

Fisica degli sport Lezione 16:

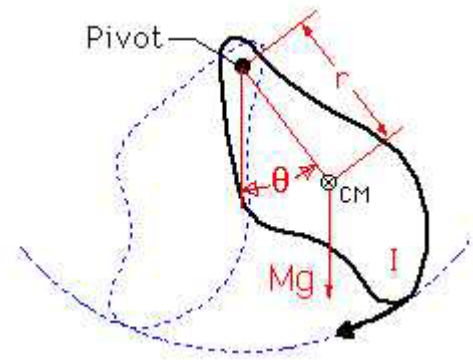
Conservazione del Momento Angolare

Aggiornata al 11/5/1999

Correre e camminare: la gamba come un pendolo

Un'applicazione dei concetti di moto rotazionale introdotti nella [Lezione 14](#) è lo studio del movimento compiuto camminando.

In questo caso le gambe si possono considerare come delle aste impernate alle estremità per formare ciò che viene definito un "pendolo fisico". Un pendolo fisico è semplicemente un oggetto sospeso che è libero di ruotare attorno al punto di sospensione. I parametri rilevanti sono la massa dell'oggetto, il suo momento di inerzia intorno al perno e la distanza del suo centro di massa dal perno, come illustrato a destra. Una volta che si conoscono questi parametri il periodo del pendolo (cioè il tempo impiegato per completare un'oscillazione) è dato dalla formula sotto.



$$T = 2\pi \sqrt{I/Mgr}$$

Tecnicamente questa espressione è valida solo per valori molto piccoli di q . Ma resta comunque una buona approssimazione per valori più elevati, quindi la utilizzeremo.

Se consideriamo la gamba come un'asta uniforme di lunghezza l con il perno posto ad un'estremità (usando i dati della tabella nella [Lezione 14](#)) il momento di inerzia sarà $I = 1/3 ML^2$. Inoltre, se l'asta è uniforme, il centro di massa sarà collocato al centro dell'asta, quindi $r = L/2$. Inserendo questi dati nell'equazione sopra si ottiene

$$T_{\text{gamba}} = 2\pi \sqrt{2L/3g}$$

per il periodo di oscillazione di una gamba. Come accade con molte cose sottoposte alla forza di gravità, notate che la massa della gamba si elimina ed il risultato dipende solo dalla lunghezza. Per una gamba di 90 cm il periodo previsto dall'equazione sopra è di circa 1,6 s; il tempo impiegato per fare un passo è proprio la metà di questo (il periodo misura il tempo

impiegato per un'oscillazione completa). Questo è il periodo “normale” per una camminata. Quando camminate a questo passo (o al suo equivalente per la lunghezza della vostra gamba) lasciate fare alla gravità la maggior parte del lavoro necessario per muovere la gamba. Quindi questo è il passo più efficiente. Camminando più velocemente o (addirittura) più lentamente brucerete più energia perché dovete usare di più i vostri muscoli per accelerare le gambe.

La velocità della camminata è la lunghezza di ciascun passo divisa per il tempo impiegato a farlo. La lunghezza di ciascun passo è proporzionale alla lunghezza della gamba, L . Abbiamo appena visto che il tempo impiegato per fare un passo è proporzionale a \sqrt{L} . Quindi,

$$V_{\text{camminata}} \sim L / \sqrt{L} = \sqrt{L}$$

e vediamo che le gambe lunghe sono un vantaggio per camminare ad un passo “normale”, il che concorda con la nostra esperienza.

La situazione cambia, comunque, non appena ci allontaniamo dal passo ottimale. Nel caso estremo di una corsa a passo sostenuto, il risultato è del tutto diverso, come può mostrare una semplice analisi in scala. Nell'equazione per il periodo di un pendolo fisico data sopra "Mgr" al denominatore della radice quadrata deriva dal momento torcente prodotto dalla forza di gravità; Mg è la forza, mentre r è la distanza tra il punto di applicazione della forza (il centro di massa) e il punto di sospensione. Il momento torcente dipende dall'angolo, q , ma Mgr è il valore MASSIMO che il momento torcente può raggiungere. Quindi, in generale, il periodo sarà dato da

$$T = 2\pi \sqrt{(I/t_{\text{max}})}$$

Per cui è necessario sapere la proporzionalità tra i valori di I e t_{max} e la lunghezza delle gambe. I è proporzionale a ML^2 , e sappiamo che M è proporzionale al volume, ovvero a L^3 , quindi I è proporzionale a L^5 . Il momento torcente massimo sarà proporzionale alla forza massima moltiplicata per L ; e sappiamo (dalla Legge dei Muscoli) che la forza massima è proporzionale a L^2 , quindi t_{max} è proporzionale a L^3 . Di conseguenza, il periodo di oscillazione delle gambe durante una corsa alla massima velocità è proporzionale a

$$T \sim \sqrt{(I/t_{\text{max}})} \sim \sqrt{(L^5/L^3)} = \sqrt{(L^2)} = L$$

Come prima la velocità sarà la lunghezza del passo divisa per il periodo, ma visto che sia la lunghezza del passo che il periodo sono proporzionali a L , la velocità sarà indipendente da L . Dunque, le persone alte saranno in grado di camminare comodamente ed in modo efficiente ad un passo più sostenuto rispetto alle persone basse, ma non saranno in grado di correre più velocemente. La stessa analisi vale anche per gli animali; nella caccia alla volpe, la volpe, i segugi e i cavalli, nonostante le dimensioni differenti, raggiungono all'incirca la stessa velocità massima in corsa.

Conservazione del momento angolare

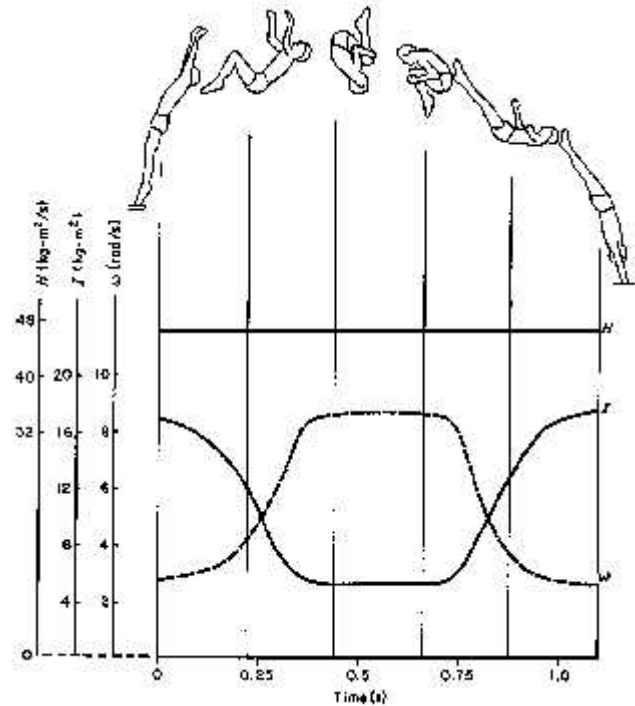
Sappiamo che il momento lineare (quantità di moto) si conserva in assenza di forze esterne, quindi non dovrebbe sorprendervi sapere che il momento angolare si conserva in assenza di momenti torcenti esterni. L'espressione per il momento angolare è $\mathbf{L} = I\mathbf{\omega}$, dove I è il momento di inerzia e $\mathbf{\omega}$ è la velocità angolare (o frequenza di rotazione). Ma, come abbiamo discusso nella [Lezione 14](#), il momento di inerzia non è una proprietà fissa di un oggetto; si può cambiare. Così come per il centro di massa (discusso nella [Lezione 6](#)), se si cambia la forma (cioè la posizione) del proprio corpo è possibile cambiare il suo momento di inerzia. Se non ci sono momenti torcenti esterni allora il momento angolare deve rimanere costante. Ciò significa che una variazione del momento di inerzia deve essere accompagnata da una variazione della velocità angolare che la compensi.

C'è un esempio di questo nel balletto, il passo chiamato [Fouetté](#). In questo passo, la ballerina comincia a girare con la gamba tesa (creando momento angolare) e poi la piega avvicinandola all'asse di rotazione. Allo stesso tempo si alza sulle punte per ridurre qualsiasi forza che potrebbe causare momenti torcenti esterni. Il risultato è che all'improvviso sembra ruotare ad una velocità impressionante.

Probabilmente l'esempio più rappresentativo di questo principio nello sport è offerto dal pattinaggio artistico; in particolare le piroette che tendono a presentarsi alla fine del numero. I pattinatori cominciano queste piroette con i corpi in una posizione con un momento di inerzia relativamente elevato, cioè con le braccia e una gamba distese orizzontalmente. In questo modo riescono ad ottenere un elevato momento angolare con una moderata velocità angolare. Mentre stanno girando, portano i loro corpi in una posizione allungata rispetto all'asse di rotazione – in genere alzano anche le braccia sopra la testa per ottenere il massimo dell'effetto. Ciò rende minimo il loro momento di inerzia posizionando tutta la loro massa il più vicino possibile all'asse di rotazione. Non appena diminuisce il momento di inerzia, la velocità angolare aumenta in modo da conservare il momento angolare. Finiscono con il girare velocissimamente, come per magia. Ma non si tratta di magia, è solo fisica!

Un altro esempio di questo fenomeno si può trovare nel tuffo, come illustrato a destra. Il tuffatore usa il momento torcente prodotto dal trampolino per iniziare un salto mortale rovesciato. A questo punto il suo corpo è disteso e ha un momento di inerzia molto elevato rispetto all'asse di rotazione (che inizialmente si trova all'altezza dei piedi). Poi si porta in una posizione racchiusa, in cui il suo momento di inerzia è minimo, e gira più velocemente; la sua velocità angolare aumenta per compensare la perdita di

I. Alla fine, quando si ridistende, il processo si inverte; il suo momento di inerzia torna ad essere elevato e la sua frequenza di rotazione diminuisce. Notate che il prodotto di I con ω (per qualche motivo chiamato "H" nel libro da cui è tratta questa figura) rimane sempre costante durante il tuffo.



Le strane evoluzioni degli atleti in aria

La maggior parte delle applicazioni del momento angolare nello sport sono simili all'esempio del tuffo dato sopra. Si verificano quando un atleta abbandona il suolo. In questo caso non ci possono essere momenti torcenti esterni. La sola forza esterna (di conseguenza) è la gravità, ma dal momento che l'atleta non è sospeso a nessuno perno ruoterà sempre intorno al suo centro di massa. E poiché la gravità agisce sempre attraverso il centro di massa non può sviluppare un momento torcente, in quanto r sarà sempre uguale a 0. Quindi se non ci sono momenti torcenti esterni e il momento angolare si deve conservare, come mai sembra che gli atleti inizino a ruotare in aria?

Nonostante sia possibile (come discusso sotto) eseguire rotazioni “senza momento torcente” opponendo le parti del corpo l'una all'altra e utilizzando i momenti torcenti interni, il metodo di gran lunga più comune nello sport è l'inganno. Fondamentalmente (come nel caso sopra) il momento torcente prodotto dalla forza impiegata per staccarsi dal suolo viene utilizzato per cominciare una rotazione con il corpo in una posizione con un momento di inerzia elevato. Di conseguenza si ottiene un momento angolare senza che vi sia una velocità angolare elevata. Successivamente, una volta in aria, la posizione del corpo viene cambiata in modo da diminuire il momento di inerzia. La velocità angolare a quel punto diventa elevata. Se il tutto viene eseguito nel modo giusto si ha l'impressione che la rotazione sia cominciata in aria.

Ancora una volta, un esempio comune di questo metodo proviene dal pattinaggio artistico. Quando eseguono le loro piroette, i pattinatori prendono sempre lo slancio con una gamba distesa, aumentando in tal modo il loro momento di inerzia. Una volta in aria, portano la

gamba in linea con il resto del corpo e girano velocemente intorno all'asse verticale. C'è un passo simile nel balletto chiamato [Tour Jeté](#) in cui la ballerina spicca il volo con le gambe divaricate e poi le riunisce a mezz'aria per creare l'illusione che il giro avvenga interamente in aria.

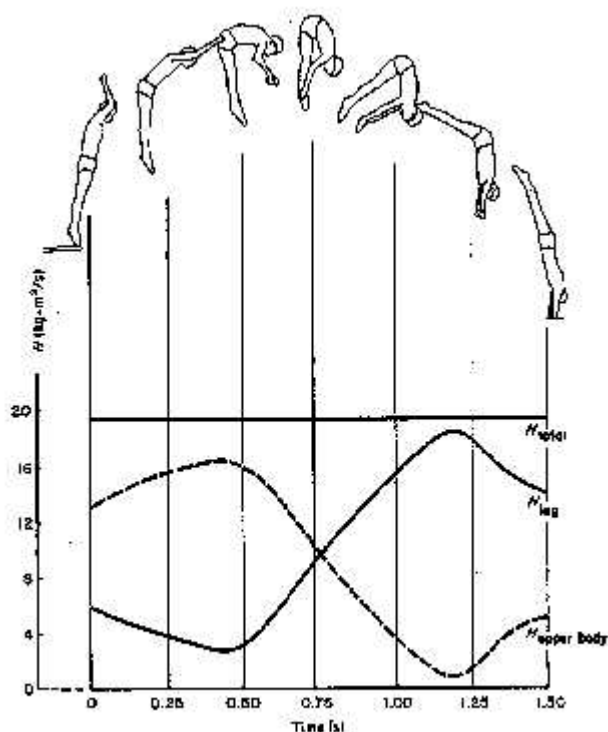


Figure 8-42. The angular momentum of a diver performing a piked front dive is first localized in his upper body and then in his legs.

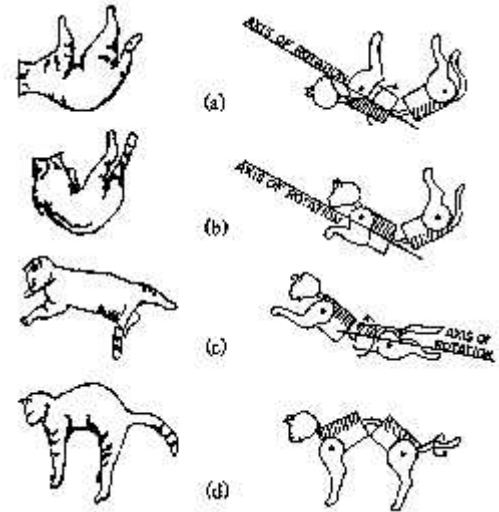
Un'altra tecnica è “spostare” il momento angolare da una parte del corpo ad un'altra, mentre il momento angolare totale rimane costante. Questa idea è illustrata a sinistra con un esempio tratto dal tuffo. Come prima, la forza impiegata per lanciarsi fornisce un momento torcente che dà al tuffatore un po' di momento angolare ma non molta velocità angolare a causa dell'elevato momento di inerzia. Prima la parte superiore del corpo viene portata in basso, per cui questa parte possiede la maggior parte del momento angolare. Le gambe ruotano leggermente in avanti per compensarlo. Poi le gambe si alzano e la maggior parte del momento angolare viene trasferita ad esse. Notate, comunque, che le braccia vengono ruotate nel verso opposto alle gambe cosicché il momento angolare delle gambe viene compensato senza che il busto ruoti molto. Le braccia sono più leggere delle gambe, per cui hanno in generale un momento di inerzia inferiore, ma notate che raggiungono la posizione verticale prima delle gambe, quindi vengono ruotate più velocemente delle gambe, il che compensa la loro minore massa.

Rotazioni “prive di momento torcente”

E' possibile utilizzare una tecnica, simile a quella appena descritta per il tuffo, per iniziare rotazioni a mezz'aria. L'idea è di posizionare il corpo in modo che una parte di esso abbia un momento d'inerzia piccolo e un'altra parte uno più grande. Tali parti del corpo vengono poi piegate in direzioni opposte. Poiché si tratta di un momento torcente interno, esso non può produrre un momento angolare netto; di conseguenza i momenti angolari delle varie parti del corpo devono dare come somma zero. Ma le VELOCITA' angolari delle diverse parti possono essere molto differenti, per cui è possibile ottenere una rotazione netta.

Ci sono esempi di questo sia nel tuffo che nella pedana elastica, sebbene la tecnica non sia la stessa in entrambi gli sport. Comunque, l'esempio più interessante proviene dal regno animale. In particolare, il modo in cui i gatti riescono sempre ad atterrare sulle zampe.

La tecnica è illustrata a destra. Per prima cosa il gatto porta le zampe anteriori vicino al corpo e poi comincia una rotazione intorno ad un asse passante per la sua parte frontale. Dal momento che il suo corpo ha una forma a “U” in questo momento, la parte posteriore del gatto si trova generalmente più lontano dall'asse di rotazione e di conseguenza ha un momento di inerzia molto maggiore. La parte frontale del corpo viene ruotata di quasi 180° mentre la parte posteriore ruota solo di pochi gradi. Poi le zampe posteriori si allungano per ridurre il loro momento di inerzia e vengono ruotate contro la parte anteriore del corpo. A questo punto il corpo si trova in una posizione tale che la parte anteriore è controbilanciata dall'asse di rotazione, quindi la parte posteriore può essere girata senza ruotare di molto le zampe anteriori. Infine le zampe vengono portate in posizione di “atterraggio” e la coda viene impiegata per qualsiasi piccolo aggiustamento dell'ultimo minuto. Provate questo esperimento con il prossimo gatto che incontrate; lo adorano!



Lezione 16

PUNTI PRINCIPALI:

- Le gambe lunghe sono un vantaggio per camminare, ma non per correre.
- Il momento angolare si deve conservare anche per gli oggetti in aria.
- Un cambio di posizione del corpo può alterare il suo momento di inerzia e modificare la velocità di rotazione.

Lezione 17

ANTEPRIMA:

Aerodinamica e Portanza.