti sul nodo i e i quattro siti del reticolo duale le cui variabili consentono di risolvere il vincolo (4.5.18)

Inserendo questo sviluppo nella funzione di partizione (4.5.2) si possono integrare esplicitamente tutte le θ ; infatti la variabile θ_i compare solo nei quattro link che incidono sul nodo i (si veda la figura)

$$\int_0^{2\pi} d\theta_i e^{i\theta_i(m_{ij_1}+m_{ij_2}+m_{ij_3}+m_{ij_4})} = \begin{cases} 0 & \sum_n m_{ij_n} \neq 0 \\ 1 & \sum_n m_{ij_n} = 0 \end{cases} \quad (4.5.17)$$

Integrando su tutti i nodi si può riscrivere la Z nella forma

$$Z = \prod_{\langle ij \rangle} \sum_{m_{ij} \in \mathbb{Z}} I_{m_{ij}}(K) \sim I_0^{\text{links}} \prod_{\langle ij \rangle} \sum_{m_{ij} \in \mathbb{Z}} e^{m_{ij}^2/2K} \quad (K \gg 1)$$

dove ora le configurazioni su cui si somma sono i numeri interi relativi m_{ij} associati ai link e l'apice nella somma sta ad indicare che queste somme non sono libere, ma devono soddisfare in accordo con la (4.5.17) il vincolo

$$\sum_{n=1}^4 m_{ij_n} = 0, \forall i. \quad (4.5.18)$$

Un modo semplice per risolvere automaticamente questo vincolo su tutti i nodi nel reticolo quadrato infinito consiste nel prendere in considerazione il reticolo

duale (che è costituito assegnando un nodo al centro di ogni quadrato elementare del reticolo diretto) e di assegnare ad uno dei suoi nodi un intero arbitrario e quindi assegnare ad ogni altro nodo un intero h_j scelto in modo che la differenza $h_j - h_l$ coincida con l'intero m_{jl} associato al link corrispondente del reticolo diretto. Per esempio nel caso rappresentato in figura si ha $m_{ij_n} = h_n - h_{n-1}$. È immediato verificare che

1. In un reticolo infinito si ha per ogni configurazione $\{m_{ij}\}$ di tutti i link del reticolo diretto una configurazione $\{h_i\}$ associata ai nodi del reticolo duale, definita a meno di una costante additiva che è il valore arbitrario del primo nodo duale scelto
2. Il vincolo (4.5.18) è automaticamente soddisfatto per ogni nodo del reticolo diretto
3. La funzione di partizione si può scrivere nella forma

$$Z = \prod_i \sum_{h_i=-\infty}^{\infty} \prod_{\langle ij \rangle} I_{h_i-h_j}(K)$$

4. In questa nuova forma la simmetria manifesta del modello non è più $U(1)$, ma \mathbb{Z} .
5. Interpretando h_i come la distanza del quadrato elementare di posizione $i = (x, y)$ dal piano $z = 0$, ogni configurazione $\{h_j\}$ rappresenta una superficie $h = f(x, y)$.
6. A bassa temperatura (K grande) il fattore di Boltzmann è dominato in base alla (4.5.16) dal termine gaussiano

$$e^{-\sum_{\langle ij \rangle} (h_i - h_j)^2 / 2K},$$

quindi per K grande anche la differenza $h_i - h_j$ può essere grande, perciò le configurazioni dominanti sono rappresentate da superfici molto rugose o *rough*. Tutta la regione critica del modello XY, caratterizzata da una variabile θ lentamente variabile corrisponde alla fase *rough* delle superfici. Viceversa la regione non critica, dove vengono liberati i vortici corrisponde a superfici lisce o *smooth*. La transizione di KT viene detta in questo linguaggio *roughening transition*.

Questa transizione è ubiquitaria in natura. Si può osservare ad esempio nella superficie di crescita dei cristalli o nelle interfacce di separazione tra fasi differenti. Un esempio concreto e molto studiato si ha nel modello di Ising tridimensionale a bassa temperatura. Supponiamo di fissare le condizioni al bordo in modo che nel piano $z = \infty$ tutti gli spin siano $S = +1$ e nel piano $z = -\infty$ siano invece $S = -1$; si formerà necessariamente un'interfaccia che separa le due fasi con magnetizzazione opposta. A $T \rightarrow 0$ l'interfaccia che minimizza l'energia libera sarà un piano ortogonale all'asse z ; l'energia non dipende dalla posizione dell'interfaccia. Man mano che la temperatura aumenta cominceranno a contribuire anche le interfacce formate da superfici lentamente variabili: la loro energia interna aumenta ma aumenta anche la loro entropia. Ad un valore critico T_R della temperatura, che è notevolmente più basso della temperatura di smagnetizzazione di Curie T_c , avviene la transizione di roughening, caratterizzata da interfacce rapidamente variabili e fluttuanti.

Alcune osservazioni finali:

- La trasformazione di dualità è una tipica trasformazione dei modelli con simmetria abeliana che generalizza la trasformazione di Kramers-Wannier già vista nel modello di Ising bidimensionale.
- Essa consiste essenzialmente nel rimpiazzare le variabili di gruppo con variabili associate alle rappresentazioni irriducibili.
- Solo nei gruppi abeliani il duale G^* di un gruppo G , cioè l'insieme delle sue rappresentazioni irriducibili, forma a sua volta un gruppo (necessariamente abeliano).
- $(G^*)^* = G$
- $U(1)^* = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_N^* = \mathbb{Z}_N$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$

4.6 Il modello $O(n > 2)$ non lineare in 2 dimensioni

La transizione di KT non è una transizione ordine-disordine, ma è prodotta dalla presenza di vortici, cioè di configurazioni non banali e topologicamente stabili. Un vortice è caratterizzato dal fatto che un cammino chiuso γ nel piano π in cui è definito il modello nel limite continuo è mappato nel cerchio trigonometrico S_1

dei possibili valori della variabile di spin in un cammino chiuso Γ_n che avvolge n volte S_1 , con $n \neq 0$:

$$\gamma \subset \pi \rightarrow \Gamma_n \subset S_1 \quad n \neq 0.$$

Poichè Γ_n non è omotopo a zero (cioè non può essere ridotto con continuità a un punto) i vortici son stabili.

La situazione è molto diversa quando il gruppo di simmetria del modello bidimensionale è $O(n)$ con $n > 2$. Consideriamo un modello bidimensionale definito dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2T} \int d^2x \sum_{a=1}^n \partial_\alpha \phi^a \partial^\alpha \phi_a \quad (4.6.1)$$

dove ϕ_a sono le n componenti di un vettore unitario:

$$\sum_{a=1}^n \phi_a(x)^2 = 1. \quad (4.6.2)$$

Ogni vettore individua un punto della sfera unitaria S_{n-1} che è una varietà semplicemente connessa per ogni $n > 2$, cioè ogni cammino chiuso $\Gamma \subset S_{n-1}$ è omotopo a zero, dunque il sistema non possiede configurazioni topologiche stabili e non ci si aspettano transizioni di fase a $T > 0$. Per via del vincolo (4.6.2) non tutti le componenti di ϕ possono essere piccole a piacere. Si può ad es. esprimere la componente ϕ_n in funzione delle altre. Questo mostra chiaramente che il vincolo introduce dei termini di interazione tra i rimanenti campi e per questo motivo questo modello è noto come *modello $O(n)$ (o modello σ) non-lineare*.

Anzichè esprimere un solo campo in funzione degli altri è molto più utile risolvere il vincolo ponendo

$$\phi_i = t_i, \quad (i = 1, \dots, n-2), \quad \phi_{n-1} = \sqrt{1 - t_i t^i} \cos \theta, \quad \phi_n = \sqrt{1 - t_i t^i} \sin \theta.$$

Quindi la funzione di partizione diventa

$$Z = \int \prod_i \mathcal{D}t_i \int \mathcal{D}\theta e^{-H}$$

con

$$H = \frac{1}{2T} \int d^2x \sum_{i=1}^{n-2} \partial_\alpha t^i \partial^\alpha t_i + (1 - t_i t^i) \partial_\alpha \theta \partial^\alpha \theta + \dots$$

Dove i puntini indicano i termini in cui la derivata ∂_α agisce sulla radice e che si puo' dimostrare essere trascurabili. Con questa approssimazione, integrando prima sui campi gaussiani trasversi t_i , si ottiene

$$Z = \int \mathcal{D}\theta e^{-H_{eff}}, \quad H_{eff} = \frac{1}{2T} \int d^2x (1 - \langle t_i t^i \rangle) \partial_\alpha \theta \partial^\alpha \theta, \quad (4.6.3)$$

dove i valori medi sono calcolati rispetto alla misura gaussiana. Quindi questa teoria è equivalente al modello XY con due importanti differenze:

- La costante di accoppiamento effettiva è

$$K_{eff} = (1 - \langle t_i t^i \rangle) / T \quad (4.6.4)$$

- Non ci sono vortici, per cui l'equazione del gruppo di rinormalizzazione è semplicemente

$$a \frac{d}{da} K_{eff} \equiv \dot{K}_{eff} = 0. \quad (4.6.5)$$

Per scriverla in forma esplicita bisogna calcolarsi il correlatore gaussiano

$$\langle t_i(0) t^j(0) \rangle = \delta_i^j \frac{T}{(2\pi)^2} \int_{\frac{1}{L}}^{\frac{1}{a}} \frac{d^2k}{k^2} = \delta_i^j \frac{T}{2\pi} \log L/a,$$

dove si è usata la solita rappresentazione integrale del correlatore gaussiano. Essendo la teoria in due dimensioni, oltre al cut-off ultravioletto $1/a$ si deve introdurre anche un cut-off infrarosso $1/L$ per i noti problemi del correlatore gaussiano bidimensionale nel limite termodinamico. Inserendo questa espressione nella (4.6.5) si ha subito

$$\dot{T} = \frac{n-2}{2\pi} T^2. \quad (4.6.6)$$

Quest'equazione è simile, ma di segno opposto all'eq.(2.5.10) per l'accoppiamento u della teoria ϕ^4 , quindi T è *marginalmente rilevante*, cioè T cresce al crescere del passo reticolare, dunque T si annulla nel limite continuo. Questa proprietà, che riveste grande importanza nella teoria quantistica dei campi, è detta libertà asintotica o *asymptotic freedom*.

Un'altra proprietà importante di questo modello bidimensionale è che la sua Hamiltoniana (4.6.1) è invariante di scala e non contiene nessun parametro dimensionale. Eppure T che è adimensionale, dipende esplicitamente dal passo reticolare (altrimenti l'equazione (4.6.6) sarebbe invece banalmente $\dot{T} = 0$). L'unico

modo in cui la quantità dimensionale a può apparire in T è attraverso la combinazione adimensionale $T = T(a\Lambda)$, dove Λ è una costante che ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza (ossia di una massa), ma non dipende dal cut-off a

$$a \frac{d}{da} \Lambda = 0 . \quad (4.6.7)$$

Dunque Λ è una grandezza dimensionale e fisica perchè indipendente dal cut-off che non c'era nella teoria classica di partenza, che è invariante di scala. La comparsa di questa scala fisica è dunque un fenomeno prodotto dalla formulazione della teoria mediante l'integrazione funzionale (somma sulle configurazioni) e quindi è un fenomeno quantistico, detto *trasmutazione dimensionale*.

La dipendenza della scala fisica Λ da T si ottiene osservando che per ragioni dimensionali, essendo a l'unica scala della teoria regolarizzata, $\Lambda = \frac{f(T)}{a}$, dove $f(T)$ è una funzione adimensionale da determinare. La (4.6.7) dà

$$-f(T) + \frac{df}{dT} T = 0, \Rightarrow \frac{df}{f} = \frac{dT}{\frac{n-2}{2\pi} T^2}$$

da cui, indicando con C la costante di integrazione,

$$f(T) = C e^{-\frac{2\pi}{(n-2)T}} . \quad (4.6.8)$$

Naturalmente questa forma funzionale vale per ogni grandezza fisica della teoria. In particolare l'inverso della lunghezza di correlazione $\xi^{-1} \propto f(T)$, a conferma che in questo modello la transizione di fase avviene solo a $T = 0$ e la lunghezza di correlazione cresce con una legge esponenziale.

4.6.1 Il modello $O(n)$ non lineare in $2+\epsilon$ dimensioni

Il calcolo precedente si può facilmente adattare in $d = 2 + \epsilon$ dimensioni nel limite $\epsilon \rightarrow 0$. l'Hamiltoniana è ora ⁸

$$H = \frac{K}{2} \int \frac{d^d x}{a^\epsilon} \sum_{a=1}^n \partial_\alpha \phi^a \partial^\alpha \phi_a . \quad (4.6.9)$$

⁸Si noti che la dipendenza dal passo reticolare è diversa rispetto al caso puramente gaussiano per via del vincolo (4.6.2) che implica che il campo ϕ_a è adimensionale. Di conseguenza il coefficiente del termine cinetico non è marginale in $2 + \epsilon$ dimensioni.

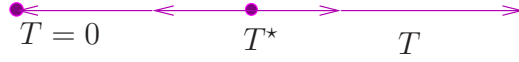


Figure 4.4: Il flusso del gruppo di rinormalizzazione in una teoria con simmetria $O(n)$ in $2 + \epsilon$ dimensioni.

Applicando la trasformazione del gruppo di rinormalizzazione di parametro $s a \rightarrow s a$ si desume che ora l'equazione del gruppo di rinormalizzazione non è piú data dalla (4.6.5), ma assume la forma

$$\dot{K}_{eff} = \epsilon K_{eff} . \quad (4.6.10)$$

D'altra parte il correlatore gaussiano dei campi trasversi è ora

$$\langle t_i(0) t^j(0) \rangle = \delta_i^j \frac{a^\epsilon}{K(2\pi)^d} \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{d^d k}{k^2} = \delta_i^j \frac{1}{K\epsilon} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} , \quad \Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

da cui

$$\langle t_i t^i \rangle = \frac{n-2}{2\pi K \epsilon} .$$

Quindi $\dot{K}_{eff} = \dot{K}$. Ponendo $K = 1/T$ si ha allora

$$\dot{T} = -\epsilon T + \frac{n-2}{2\pi} T^2 \quad (4.6.11)$$

che ha due punti fissi (v. Figura), $T = 0$ (punto fisso stabile, cioè T irrilevante) e $T^* = \epsilon \frac{2\pi}{n-2}$ che è un punto fisso instabile, infatti linearizzando l'equazione precedente ponendo $T = T^* + \delta T$ si trova, con lo stesso calcolo fatto per la teoria ϕ^4 in $4 - \epsilon$ dimensioni (si veda il § (2.5.1)), che δT ha autovalore $x = \epsilon > 0$ ed è quindi rilevante.

In conclusione il sistema con simmetria $O(n)$, in base al flusso delle traiettorie del RG determinata dai punti fissi, ha una fase ordinata nell'intervallo $T \leq T^*$; questa fase si riduce a 0 nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, come previsto dal valore delle dimensioni critiche inferiori di un sistema con simmetria continua.

Chapter 5

Simmetrie locali

5.1 Il fenomeno di Higgs

Il teorema di Goldstone non vale per la rottura sponontanea di una simmetria locale (cioè una simmetria i cui parametri sono funzioni arbitrarie dello spazio-tempo) come la simmetria di gauge.

Vedremo che si manifesta un nuovo fenomeno. Consideriamo il modello di Landau-Ginsburg per un campo scalare carico, cioè sostituiamo al campo scalare reale $\phi(x)$ che abbiamo considerato nei sistemi magnetici un campo scalare complesso $\psi(x)$. Per maggiore generalità consideriamo una teoria dipendente anche dal tempo. Essendo ψ un campo carico, si accoppia al campo elettromagnetico. Questo accoppiamento si ottiene semplicemente sostituendo alla derivata ∂_μ le derivate covarianti \mathcal{D}_μ :

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x),$$

dove $A_\mu(x)$ è il potenziale o campo di gauge. Con questa sostituzione la densità Lagrangiana

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2} (\mathcal{D}^\mu \psi)^* (\mathcal{D}_\mu \psi) - V(|\psi|),$$

dove V è il potenziale di Landau-Ginzburg: $V(|\psi|) = \frac{t}{2} |\psi|^2 + \frac{u}{4!} |\psi|^4$, è invariante per trasformazioni locali di gauge

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i \frac{e}{\hbar c} \omega} \psi(x) = \psi'(x) \quad (5.1.1)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \omega(x) = A'_\mu, \quad (5.1.2)$$

dove $\omega(x)$ è una funzione (derivabile) arbitraria di x_μ .

L'invarianza di \mathcal{L} è una immediata conseguenza del fatto che $V(|\psi'|) = V(|\psi|)$ e che la derivata covariante si trasforma nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \psi(x) &\rightarrow \left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A'_\mu(x) \right) \psi'(x) = \left[\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} (A_\mu(x) + \partial_\mu \omega) \right] e^{-i \frac{e}{\hbar c} \omega} \psi(x) \\ &= e^{-i \frac{e}{\hbar c} \omega} \mathcal{D}_\mu \psi(x), \end{aligned}$$

per cui $|\mathcal{D}_\mu \psi|^2$ è invariante. Poiché ψ si accoppia al campo elettromagnetico, la densità Lagrangiana completa contiene anche il contributo del campo elettromagnetico

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}_{em} dx^4 &= - \int \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dx^4 = \int \left(\frac{1}{2} A^\mu \square A_\mu - \frac{1}{2} A^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu \right) dx^4 \\ \square &= \frac{d^2}{dt^2} - \Delta \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ E^k &= F^{ko}, B^k = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{ij} \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_\psi \end{aligned}$$

Le equazioni del moto per i campi ψ e A_μ si ottengono imponendo la stazionarietà dell'azione

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^*} = 0.$$

Nella fase a simmetria spontaneamente rotta (detta anche *fase ordinata*) possiamo utilizzare l'invarianza di gauge per fare in modo che $\psi(x)$ sia reale per ogni x . Infatti, poiché in generale il campo ψ si può parametrizzare nella forma $\psi(x) = \phi(x) e^{i\theta(x)}$, dove $\phi(x)$ è un campo reale, basta scegliere $\frac{e}{\hbar c} \omega(x) = \theta(x)$ per avere $\psi'(x) = \phi(x)$. Questa scelta di gauge è nota come *gauge unitario*.¹ In questo gauge è facile verificare che le eq. del moto assumono la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -\frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta A_\nu} = -\frac{e^2}{(\hbar c)^2} \phi^2(x) A^\nu(x)$$

¹E' importante osservare che il gauge unitario è ben definito solo nella fase ordinata, dove $\phi(x) \neq 0$ e quindi $\theta(x)$ è sempre ben definita. Viceversa nei punti in cui ψ si annulla, θ non è necessariamente definita e quindi la trasformazione di gauge cercata è singolare o non esiste.

$$\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu \phi(x) = -\frac{\delta}{\delta \phi} V(\phi) = -t\phi - \frac{u}{6}\phi^3 = \frac{u}{6}\phi(x)[\phi_o^2 - \phi^2(x)],$$

dove ϕ_o e' il minimo del potenziale nella fase in cui la simmetria e' spontaneamente rotta: $\phi_o^2 = -\frac{6t}{u}$. Lo stato fondamentale corrisponde alla configurazione $\phi(x) = \phi_o$, $A_\mu(x) = 0$.

Per studiare lo spettro delle eccitazioni attorno allo stato fondamentale possiamo utilizzare un metodo molto generale, che consiste nel considerare piccole perturbazioni della configurazione di campo corrispondente allo stato fondamentale. Le equazioni del moto linearizzate di queste perturbazioni forniscono direttamente lo spettro della teoria. Nel caso in questione poniamo $\phi(x) = \phi_o + \bar{\phi}(x)$ e consideriamo $\bar{\phi}(x)$ e $A_\mu(x)$ delle piccole fluttuazioni, in modo da poter linearizzare le eq. del moto:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -\frac{e^2}{(\hbar c)^2} \phi_o^2 A^\nu$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \bar{\phi}(x) \equiv \square \bar{\phi}(x) = -\frac{u}{3} \phi_o^2 \bar{\phi} + O(\bar{\phi}^2)$$

Poiche' $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, $\Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$, e dalla prima eq. $\Rightarrow \partial^\nu A_\nu = 0$, quindi $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu$, e le eq. del moto delle fluttuazioni attorno alla config dello stato fondamentale si possono scrivere nella forma:

$$\left(\square + \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \phi_o^2 \right) A^\mu(x) = 0 \quad (5.1.3)$$

$$\left(\square + \frac{u}{3} \phi_o^2 \right) \bar{\phi}(x) = 0 \quad (5.1.4)$$

Quindi non ci sono piu' eccitazioni di massa nulla, ma il fotone (descritto dal campo A_μ) acquista una massa $m_g = \frac{e}{\hbar c} \phi_o$ e descrive quindi la propagazione di una eccitazione massiva di spin 1 e il campo $\bar{\phi}(x)$ descrive un' eccitazione scalare (spin 0) di massa $m_H = \sqrt{\frac{u}{3}} \phi_o$, detta particella di Higgs. E' importante notare che se applichiamo lo stesso procedimento per studiare le perturbazioni attorno al vuoto simmetrico ($\phi_o = 0$), si trova che il campo A_μ descrive la propagazione di una particella di massa nulla con solo due stati di polarizzazione, quindi bastano le due componenti $A_1(x)$ e $A_2(x)$ per descriverla. Dunque nella fase simmetrica i campi che descrivono le eccitazioni del sistema sono A_1, A_2, ψ e ψ^* ,² mentre nella fase ordinata $\phi_o \neq 0$ sono sostituiti da A_1, A_2, A_3 e $\bar{\phi}$. Si puo' quindi dire che la natura locale della simmetria $U(1)$ trasforma il potenziale bosone di Goldstone

²Nella fase simmetrica non si puo' usare il gauge unitario per la ragione esposta nella nota precedente

nella 3^a componente (quella a polarizzazione longitudinale) del campo di gauge massivo.

Il meccanismo attraverso il quale un campo di gauge acquista una massa non nulla e' detto meccanismo o fenomeno di Higgs. Puo' avvenire anche per simmetrie di gauge non abeliane ed e' alla base della teoria delle interazioni elettrodeboli. Il fenomeno di Higgs per il campo scalare che abbiamo descritto fornisce una teoria fenomenologica accurata della superconduttivita' come ora vedremo.

5.2 Superconduttività

Moltissimi conduttori non ferromagnetici, al di sotto di una temperatura critica (che di solito è molto bassa: qualche decina di $^{\circ}K$) subiscono una transizione a uno stato superconduttore, in cui il sistema ha una resistenza sperimentalmente nulla: la corrente elettrica fluisce attraverso il superconduttore senza sviluppare calore Joule. La prima osservazione sperimentale della superconduttività risale al 1911, quando Kamerlingh Onnes osservò che la resistenza elettrica del mercurio, al di sotto di $4.2^{\circ}K$, cade bruscamente a zero.

In condizioni stazionarie non ci può essere un campo elettrico non nullo nel superconduttore, in quanto ogni differenza di potenziale implica una resistenza non nulla.

Ci sono molti effetti associati a questo comportamento, principalmente legati al campo magnetico.

Siccome un campo magnetico variabile genera un campo elettrico, un conduttore senza resistenza non può contenere un campo magnetico variabile. Questo spiega i due fenomeni seguenti:

- Se un superconduttore di forma sferica viene posto in un campo magnetico, le sue linee di flusso sono spinte fuori dal superconduttore.
- Se un anello superconduttore è posto in un campo magnetico, il flusso magnetico concatenato con l'anello rimane invariato anche dopo lo spengimento del campo magnetico esterno: poichè la resistenza elettrica dell'anello è nulla c'è una corrente che continua a circolare indefinitamente per mantenere il flusso magnetico concatenato a un valore costante.

Infine si osserva che, se un conduttore è posto in un campo magnetico B è raffreddato fino allo stato superconduttivo, il campo magnetico è espulso dal superconduttore. Quest'ultimo fenomeno, detto *effetto Meissner*, mostra che il superconduttore è un perfetto diamagnete, e non è semplicemente riconducibile al fatto che il superconduttore ha resistenza nulla.

Se l'intensità del campo magnetico esterno B supera una soglia critica B_{crit} l'effetto Meissner non può avvenire e il sistema non diventa superconduttivo (cio' spiega perchè il ferro e gli altri conduttori ferromagnetici non diventano superconduttori).

5.2.1 La teoria BCS

Dopo piu' di 50 anni dalla scoperta della superconduttività Bardeen, Cooper e Schrieffer posero le basi per una teoria microscopica della superconduttività, fondata sul fatto che elettroni di un superconduttore, interagendo con i fononi del reticolo cristallino in cui sono immersi, formano (nonostante la repulsione coulombiana) delle coppie con spin antiparallelo dette *coppie di Cooper*³ che si comportano come eccitazioni (o quasi particelle) bosoniche; queste coppie che trasportano una carica $e = 2q$, dove q è la carica dell'elettrone, possono essere descritte da una funzione d'onda o campo scalare carico ψ , in interazione col campo elettromagnetico, quindi la teoria è invariante per la simmetria $U(1)$ di gauge. In analogia a quanto avevamo fatto per l'elio liquido, supponiamo che ψ sia normalizzata in modo che $|\psi(x)|^2$ rappresenti la densità di coppie di Cooper nel punto x . Dal punto di vista della meccanica statistica, il campo ψ è un parametro d'ordine che ha un ruolo analogo alla magnetizzazione spontanea nei sistemi magnetici; il suo valore di attesa $\langle\psi(x)\rangle$ è zero nella fase *simmetrica* ad alta temperatura; viceversa la fase *ordinata* è caratterizzata da un valore di attesa diverso da zero che denota la rottura spontanea della simmetria di gauge. Si puo' dimostrare che nella fase ordinata una frazione finita delle coppie di Cooper occupano lo stato fondamentale; in altri termini, la rottura spontanea della simmetria di gauge⁴

$$\langle\psi\rangle \neq 0$$

corrisponde alla *condensazione delle coppie di Cooper*. Quindi la superconduttività, come la superfluidità nell'elio liquido è un fenomeno quantico macroscopico, in cui una frazione finita dei costituenti del sistema è nello stesso stato fondamentale.

Gli ingredienti fondamentali di una teoria fenomenologica della superconduttività sono i due seguenti:

- Le coppie di Cooper sono descritte da un campo scalare complesso $\psi(x)$ (quindi la teoria ha una simmetria $U(1)$ locale e si accoppia col campo elettromagnetico).
- Condensazione delle coppie di Cooper, cioè $\langle\psi\rangle \neq 0$ al di sotto di una temperatura critica T_c , quindi il potenziale $V(|\psi|)$ del campo ψ puo' essere descritto da una teoria di Landau-Ginzburg.

³Queste coppie sono elettroni che sono vicini non nello spazio delle coordinate, ma nello spazio degli impulsi, quindi sono coppie di elettroni che pur non essendo fisicamente molto vicini (e quindi la repulsione coulombiana è schermata) viaggiano alla stessa velocità.

⁴La rottura spontanea della simmetria ha un significato non ambiguo solo nel gauge unitario

Queste condizioni mostrano che questa teoria fenomenologica non è altro che il modello di Higgs precedentemente descritto, cioè un modello di Landau-Ginzburg per il campo complesso ψ accoppiato minimalmente (cioè mediante la derivata covariante) al campo elettromagnetico. Questa formulazione è nota come modello di Landau-Ginzburg della superconduttività.

5.3 Modello di L-G della superconduttività

In condizioni di equilibrio l'Hamiltoniana di L-G può essere scritta nella forma

$$H = H_{e.m.} + H_\psi$$

$$H_{e.m.} = \int d^3x \frac{1}{2} (E^2 + B^2)$$

$$H_\psi = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} |\vec{D}\psi|^2 + V(|\psi|) \right\}$$

$$\vec{D} = \nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A}, \quad V(|\psi|) = \frac{1}{2} t |\psi|^2 + \frac{u}{4!} |\psi|^4$$

È facile verificare direttamente (v. §5.1) che questo modello è invariante per trasformazioni di gauge:

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c}\omega} \psi(x) = \psi'(x)$$

$$\psi^*(x) \rightarrow e^{i\frac{e}{\hbar c}\omega} \psi^*(x) = \psi'^*(x)$$

$$\vec{A}(x) \rightarrow \vec{A}(x) + \nabla\omega(x) = \vec{A}',$$

dove $\omega(x)$ è una funzione (derivabile) arbitraria di x_μ . Per comodità scegliamo un gauge in cui il potenziale scalare A_0 è zero (questo è sempre possibile in condizioni statiche).

Nella fase a simmetria spontaneamente rotta (detta anche *fase ordinata*) possiamo utilizzare questa invarianza di gauge per fare in modo che $\psi(x)$ sia reale per ogni x . Infatti, poichè il campo ψ si può sempre parametrizzare nella forma $\psi(x) = \phi(x)e^{i\theta(x)}$, dove $\phi(x)$ è un campo reale, basta scegliere $\frac{e}{\hbar c}\omega(x) = \theta(x)$ per avere

$$\psi'(x) = \phi(x)$$

e

$$\vec{A}' = \vec{A} + \frac{\hbar c}{e} \nabla\theta \equiv \vec{\tilde{A}}.$$

Questa scelta di gauge è nota come *gauge unitario*.⁵

Con questa scelta di gauge la teoria è espressa in termini di campi \vec{E} , \vec{B} , $\phi(x)$ e $\vec{A}(x)$

$$\Rightarrow H = H_{e.m.} + \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \hat{A}^2 \phi^2 + V(\phi) \right\}$$

Lo stato di equilibrio termico del sistema corrisponde al minimo dell'energia libera di Helmholtz. Nell'approssimazione di Landau (che è stata già utilizzata nella descrizione dei sistemi magnetici) l'energia libera coincide con l'Hamiltoniana, quindi lo stato di equilibrio termico corrisponde alle configurazioni di minima energia.⁶ In questa approssimazione il valore di minimo del campo ϕ coincide con il suo valore di attesa, cioè

$$\langle \phi \rangle = \phi$$

Le condizioni di minimo o, meglio, di stazionarietà dell'Hamiltoniana sono

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} = 0,$$

$$\frac{\delta H}{\delta \vec{A}} = 0.$$

Avendo posto $\hat{A}_o = 0$ e osservando che in condizioni stazionarie $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ si ha⁷

$$\text{rot } \vec{B} + \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \phi^2(x) \vec{A} = 0 \quad (5.3.1)$$

$$-\Delta\phi + \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \hat{A}^2 \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (5.3.2)$$

Per un conduttore molto grande, lontano dai bordi, il sistema è invariante per traslazioni, $\Rightarrow \Delta\phi = \text{rot } \vec{B} = 0$, perciò il sistema di condizioni di equilibrio diventa un sistema algebrico:

$$\phi^2 \vec{A} = 0$$

⁵E' importante osservare che il gauge unitario è ben definito solo nella fase ordinata, dove $\phi(x) \neq 0$ e quindi $\theta(x)$ è sempre ben definita. Viceversa nei punti in cui ψ si annulla, θ non è necessariamente definita e quindi la trasformazione di gauge cercata è singolare o non esiste.

⁶In condizioni statiche la densità hamiltoniana è uguale alla densità lagrangiana cambiata di segno, per cui le equazioni del moto di \vec{A} e ϕ indipendenti dal tempo ci possono fornire direttamente le condizioni di minimo dell'energia.

⁷utilizzando ad esempio l'identità $\frac{1}{2} \int d^3x B^2 = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{A} \cdot \nabla \wedge \vec{B})$.

$$\frac{e^2}{(\hbar c)^2} \hat{A}^2 \phi + \frac{dV}{d\phi} = \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \hat{A}^2 \phi + t\phi + \frac{u}{6} \phi^3 = 0$$

da cui discende che la soluzione $\phi = 0$ esiste sempre, e in questo caso \vec{A} è indeterminato,⁸ quindi il campo magnetico \vec{B} è arbitrario \Rightarrow non c'è effetto Meissner. Viceversa,

$$\text{se } \phi = \phi_o \neq 0 \Rightarrow \vec{A} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = 0 & (\text{effetto Meissner}) \\ \phi_o : \frac{dV}{d\phi} = 0 \end{cases}$$

quindi la fase a simmetria spontaneamente rotta del modello di *LG* corrisponde proprio allo stato superconduttore.

Notare che $\phi_o \neq 0$ solo per $t < 0$, dove al solito si avrà $t = \frac{T-T_c}{T_c}$.

Confrontando l'eq. di minima energia per il campo magnetico $\text{rot } \vec{B} = -\frac{e^2}{(\hbar c)^2} \phi^2(x) \vec{A}$ con l'equazione di Maxwell

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{\vec{j}}{c}$$

si ha

$$\vec{j} = -\frac{ce^2}{(\hbar c)^2} \phi^2 \vec{A}$$

- *Effetti di bordo*

In prossimità dei bordi non possiamo più supporre che il sistema sia invariante per traslazioni e quindi i campi diventano funzioni della distanza dal bordo. Quindi il bordo introduce una perturbazione dello stato fondamentale (che è invariante per traslazioni). Questa perturbazione è in genere piccola, per cui possiamo porre nelle condizioni di equilibrio (5.3.1) e (5.3.2)

$$\phi(x) = \phi_o + \bar{\phi}(x)$$

e considerare solo i termini lineari in $\bar{\phi}$ e \vec{A} . In questa approssimazione dalla prima equazione si ha $\text{rot } \vec{B} \propto \vec{A}$. Poichè la divergenza di un rotore è identicamente nulla, si ha $\text{div } \vec{A} = 0$ e quindi $\text{rot } \vec{B} = -\Delta \vec{A}$. Di conseguenza le condizioni di equilibrio diventano

$$(-\Delta + \lambda^{-2}) \vec{A}(x) = 0, \quad \lambda^2 = \frac{(\hbar c)^2}{e^2 \phi_o^2}$$

⁸In questo caso va però osservato che il gauge unitario non è ben definito e occorrerebbe scrivere le condizioni di minimo in forma invariante di gauge, come faremo in seguito per altri scopi.

$$(-\Delta + \xi^{-2})\bar{\phi}(x) = 0, \quad \xi^2 = \frac{3}{u\phi_o^2}$$

dove $m_G = 1/\lambda$ e $m_H = 1/\xi$ non sono altro che le masse del fotone massivo e del campo di Higgs introdotte nel § 5.1.

Consideriamo un conduttore che idealmente riempia omogeneamente tutto il semispazio $x > 0$

$$\phi_o = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{superconduttore} \\ \phi_o \neq 0 \end{array} \right.$$

In queste condizioni il sistema è solo funzione della variabile $x \Rightarrow \Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ e le soluzioni delle eq. precedenti si possono scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} \vec{A}(x) &= \vec{A}_o e^{-\frac{x}{\lambda}}, \\ \phi(x) &= \phi_o \left(1 - e^{-\frac{x}{\xi}}\right). \end{aligned}$$

λ è la *lunghezza di penetrazione*; ξ è nota invece come *lunghezza di coerenza*. λ e ξ sono le due scale che intervengono nella descrizione della superconduttività. Queste due scale descrivono anche la lunghezza di correlazione delle eccitazioni che si possono propagare in un superconduttore omogeneo. Infatti è noto che per studiare lo spettro delle eccitazioni di un dato sistema occorre valutare i correlatori dei campi in gioco; dalla legge di decadimento esponenziale si può leggere la lunghezza di correlazione delle possibili eccitazioni. Nel sistema in esame si possono definire due tipi di correlatori: quello tra i campi di materia $\langle \phi(0)\phi(\vec{r}) \rangle$ e quello tra i campi di gauge $\langle \vec{A}(0)\vec{A}(\vec{r}) \rangle$. Si può dimostrare che il comportamento asintotico di questi correlatori è lo stesso di quello prodotto dall'effetto dei bordi, cioè

$$\begin{aligned} \langle \phi(0)\phi(\vec{r}) \rangle &\rightarrow c e^{-\frac{r}{\xi}}, \\ \langle \vec{A}(0)\vec{A}(\vec{r}) \rangle &\rightarrow c' e^{-\frac{r}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Perciò lo spettro contiene un singoletto, legato al campo di materia ϕ , associato alla lunghezza di correlazione ξ e un tripletto, associato al campo di gauge \vec{A} , di lunghezza di correlazione λ .

Vedremo che molte proprietà del sistema dipendono dal rapporto di queste due scale. Si trovano in natura due tipi di superconduttori:

- 1) $\xi > \lambda$ Superconduttore di tipo I: c'è uno schermaggio totale del campo magnetico a $B = 0$ e un valore critico B_c al di sopra del quale si ha una fase normale con penetrazione completa di B .
- 2) $\xi < \lambda$ Superconduttore di tipo II: schermaggio completo a $B = 0$, una prima transizione a una fase *mista* a B_{c1} e una seconda transizione a una fase normale a B_{c2} , con $B_{c1} < B_c < B_{c2}$. La fase mista è caratterizzata dal fatto che il superconduttore ha resistenza nulla ma non è più un perfetto diamagnete: il campo magnetico riesce a penetrare.

Per studiare questo comportamento dobbiamo calcolarci la funzione di energia libera di Gibbs.

5.3.1 Funzione di energia libera di Gibbs

L'energia libera di Helmholtz coincide, nell'approssimazione di Landau che stiamo di fatto usando, con l'Hamiltoniana per lo stato fondamentale. Perciò trascurando gli effetti di bordo si ha, utilizzando il fatto che il valore del potenziale nel minimo è dato da $V(\phi_o) = \frac{t}{4}\phi_o^2$,

$$F_{normal} = \frac{B^2}{2}V, \quad F_{super} = \frac{t}{4}\phi_o^2V + \frac{B^2}{2}V$$

dove V è il volume del superconduttore e \vec{B} è il campo magnetico indotto dal campo di materia ϕ , e abbiamo già visto che $\frac{\delta F}{\delta \vec{A}} = 0 \Rightarrow \nabla \wedge \vec{B} = \vec{j}_\phi/c$ dove abbiamo posto $\vec{j}_\phi = -\frac{e^2}{\hbar^2}\phi^2(x)\vec{A}$.

Introduciamo ora un campo magnetico esterno, che per comodità indichiamo con \vec{H} . \vec{H} è associato a una densità di corrente esterna \vec{j}_{ext} da

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j}_{ext}/c$$

\Rightarrow Il campo magnetico totale \vec{B} soddisferà l'equazione

$$\nabla \wedge \vec{B} = \vec{j}_{tot}/c = (\vec{j}_\phi + \vec{j}_{ext})/c \quad (5.3.3)$$

Si è già visto (nei sistemi magnetici) che le condizioni di equilibrio in presenza di un campo esterno si ottengono non dalla variazione di F ma dalla variazione dell'energia libera di Gibbs Γ . La definizione di Γ nei sistemi diamagnetici (come

i superconduttori) è diversa da quella utilizzata per i sistemi magnetici. E' immediato verificare che ponendo

$$\Gamma = F - \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{H}}V, \quad F = H_\phi + \frac{B^2}{2}V$$

si ha, imponendo $\frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{A}} = 0$,

$$\frac{\delta H[\phi]}{\delta\hat{A}} + \nabla \wedge \vec{B} - \nabla \wedge \vec{\mathcal{H}} = 0$$

che coincide con la (5.3.3). Quindi Γ puo' essere considerata l'energia libera di Gibbs Γ ed in condizioni di equilibrio termico è una funzione di T e B .⁹

Nella fase normale ($\phi_o = 0$) non c'è campo magnetico indotto $\Rightarrow \vec{B} = \vec{\mathcal{H}}$

$$\Gamma_{normal} = H[\phi = 0] - \frac{B^2}{2}V = -\frac{B^2}{2}V$$

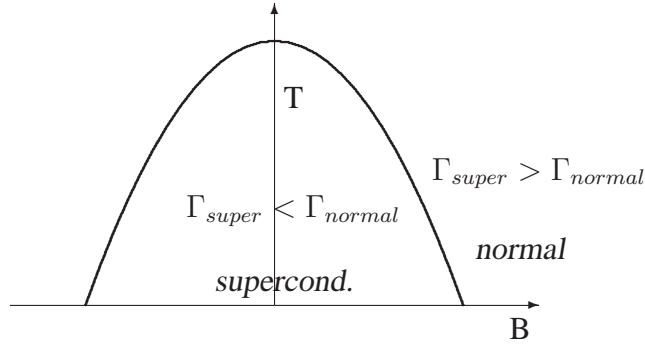
Nella fase superconduttrice ($\phi = \phi_o$) il campo B è completamente schermato $\Rightarrow \vec{B} = 0$, perciò

$$\Gamma_{super} = H[\phi_o] = \frac{t}{4}\phi_o^2V = -\frac{3}{2}\frac{t^2}{u}V$$

Poichè Γ è un potenziale termodinamico che per trasformazioni a T e B costanti è minimo per le configurazioni in equilibrio termico, per valori di T e B sufficientemente piccoli il sistema si troverà nella fase superconduttrice e quindi $\Gamma_{super} < \Gamma_{normal}$; la linea di transizione alla fase normale sarà allora data da

$$\Gamma_{super}(T, B_{crt}) = \Gamma_{normal}(T, B_{crt}),$$

⁹Nei gas l'energia libera di Gibbs è funzione di T e di P ; nel nostro caso la pressione può essere identificata con l'energia per unità di volume necessaria per espellere il campo magnetico, quindi $P = \frac{1}{2}B^2$.



Dall'equazione precedente si ha

$$\Gamma_{super} = -\frac{B_{crt}^2}{2}V$$

$$B_{crt}^2 = -\frac{t}{2}\phi_o^2 = \frac{3t^2}{u} \propto (T_c - T)^2 \quad (5.3.4)$$

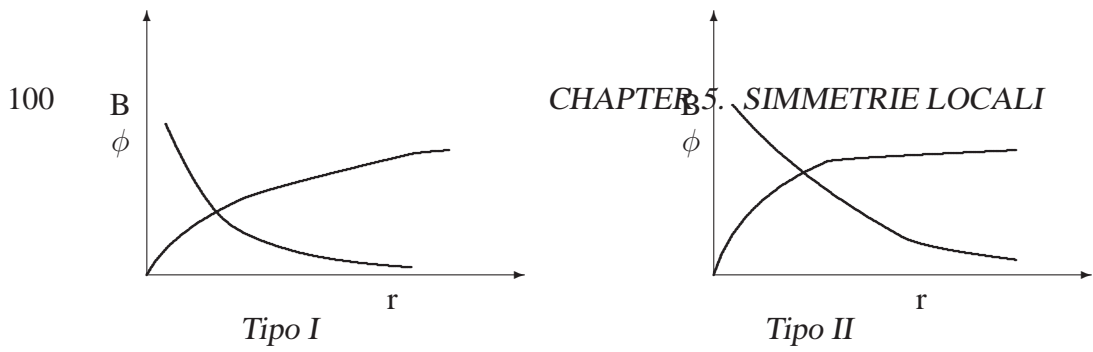
Sperimentalmente si osserva

$$B_{crt} = B_o \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

La predizione teorica di Landau -Ginzburg è in accordo con la legge sperimentale solo per $T \sim T_c$.

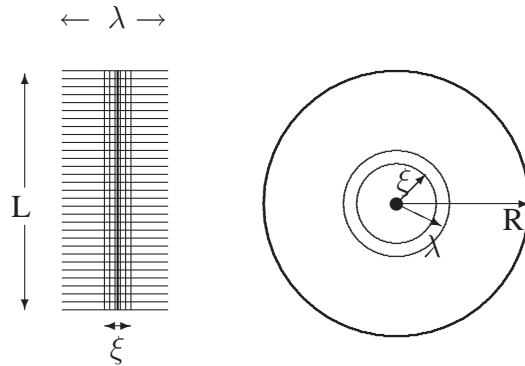
5.3.2 La fase mista

La trattazione precedente non tiene in considerazione gli effetti di bordo e delle fluttuazioni del campo ϕ . Questa approssimazione è giustificata nei superconduttori di tipo I, in cui quando ϕ ha raggiunto il suo valore asintotico ϕ_o , il campo B è già completamente schermato:



Nei superconduttori di tipo II bisogna tener conto degli effetti di bordo, perchè le regioni del conduttore in cui per effetto di fluttuazioni statistiche si sviluppa una fase normale ($\phi \sim 0$) possono essere circondate da un alone in cui il campo magnetico può penetrare; questo alone è nella fase mista. In particolare consideriamo un superconduttore a forma di parallelepipedo, immerso in un campo magnetico perpendicolare a due facce opposte. In queste condizioni acquistano particolare importanza quelle fluttuazioni statistiche del campo ϕ che formano dei filamenti che attraversano il superconduttore lungo cui $\phi \sim 0$. Attorno a tali filamenti si forma un alone di campo magnetico non nullo. Per un valore sufficientemente grande B_{c1} di B questi filamenti accompagnati dai rispettivi aloni possono diventare le configurazioni di equilibrio stabile. Queste configurazioni sono note come *vortici di Abrikosov*; la loro struttura microscopica sarà descritta nel § successivo. In queste condizioni il superconduttore si può riempire di questi filamenti e tutto il sistema transisce nella fase mista.

Per valutare approssimativamente il valore B_{c1} di transizione dalla fase superconduttrice alla fase mista, consideriamo un cilindro superconduttore di base $S = \pi R^2$ e altezza L con un piccolo canale lungo l'asse di simmetria lungo cui può penetrare un campo magnetico questo canale rappresenta il filamento lungo cui $\phi = 0$:



posto $\Gamma = \gamma V = \gamma S L$ dove γ denota la *densità* di energia libera, si ha, per la fase mista

$$\Gamma_{mix} = L\gamma_{super}(S - \pi\xi^2) + L\gamma_{normal}\pi\lambda^2$$

dove $\gamma_{normal} = -\frac{B^2}{2}$ e $\gamma_{super} = -\frac{B_{crt}^2}{2}$ Il valore critico B_{c1} di transizione dalla fase superc. alla fase mista è dato dall'eq.

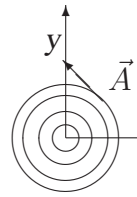
$$\Gamma_{mix}(T, B_{c1}) = \Gamma_{super}(T, B_{c1}) \quad (5.3.5)$$

$$\Rightarrow \xi^2 B_{crt}^2 - \lambda^2 B_{c1}^2 = 0, \quad B_{c1} = \frac{\xi}{\lambda} B_{crt} < B_{crt}$$

Il rapporto $\chi = \frac{\lambda}{\xi}$ è detto parametro di $L - G$. L'equazione (5.3.5) esprime la condizione per cui una fluttuazione del mezzo verso una fase mista è in equilibrio termico con la fase superconduttrice. Poichè B_{c1} deve essere minore di B_{crt} (altrimenti il sistema è già passato nella fase normale) si ha transizione alla fase mista se $\chi > 1$. Per valutare approssimativamente il valore B_{c2} del campo necessario per la transizione dallo stato misto a quello normale conviene fare qualche approssimazione delle eq. di equilibrio (5.3.1, 5.3.2):

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{B} + \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \phi^2 \vec{A} = 0 \\ -\Delta \phi + \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \hat{A}^2 \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \end{cases}$$

Se il sistema è nella fase mista e prossimo a transire nella fase normale, ϕ è vicino a zero e quindi possiamo trascurare il termine ϕ^4 del potenziale. D'altra parte in queste condizioni il campo magnetico può penetrare in tutto il conduttore e quindi possiamo considerare \vec{B} costante. Consideriamo quindi un corpo superconduttore a simmetria cilindrica nella fase mista immerso in un campo magnetico \vec{B} costante orientato lungo l'asse z del cilindro. Allora \vec{A} si può scegliere come un campo tangenziale nel piano x, y :



$$\vec{A}_i = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla \wedge \vec{A} = \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

L'equazione per il campo ϕ diventa

$$-\Delta \phi + \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \frac{B^2}{4} (x^2 + y^2) \phi = -t \phi$$

Questa equazione può essere letta come l'equazione di Schrödinger stazionaria

$$H\phi = E\phi$$

per un oscillatore armonico bidimensionale di Hamiltoniana

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

con

$$\omega = \frac{eB}{2mc}, \quad E = \frac{-\hbar^2 t}{2m}.$$

Questo sistema ha due tipi di soluzione: o $\phi = 0$ (fase normale), o $\phi \neq 0$ (fase mista) e $E = \hbar\omega(n_1 + \frac{1}{2} + n_2 + \frac{1}{2}) = \hbar\omega n$ con $n = 1, 2, \dots$. Scrivendo l'espressione esplicita di ω si ottiene un vincolo sui valori permessi del campo B : $B_n = -t \frac{\hbar c}{ne}$.

Quindi il valore massimo permesso per il campo B è $B_1 = -t \frac{\hbar c}{e}$ che possiamo identificare con B_{c_2} . Dall'eq. (5.3.4) si ha $B_{crt} = -t \sqrt{\frac{3}{u}}$, e poichè $\chi \equiv \frac{\lambda}{\xi} = \sqrt{\frac{u}{3}} \frac{\hbar c}{e}$, possiamo scrivere $B_{c_2} = \chi B_{crt}$.

In conclusione, nei superconduttori di tipo II ($\chi > 1$) esiste una fase (detta fase mista) in cui il sistema, pur essendo superconduttore ($\phi \neq 0$), non è un perfetto diamagnete. Questa fase è caratterizzata dalla comparsa di "difetti" in cui il campo magnetico può penetrare. La fase mista compare in presenza di campi magnetici compresi tra B_{c_1} e B_{c_2} , con

$$B_{c_1} = \frac{1}{\chi} B_{crt}, \quad B_{c_2} = \chi B_{crt}, \quad \chi = \frac{\lambda}{\xi}, \quad B_{crt} = -t \sqrt{\frac{3}{u}}$$

dove B_{crt} è il campo critico di transizione dalla fase superconduttrice alla fase normale.

5.3.3 Vortici di Abrikosov

I vortici di Abrikosov possono essere considerati delle configurazioni di equilibrio di energia finita (rispetto all'energia dello stato fondamentale).

Una soluzione a energia finita (detta anche *solitone* del modello di $L - G$ deve soddisfare le condizioni $H_\psi - H_{\phi_0} < \infty$ e $H_{e.m.} = \int d^3x \frac{B^2}{2} < \infty$, quindi per ogni coordinata $x \rightarrow \infty$ si ha $B^2 = o(x^{-3})$, ossia $B = o(x^{-\frac{3}{2}})$

$$\Rightarrow \vec{A} = \text{puro gauge} + o(x^{-\frac{1}{2}}) = \nabla\omega + o(x^{-\frac{1}{2}})$$

Analogamente per il campo di materia si ha

$$V(\psi) - V(\phi_o) = o(x^{-3}) \Rightarrow \psi = \phi_o e^{i\theta(x)} + o(x^{-\frac{3}{2}})$$

Consideriamo ora una sezione piana del nostro sistema. Prendendo in questo piano un cerchio $C(R)$ di raggio R molto grande, non essendoci nessuna direzione privilegiata, la fase $\theta(x)$ dipenderà solo dall'angolo α di un sistema di coordinate polari ρ, α , perciò poniamo $\theta = \theta(\alpha)$ e quindi

$$\psi = \psi(\theta) + o(x^{-\frac{3}{2}}).$$

Il comportamento all' ∞ del campo ψ stabilisce una mappa $\alpha \rightarrow \theta$ tra il cerchio all'infinito e la fase θ . Poichè ψ è a un sol valore, $\Rightarrow \psi(\alpha) = \psi(\alpha + 2\pi) \Rightarrow \theta(\alpha + 2\pi) = 2n\pi + \theta(\alpha)$ possiamo in generale porre $\theta(\alpha) = n\alpha + \beta(\alpha)$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $\beta(\alpha + 2\pi) = \beta(\alpha)$ è una funzione periodica regolare. Se $n \neq 0$ e ψ non è singolare (come deve essere se l'energia è finita) esiste almeno un punto, nel piano in cui giace il cerchio $C(R)$, per cui ψ si annulla; infatti al variare del raggio R , n non può cambiare se ψ è una f. continua e quindi, riducendo il raggio di questo cerchio c'è almeno un punto in cui la fase di ψ non può essere definita e perciò in quel punto ψ si annulla (esempio: $\psi = (x + iy)^2 = re^{i2\alpha} \Rightarrow n = 2$ e $\psi(0) = 0$). Il punto (o i punti) in cui $\psi = 0$ rappresenta(no) l'intersezione dei filamenti di cui si è parlato nel § precedente con la sezione piana in esame.

Il numero intero n è un *invariante topologico*: nessuna deformazione continua può modificare n , perciò le fluttuazioni del parametro d'ordine ψ non possono alterare n . Se $n \neq 0$ c'è qualche problema col gauge unitario, perchè partendo da un potenziale \vec{A} regolare, il potenziale trasformato

$$\vec{A}' = \vec{A} - n \frac{\hbar c}{e} \nabla \alpha$$

è singolare nell'origine, dove α è indeterminato. Solo la parte regolare $\beta(\alpha)$ della fase θ può essere assorbita da una trasformazione di gauge. Poichè il caso $n \neq 0$ non può essere trattato nel gauge unitario, dobbiamo utilizzare le equazioni di equilibrio (5.3.1) e (5.3.2) nella loro forma più generale, cioè gauge invariante:

$$-\left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A}\right)^2 \psi + \frac{dV}{d\psi^*} = 0 \quad (5.3.6)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = -\frac{e}{\hbar c} \Im m(\psi^* \vec{D}\psi) \quad (5.3.7)$$

Quest'ultima equazione fornisce un legame, nella soluz. a energia finita, tra la fase θ del campo ψ e il parametro ω del potenziale \vec{A} che compare nella forma asintotica

$$\vec{A} = \nabla\omega + o(r^{-\frac{1}{2}})$$

poichè sappiamo che per $x \rightarrow \infty$ $\nabla \wedge \vec{B} = o(x^{-\frac{5}{2}})$, inoltre

$$\psi^* \vec{D}\psi \rightarrow \phi_o e^{-i\theta(x)} \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right) \phi_o e^{i\theta(x)} = i|\psi|^2 \nabla \left(\theta(x) + \frac{e}{\hbar c} \omega(x) \right) + o(x^{-\frac{1}{2}}).$$

Poichè il I membro dell'eq.(5.3.7) è $o(x^{-\frac{5}{2}})$, ci deve essere una cancellazione tra il primo e il secondo termine, cioè

$$\nabla \left(\theta(x) + \frac{e}{\hbar c} \omega(x) \right) = o(x^{-\frac{1}{2}})$$

$$\text{ossia } \nabla\omega(x) = -\frac{\hbar c}{e} \nabla\theta(x) + o(x^{-\frac{1}{2}})$$

$$\begin{array}{l} \vec{A}(x) \rightarrow -\frac{\hbar c}{e} \nabla\theta(x) \\ \Rightarrow \\ \psi(x) \rightarrow \phi_o e^{i\theta(x)} \end{array}$$

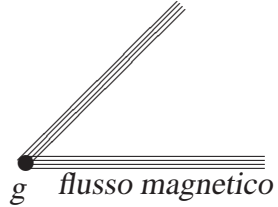
Quindi

$$\oint_{C(R)} \vec{A}(x) \cdot d\vec{l} \equiv \int \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\Sigma = -\frac{\hbar c}{e} (\theta(2\pi) - \theta(0)) = -\frac{\hbar c}{e} n$$

\Rightarrow Il flusso del campo magnetico è quantizzato. E' importante notare che all'infinito non c'è campo magnetico, ma il numero quantico $n \neq 0$ contiene l'informazione che da qualche parte al finito c'è un campo magnetico non nullo. Queste configurazioni sono appunto i *vortici di Abrikosov*. Sperimentalmente si osservano questi vortici con un valore minimo del flusso magnetico corrispondente a $\frac{\hbar c}{2q}$, dove q è la carica elettrica di un elettrone. Questo conferma che il campo ψ che stiamo studiando descrive eccitazioni di carica $e = 2q$ corrispondenti alle coppie di Cooper.

Il fatto che il flusso magnetico nei superconduttori sia quantizzato ha una importante conseguenza di carattere generale. Supponiamo che da qualche parte nell'universo ci sia un monopolo magnetico di carica g , cioè' il flusso magnetico uscente da qualunque superficie chiusa Σ contenente questo monopolo è $\int \vec{B} \cdot$

$d\vec{\Sigma} = g$. L'esistenza in natura dei superconduttori implica che g non può essere arbitrario. Infatti, se supponiamo di immergere il monopolo in un superconduttore, il flusso magnetico uscente dal monopolo è necessariamente suddiviso in uno o più vortici di Abrikosov ed è quindi quantizzato:



$$\Rightarrow g = \frac{hc}{e} n$$

Vedremo nel prossimo § una derivazione più generale e una discussione di questa celebre relazione, nota come condizione di quantizzazione di Dirac.

Vediamo ora di studiare in dettaglio la soluzione delle equazioni del moto corrispondente a un vortice di Abrikosov a simmetria cilindrica, posto lungo l'asse z di un sistema di assi cartesiani.

A causa della simmetria cilindrica il modulo del campo di materia $|\psi|$ e il campo magnetico \vec{B} sono solo funzioni della distanza $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dall'asse di simmetria. Possiamo perciò scrivere

$$\psi(\vec{x}) = \phi(r) e^{i\theta(\vec{x})},$$

dove

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(\vec{x}) = n\alpha.$$

Poichè per ipotesi θ è definita ovunque nel piano x, y , tranne che nell'origine, dove c'è il centro del vortice, e quindi

$$\phi(0) = 0,$$

possiamo scrivere

$$\theta(\vec{x}) = n\alpha + \beta(\vec{x})$$

dove β è una funzione regolare ovunque. Possiamo allora scegliere un gauge che riassorba la funzione β e quindi in definitiva possiamo parametrizzare ovunque il campo ψ nella forma

$$\psi(\vec{x}) = \phi(r) e^{in\alpha}.$$

Analogamente, per riprodurre un campo magnetico $\vec{B} = \vec{k} B(r)$ si può scegliere

$$\vec{A} = \vec{t} A(r),$$

dove \vec{t} è il versore tangenziale che abbiamo già introdotto in diverse occasioni:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{r} \\ \frac{x}{r} \\ 0 \end{pmatrix} = r \nabla \alpha .$$

E' immediato verificare che un campo \vec{A} di questa forma soddisfa automaticamente il gauge di Coulomb:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 .$$

Poniamo

$$A(r) = \frac{n\hbar c}{er} (F(r) - 1),$$

dove la f. incognita $F(r)$ si deve annullare all'infinito affinché $\vec{A} \rightarrow -\frac{\hbar c}{e} n \nabla \alpha$. Inoltre, poichè il versore \vec{t} non è definito nell'origine, li deve annullarsi $A(r)$. Quindi $F(r)$ soddisfa le due condizioni ai bordi:

$$F(0) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 0 .$$

Si ha

$$\begin{aligned} \vec{B} \equiv \nabla \wedge \vec{A} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{y}{r}A(r) & \frac{x}{r}A(r) & 0 \end{pmatrix} = \vec{k} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA(r)) \\ \Rightarrow \vec{B} &= \vec{k} B(r), \quad B(r) = \frac{n\hbar c}{er} F'(r) \end{aligned}$$

La condizione di equilibrio $\nabla \wedge \vec{B} = -\frac{e}{\hbar c} \Im m \psi^* (\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A}) \psi$ si semplifica notevolmente utilizzando le identità seguenti

$$\nabla \wedge \vec{B} = -\vec{t} \frac{d}{dr} B(r) = -n \frac{\hbar c}{e} \vec{t} \frac{d}{dr} \left(\frac{F'}{r} \right)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \vec{D}\psi &= \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right) \psi = \left(in \nabla \alpha - in \frac{\vec{t}}{r} + \vec{t} \frac{inF}{r} \right) \phi e^{in\alpha} + e^{in\alpha} \nabla \phi(r) \quad (5.3.8) \\ \Rightarrow \Im m \psi^* \vec{D}\psi &= \Im m \left(\psi^* \frac{inF}{r} \vec{t} \psi \right) = \frac{nF}{r} \phi^2 \vec{t} \end{aligned}$$

Perciò la condizione di equilibrio per F diventa

$$F'' - \frac{F'}{r} - \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \phi^2(r) F = 0$$

Poiche' per $r \rightarrow \infty$ $\phi \rightarrow \phi_o$ risolviamo l'equazione in forma asintotica

$$F'' - \frac{F'}{r} - \frac{e^2}{\hbar c^2} \phi_o^2 F = 0$$

ponendo $F(r) = G(r)\sqrt{r}$ si ha

$$G'' - \frac{e^2}{(\hbar c)^2} \phi_o^2 G - \frac{3}{4r^2} G = 0 .$$

Sarebbe facile verificare che la soluzione generale di questa equazione è esprimibile in termini di funzioni di Bessel di argomento immaginario. Nel limite $r \rightarrow \infty$ l'equazione si semplifica ulteriormente:

$$G'' - \frac{e^2 \phi_o^2}{(\hbar c)^2} G \simeq 0 ,$$

percio' $G = ce^{-r \frac{e\phi_o}{\hbar c}}$

$$\Rightarrow F(r) \rightarrow c\sqrt{r}e^{-\frac{r}{\lambda}} ,$$

dove al solito λ denota la lunghezza di penetrazione. Studiamo ora la condizione di stabilità del campo ψ :

$$\left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2 \psi - \frac{dV}{d\psi} = 0.$$

Utilizzando la (5.3.8) si ha, sfruttando il fatto che $\nabla f(r) \cdot \nabla \alpha = 0$,

$$\begin{aligned} & \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} A(r) \vec{t} \right) \cdot (e^{in\alpha} \nabla \phi(r) + i\vec{t} n F(r) \psi) \\ &= e^{in\alpha} \left\{ \Delta \phi - \frac{n^2}{r} F \phi + \frac{n^2}{r} (1 - F) \frac{F}{r} \phi \right\} \end{aligned}$$

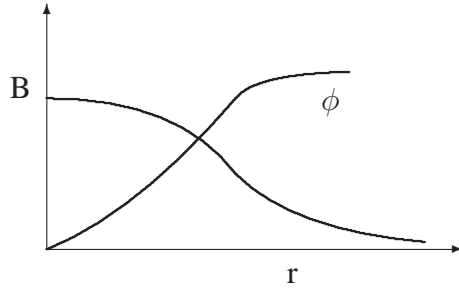
tenendo inoltre conto che in coordinate polari $\Delta f(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) f(r)$, si ottiene:

$$\phi'' + \frac{1}{r}\phi' - \frac{n^2 F^2}{r^2}\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0$$

dove al solito $\frac{dV}{d\phi} = t\phi + \frac{u}{6}\phi^3$.

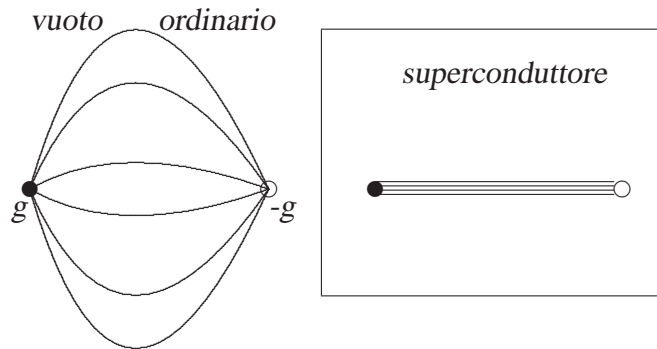
Nell'intorno dell'origine, essendo ϕ regolare (config. a energia finita) $\Rightarrow \phi(r) = \phi(0) + \phi'(0)r + \phi''(0)\frac{r^2}{2}, \dots$ se $\phi(0) \neq 0$ il termine $\frac{n^2 F^2}{r^2}\phi$ diverge per $r \rightarrow 0 \Rightarrow \phi(0) = 0 \Rightarrow \phi(r) = cr^\mu + \dots$. Poiche' $F(0) = 1 \Rightarrow (\mu(\mu-1) + \mu - n^2)cr^{\mu-2} + O(r^{\mu-1}) = 0 \Rightarrow \mu = |n|$: il campo di Higgs $\phi(r)$ ha uno zero di ordine $|n|$ sull'asse del vortice. Inserendo nell'eq. per F il suo sviluppo di Taylor nell'intorno dell'origine si vede che affinché $\frac{F'}{r}$ (e quindi \vec{B}) non diverga $F'|_{r=0} = 0, \Rightarrow F(r) = 1 + O(r^2)$ Quindi

$$B = \frac{n\hbar c}{e}F''(0) + O(r) \quad (r \rightarrow 0).$$



5.3.4 Confinamento dei monopoli magnetici

Il centro dei vortici di Abrikosov si comporta come un conduttore normale: $\phi(0) = 0$ e $B(0) \neq 0$. Poiche' la configurazione di un vortice differisce dal vuoto in una regione a forma cilindrica di raggio $\sim \lambda$, l'energia del vortice e' proporzionale alla sua lunghezza. Se esistono in natura monopoli magnetici, c'è un'importante conseguenza di questa proprietà. Il campo magnetico generato nel vuoto da una coppia monopolo anti-monopolo ha esattamente la stessa forma del campo elettrico generato da una coppia di cariche, quindi l'energia potenziale $V(R)$ tra questa coppia di monopoli è di tipo Coulombiano: $V(R) = -\frac{g^2}{R}$. Supponiamo ora di immergere questa coppia monopolo-antimonopolo in un superconduttore. La distribuzione del campo cambia drasticamente e tutto il flusso magnetico è concentrato in un vortice di Abrikosov che congiunge i due monopoli:



Quindi l'energia potenziale della coppia di monopoli in un superconduttore è proporzionale alla loro distanza : $V(R) = \sigma R$, dove σ è l'energia per unità di lunghezza del vortice di Abrikosov. In queste condizioni la coppia di monopoli rimane permanentemente legata : ci vorrebbe un'energia infinita per allontanarli all'infinito. questa è la proprietà di *confinamento* dei monopoli magnetici in un superconduttore.

Oggi si hanno buone ragioni per ritenere che un meccanismo analogo valga per i quark (cioè i costituenti elementari dei nucleoni e dei mesoni) nel vuoto ordinario, in quanto l'energia di una coppia di quark è proporzionale alla distanza. Nei superconduttori ordinari il confinamento dei monopoli è prodotto dalla condensazione delle coppie di Cooper. Si ritiene che nella Cromodinamica quantistica (che è la teoria che descrive le interazioni dei quark) il confinamento dei quark sia dovuto alla condensazione dei monopoli magnetici.

Chapter 6

Quantizzazione della carica elettrica

In elettrodinamica classica la conoscenza di $F_{\mu\nu}$ determina completamente le proprietà del campo elettromagnetico. Il potenziale A_μ ha il ruolo di uno strumento comodo per semplificare il formalismo, ma non è una quantità misurabile, perché non è invariante rispetto alle trasformazioni di gauge. Abbiamo visto che questa affermazione non è più del tutto vera nei sistemi quantistici: i vortici di Abrikosov mostrano che è possibile estrarre delle informazioni fisiche sul campo elettromagnetico anche da regioni in cui $F_{\mu\nu} = 0$. Infatti a grande distanza dal vortice di Abrikosov si ha $F_{\mu\nu} = 0$, quindi il sistema è nel vuoto elettromagnetico, ma per ogni cammino chiuso γ concatenato con il vortice si ha

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{hc}{e} n$$

e quindi si ha un'informazione fisica (cioè invariante di gauge); questo è dovuto al fatto che esistono configurazioni di gauge corrispondenti al puro vuoto $F_{\mu\nu} = 0$ (come $\vec{A} = \nabla\theta$ del § precedente) che per ragioni topologiche non possono essere ricondotte con trasformazioni di gauge non singolari nella configurazione banale $A_\mu \equiv 0$. In conclusione, la conoscenza di $F_{\mu\nu}$ non è sufficiente, nelle teorie quantistiche, a caratterizzare il comportamento del sistema. Una conseguenza sperimentalmente osservabile di queste considerazioni è l'effetto *Aharonov-Bohm*. Vedremo infatti che non è necessario ricorrere alla superconduttività per scoprire effetti osservabili legati a \vec{A} .

6.1 Effetto Aharonov-Bohm

Premessa: se $\psi_o(x)$ e' la f. d'onda che descrive un elettrone in assenza di campo elettromagnetico, quella che descrive l'elettrone in interazione col campo e' data da

$$\psi(x) = e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}} \psi_o(x) \quad (6.1.1)$$

dove γ e' un cammino qualsiasi che congiunge il punto x a un punto all'infinito. È infatti facile da verificare che una trasformazione di gauge sul potenziale

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\omega$$

induce la corretta trasformazione di fase su ψ :

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\frac{e}{\hbar c}\omega} \psi ;$$

inoltre la derivata ordinaria di ψ_o si trasforma nella derivata covariante:

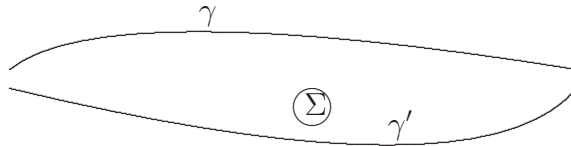
$$e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}} \nabla \psi_o(x) = \left\{ \nabla + i\frac{e}{\hbar c} \vec{A} \right\} \psi(x)$$

Una deformazione di γ ($\gamma \rightarrow \gamma + \delta\gamma$) genera una variazione della fase di ψ pari a

$$\delta\theta = \frac{e}{\hbar c} \oint_{\delta\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} .$$

Nel vuoto banale, cioè in una regione semplicemente connessa in cui $B \equiv 0$ si ha ovviamente $\delta\theta = 0$.

Consideriamo la propagazione di un fascio di elettroni intorno a un sottile solenoide rettilineo di sezione di area Σ in cui ci sia un campo magnetico \vec{B} parallelo al solenoide che genera un flusso $\Phi = B\Sigma$. Fuori dal solenoide il campo e' nullo. Poiche' la regione in cui si propagano gli elettroni non e' semplicemente connessa, i cammini γ si dividono in due classi di omotopia distinte, a seconda se passano a sinistra o a destra del solenoide:



Cammini appartenenti a classi distinte generano una differenza di fase

$$\delta\theta = \frac{e}{\hbar c} \oint_{\delta\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{e}{\hbar c} B\Sigma .$$

Se $\delta\theta \neq 2n\pi$ si formano delle frange di interferenza previste da Aharonov e Bohm nel 1959 e osservate sperimentalmente nel 1962. Questo effetto dimostra che il potenziale elettromagnetico produce degli effetti osservabili anche quando il campo elettromagnetico è nullo.

C'è un semplice legame tra l'effetto ora descritto e la quantizzazione della carica magnetica di un monopolo: si può pensare di realizzare questo monopolo magnetico supponendo che esso sia il polo di un sottilissimo solenoide filiforme, che dalla posizione del monopolo si estenda fino all'infinito. Il flusso magnetico che scorre nel solenoide è

$$\Phi = \oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = g$$

dove γ è un circuito microscopico concatenato ad esso. Questa linea corrisponde a una singolarità di \vec{B} ed è quindi una singolarità fisica, ma se il solenoide è infinitamente sottile non c'è, per lo meno dal punto di vista della fisica classica, di osservarlo. L'esperimento di Bohm-Aharonov fatto su questo solenoide non dà origine a frange di interferenza se $g = n\frac{h}{e}$ perchè in questo caso la variazione di fase è un multiplo di 2π .

6.2 Dualita' elettromagnetica

Le equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 , \\ \nabla \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{c\partial t} &= 0 , \quad \nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{c\partial t} = 0 , \end{aligned}$$

non sono solo invarianti, come è noto, per trasformazioni di Lorentz. Sono anche invarianti per trasformazioni di dualità:

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \cos \alpha \vec{E} + \sin \alpha \vec{B} , \\ \vec{B} &\rightarrow \cos \alpha \vec{B} - \sin \alpha \vec{E} . \end{aligned}$$

In particolare, se poniamo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, otteniamo la trasformazione *discreta* di dualità

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B} \ , \ \vec{B} \rightarrow -\vec{E} \ .$$

Introducendo il vettore complesso $\vec{E} + i\vec{B}$ la trasformazione di dualità si può scrivere in forma più compatta

$$\vec{E} + i\vec{B} \rightarrow e^{-\alpha} \left(\vec{E} + i\vec{B} \right) \ .$$

Notare che la densità di energia \mathcal{E} e di impulso \wp del campo elettromagnetico, che si possono scrivere nella forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} |\vec{E} + i\vec{B}|^2 = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \ , \ \wp = \frac{1}{2i} \left(\vec{E} + i\vec{B} \right)^* \wedge \left(\vec{E} + i\vec{B} \right) = \vec{E} \wedge \vec{B} \ ,$$

sono invarianti per trasformazioni di dualità.

La simmetria per dualità delle equazioni di Maxwell viene distrutta quando si accende l'interazione aggiungendo alle equazioni la densità di carica elettrica ρ_e e la relativa densità di corrente \vec{j}_e . Se si volesse preservare questa simmetria occorrerebbe introdurre parallelamente una densità di carica e di corrente magnetica ρ_m e \vec{j}_m . Le equazioni di Maxwell diventerebbero allora

$$\nabla \cdot \left(\vec{E} + i\vec{B} \right) = \rho_e + i\rho_m \ ,$$

$$-i\nabla \wedge \left(\vec{E} + i\vec{B} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} + i\vec{B} \right) = \frac{1}{c} \left(\vec{j}_e + i\vec{j}_m \right) \ ,$$

e sono ancora invarianti per dualità, purchè le densità si trasformino nel modo seguente

$$\rho_e + i\rho_m \rightarrow e^{-i\alpha} (\rho_e + i\rho_m) \ ,$$

$$\vec{j}_e + i\vec{j}_m \rightarrow e^{-i\alpha} \left(\vec{j}_e + i\vec{j}_m \right) \ .$$

Nella trattazione usuale dell'elettromagnetismo questa formulazione più simmetrica non la si fa per la buona ragione che i monopoli magnetici non sono (ancora) stati osservati in natura.. Non c'è però nessuna ostruzione concettuale che permetta di concludere che i monopoli magnetici non possono esistere. Anzi, come vedremo, la loro esistenza consentirebbe di spiegare (Dirac, 1931) in maniera semplice il fatto sperimentale che la carica elettrica di ogni particella è un multiplo intero di quella dell'elettrone. Vedremo che una teoria con cariche elettriche

e magnetiche è quantisticamente consistente solo se vale la condizione di quantizzazione di Dirac $\frac{eg}{\hbar c} = 2\pi n$. Questa relazione non è invariante rispetto alla più generale trasformazione di dualità, ma solo rispetto alla dualità discreta $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, che implica

$$e \rightarrow g \quad , \quad g \rightarrow -e \quad .$$

6.2.1 Derivazione semiclassica della condizione di quantizzazione di Dirac

Consideriamo una particella classica puntiforme di massa m e carica e immersa nel campo magnetico generato da un monopolo puntiforme di carica g (perciò $\vec{B} = \frac{g}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}$). L'equazione del moto è

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = e \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \wedge \vec{B} = \frac{ge}{4\pi cr^3} \dot{\vec{r}} \wedge \vec{r} .$$

La variazione di momento angolare è

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}) = m\vec{r} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{eg}{4\pi cr^3} \vec{r} \wedge (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{r}) ,$$

quindi, nonostante il sistema sia soggetto a una forza centrale il momento angolare orbitale non è conservato. Tuttavia, poichè

$$\frac{1}{r^3} \vec{r} \wedge (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{r}) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \vec{r} \frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) ,$$

si ha che il momento angolare *totale conservato* è

$$\vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}} - \frac{eg}{4c\pi} \frac{\vec{r}}{r}$$

C'è quindi un contributo del momento angolare totale lungo la congiungente delle due particelle. Essendo il momento angolare quantizzato in multipli interi o semi-interi di \hbar si ha

$$\frac{eg}{4c\pi} = \frac{n}{2} \hbar$$

che è nuovamente la condizione di quantizzazione di Dirac. ¹

¹E' curioso che per riprodurre questa condizione sia necessario ricorrere anche ai multipli semi-interi di \hbar , come se il sistema monopolo-carica elettrica fosse un fermione.

6.2.2 Derivazione di Dirac

Supponiamo di deformare il cammino γ dell'eq.(6.1.1) del § 6.1, tenendo fissi i punti x e ∞ , facendo descrivere a γ una superficie chiusa Σ . Quando γ torna nella posizione di partenza, la variazione $\delta\theta$ della fase di $\psi(x)$ deve essere un multiplo intero di 2π perché $\psi(x)$ è a un sol valore.

$$\Rightarrow \delta\theta = \frac{e}{\hbar c} \int \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \Phi_{\Sigma}(B) \frac{e}{\hbar c} = 2n\pi$$

In base alle equazioni di Maxwell, poiché $\text{div } \vec{B} = 0$, il flusso di \vec{B} attraverso ogni superficie chiusa è nullo. Se però ci fosse all'interno di Σ un *monopolo magnetico* di carica g si avrebbe $g = \Phi_{\Sigma}(B) = \frac{eg}{\hbar c} = 2\pi n$, che è la condizione di quantizzazione della carica magnetica di Dirac (1931). È sufficiente che in un punto qualunque dell'universo ci sia un monopolo magnetico di carica g per assicurare, in base al ragionamento precedente, che la carica elettrica di ogni particella deve essere un multiplo intero di $\frac{\hbar c}{g}$. Se in natura esistono particelle di carica elettrica e_i ($i = 1, 2, \dots$) e monopoli di carica magnetica g_j ($j = 1, 2, \dots$), ogni coppia carica - monopolo soddisfa la condizione

$$\frac{e_i g_j}{\hbar c} = n_{ij},$$

dove n_{ij} è un opportuno intero. Quindi ogni carica elettrica è un multiplo intero di $\frac{\hbar c}{g_j}$. Per un dato g_j sia n_{oj} il massimo comun divisore di n_{1j}, n_{2j}, \dots . Allora ogni carica elettrica è un multiplo della carica elementare $e_o = n_{oj} \frac{\hbar c}{g_j}$. Questa è una spiegazione semplice e generale della quantizzazione della carica elettrica.

In questa formulazione elementare le cariche elettriche e magnetiche sono trattati come particelle puntiformi che sono introdotte a mano nella teoria. È da notare però che esistono delle teorie di campo che sono semplici generalizzazioni non-abeliane del modello di Landau-Ginzburg della superconduttività, utilizzate per descrivere le interazioni fondamentali delle particelle elementari, in cui necessariamente esistono delle soluzioni a energia finita che sono identificabili come monopoli magnetici dotati di una struttura interna e di una massa finita (*monopolo di 't Hooft- Polyakov*, 1974), quindi l'ipotesi di esistenza di monopoli magnetici in natura non solo non è contraddittoria, ma esistono modelli delle interazioni fondamentali che la richiedono.

Bibliography

- [1] M.Toda, R.Kubo, N.Saito, *Statistical Physics*, Springer-Verlag 1992
- [2] R.K.Pathria, *Statistical Mechanics*, Butterworth-Heinemann, 1999
- [3] R.P. Feynman, *Statistical Mechanics (A Set of Lectures)*, Addison-Wesley, 1972
- [4] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*, Cambridge Lecture Notes in Physics, 1996.
- [5] G. Parisi, *Statistical Field Theory*, Addison- Wesley, 1988.
- [6] C. Itzykson & J-M Drouffe, *Statistical field theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1989.