

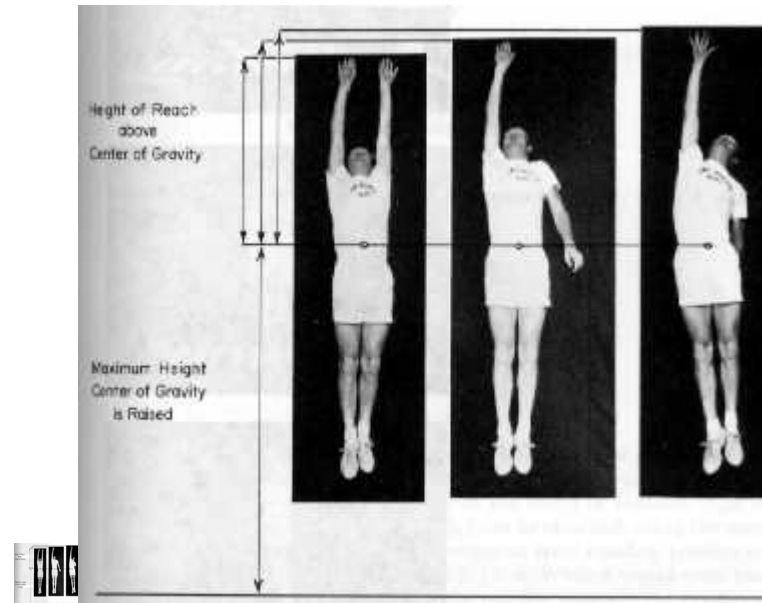
# ***Fisica degli Sport Lezione 6:***

## **Moto dei Proiettili**

Aggiornata al 1/5/1999

### **Aggiustare il Centro di Massa a proprio vantaggio**

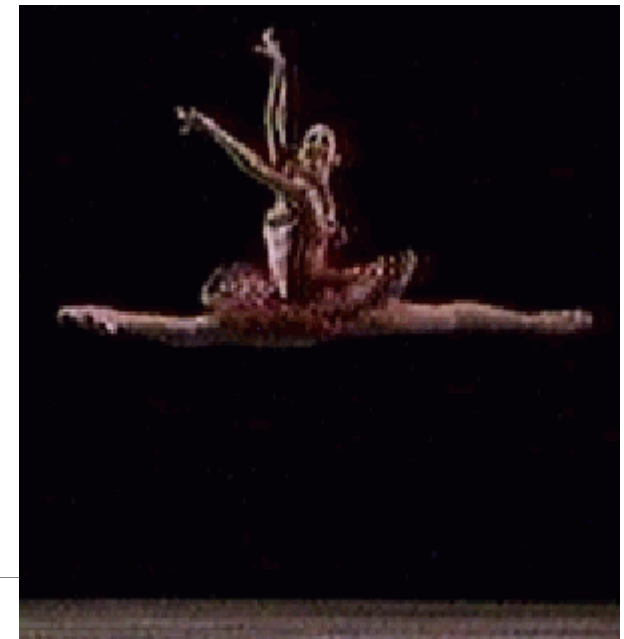
Poiché la gravità tratta il vostro corpo come un punto collocato in corrispondenza del Centro di Massa, il moto del CM di un oggetto che vola in aria è sempre molto semplice. Pensate ad un tuffatore o ad una ginnasta che si librano in aria mentre compiono diverse evoluzioni. Il moto totale è assai complicato, ma può essere suddiviso in moto del CM e moto intorno al CM. Una volta che gli atleti abbandonano il suolo, tutte le forze che permettono loro di compiere le varie evoluzioni sono forze INTERNE; sono solo forze che il corpo esercita su se stesso. Quindi, essendo la gravità l'unica forza esterna, il CM sarà sottoposto ad essa proprio come avverrebbe se l'atleta non stesse roteando. Questo accade solo perché il CM si sposta verso parti del corpo differenti (o persino al di fuori del corpo) mentre l'atleta esegue i suoi movimenti.



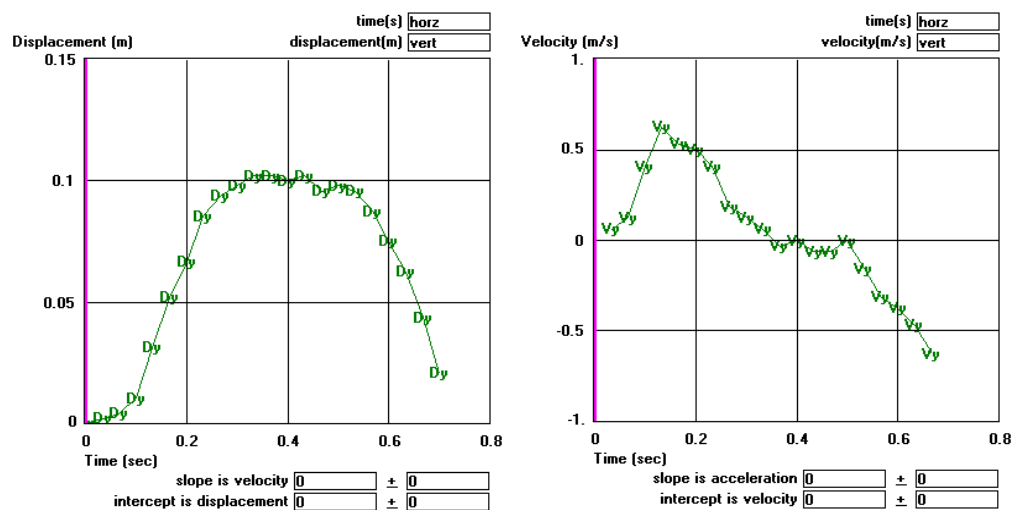
Potete sfruttare questo controllo della posizione del vostro CM. Immaginate di stare “sull’attenti” e di alzare entrambe le braccia sopra la testa. Ovviamente, la distribuzione della vostra massa e di conseguenza il vostro CM si sposteranno verso l’alto. Adesso abbassate un braccio: il vostro CM si sposterà verso il basso, in una posizione pressappoco a metà tra la posizione “braccia su” e quella “sull’attenti”. Ciò significa che se eseguite due salti identici (cioè le vostre gambe compiono la stessa quantità di lavoro in entrambi i salti), ma nel primo tenete le mani alzate sopra la testa, mentre nel secondo ne tenete una sola, le punte delle vostre dita si alzeranno di più rispetto al suolo in quest’ultimo caso... anche se il vostro CM raggiungerà la stessa altezza in tutti e due i salti! (Come mostrato sopra.) Questo perché con entrambe le braccia alzate, il vostro CM è più vicino alle punte delle dita. Pensate al salto all’avvio di una partita di basket. I giocatori saltano con una o con due braccia sollevate? Ora sapete perché!

### "Air" Jordan, la ballerina

Un degli esempi più familiari e impressionanti di manipolazione del CM è Michael Jordan prima di una schiacciata, quando sembra fluttuare in aria per una quantità di tempo innaturale, con le gambe divaricate nella classica posizione alla "Air". Potreste rimanere sorpresi nell’apprendere che in realtà M.J. ha preso questo movimento dalla danza. Nel passo di danza chiamato [Grand Jeté](#), la ballerina balza in aria, divarica le gambe nella posizione della “spaccata” e SEMBRA che voli per una frazione di secondo. E’ un effetto reale o è un’illusione? Beh... un po’ l’uno un po’ l’altro. I grafici sotto mostrano la posizione (a sinistra) e la velocità (a destra) della TESTA della ballerina come funzioni del tempo. Notate che il grafico della posizione NON è la parabola che vi aspettereste per la semplice accelerazione gravitazionale... c’è un appiattimento in cima. Analogamente, notate la zona piatta – a velocità zero! – al centro della curva della velocità. Questi



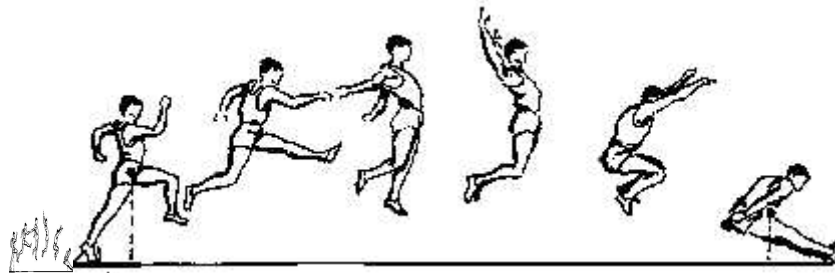
effetti sono reali; la sua testa “fluttua” davvero per un breve intervallo. Ma il suo CM, naturalmente, non è collocato sulla testa (a meno che non abbia un GRANDISSIMO ego) ed ecco la chiave di ciò che sta succedendo.



Nel momento in cui la ballerina alza gambe e braccia, il suo CM si avvicina in modo significativo alla testa. Se si regola alla perfezione il suo CM continuerà ad alzarsi (in una parabola) quando invece la sua testa rimarrà alla stessa altezza. Analogamente, non appena il CM inizia a scendere, lei può abbassare le gambe e la testa RESTERÀ alla stessa altezza, almeno per un po' di tempo. Guardando, avete la tendenza a giudicare la sua altezza dalla posizione della testa. Inoltre, con l'evoluzione hanno istruito il vostro cervello ad aspettarsi che gli oggetti lanciati seguano traiettorie paraboliche, quindi ogni deviazione da questo percorso viene esagerata dalla vostra percezione. Questi effetti si combinano per produrre l'impressionante illusione del volo. Jordan fa la stessa cosa: alza le braccia per schiacciare la palla, ma alza le gambe solo per farsi fico e vendere scarpe dando l'illusione di volare. Funziona!

### Gli effetti del CM sul Salto in Lungo

Lo scopo del salto in lungo è di raggiungere la maggiore lunghezza possibile. Il modo migliore per ottenere ciò è mantenere il CM del corpo il più alto possibile, più a lungo possibile. I saltatori ci riescono sollevando le gambe (e di conseguenza il loro CM) poco prima di atterrare. In questo modo il CM può effettivamente essere più basso quando toccano il suolo, rispetto a quando spiccano il salto... come mostra il disegno sotto.



Un'analisi dettagliata del salto in lungo svolta nel [Volume 2](#) mostra che il tempo extra guadagnato tramite questa manovra può dare come risultato  $\sim 1$  m in più nella lunghezza misurata.

Il saltatore vuole anche toccare il suolo con i piedi il più avanti possibile rispetto al CM. Tuttavia, se i piedi sono troppo in avanti il saltatore tenderà ad atterrare seduto, rovinando così una buona prova (osservate l'ultima figura del disegno sopra). In questo caso, la scelta migliore è quella di piegare le ginocchia e tenere il CM il più vicino possibile ai piedi prima di toccare la sabbia.

Di sicuro, il 90% circa della lunghezza del salto è il risultato del movimento compiuto in aria dal corpo sotto l'esclusiva influenza della gravità. In questa parte del salto il CM segue una traiettoria parabolica in aria che è descritta come...

### Moto dei Proiettili

Nella nostra discussione sui vettori, anche se non l'abbiamo detto in modo esplicito, era sottinteso che tutte le grandezze vettoriali di cui abbiamo parlato – così come le equazioni ad esse riferite – possono essere scritte componente per componente. Cioè, le componenti di un vettore sono indipendenti: il moto lungo  $x$  non ha effetto sul moto lungo  $y$ . Quindi possiamo scrivere:

#### Equazioni della Cinematica

$$x(t) = x_0 + v_x t + 1/2 A_x t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_y t + 1/2 A_y t^2$$

#### 2a Legge di Newton

$$F_x = mA_x$$

$$F_y = mA_y$$

$$v_x(t) = v_{x0} + A_x t$$

$$v_y(t) = v_{y0} + A_y t$$

$$A_x = \Delta v_x / \Delta t$$

$$A_y = \Delta v_y / \Delta t$$

$$v_x^2 = 2A_x x$$

$$v_y^2 = 2A_y y$$

$$F_x = m \Delta p_x / \Delta t$$

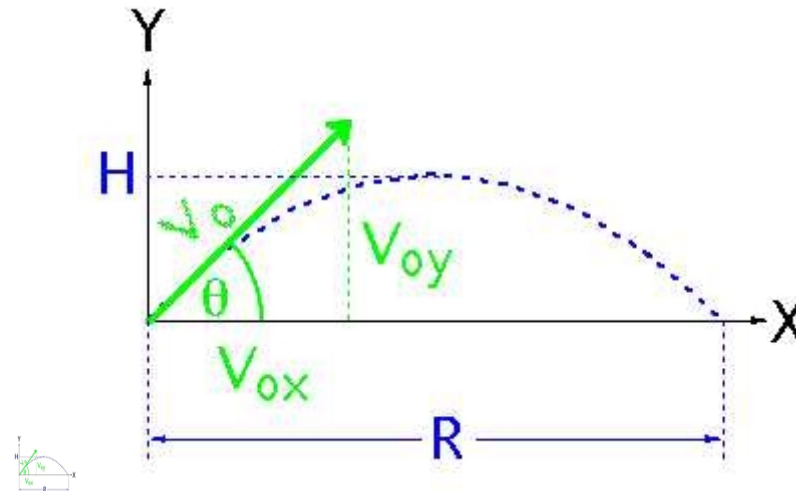
$$F_y = m \Delta p_y / \Delta t$$

### Quantità di moto

$$p_x = m v_x$$

$$p_y = m v_y$$

...con ovvie estensioni a z se necessarie. Questa generalizzazione è molto utile per descrivere un moto in più di una dimensione. Un esempio di tale moto – che è molto comune negli sport – è il moto dei proiettili. Qualora si trascurino gli effetti dell'aria, il moto di un proiettile è completamente determinato dal suo vettore velocità nell'istante in cui parte dal suolo. Tale vettore consiste di un modulo (o intensità),  $V_0$ , e di un angolo di inclinazione,  $\theta$ . Ci sono tre parametri del moto che di solito ci interessano: la massima altezza raggiunta,  $H$ , la gittata,  $R$ , ed il tempo di volo,  $T_h$ .



Possiamo inserire queste definizioni nelle equazioni della cinematica scritte componente per componente qua sopra per ottenere le equazioni che descrivono il moto:

$$x(t) = x_o + V_{ox} t$$

$$y(t) = y_o + V_{oy} t - 1/2 g t^2$$

Senza perdere di generalità, possiamo definire il punto di partenza all'origine, (0,0), eliminando così  $x_o$  e  $y_o$ . Il tempo di volo è definito come la quantità di tempo durante la quale l'oggetto sta in aria, così  $y(T_h) = 0$ . Possiamo usare ciò per trovare facilmente  $T_h$ :

$$0 = y(T_h) = V_{oy} T_h - 1/2 g T_h^2$$

$$1/2 g T_h = V_{oy}$$

$$T_h = 2V_{oy}/g$$

Dall'equazione per  $x(t)$  possiamo vedere che la gittata sarà data semplicemente da:

$$R = V_{ox} T_h$$

$$R = 2V_{ox} V_{oy}/g$$

Dalle nostre discussioni sulla conservazione dell'energia siamo in grado di scrivere un'espressione per H:

$$mgH = 1/2 m V_{oy}^2$$

$$H = 1/(2g) V_{oy}^2$$

Infine, dalla trigonometria sappiamo che le componenti x e y di  $V_o$  sono date da

$$V_{ox} = V_o \cos(\theta)$$

$$V_{oy} = V_o \sin(\theta)$$

Combinando tutti i suddetti risultati possiamo scrivere le equazioni del moto dei proiettili:

$$T_h = 2V_o \sin(\theta)/g$$

$$R = 2V_o^2 \sin(\theta)\cos(\theta)/g = V_o^2 \sin(2\theta)/g$$

$$H = 1/(2g) V_o^2 \sin^2(\theta)$$

Vedete che possiamo descrivere tutti i parametri relativi alla traiettoria solo nei termini del vettore velocità iniziale. Notate che nelle equazioni non compare la massa dell'oggetto.

Spesso negli sport lo scopo è massimizzare una di queste quantità. Notate che  $T_h$  e  $H$  assumono il valore massimo quando  $\sin(\theta) = \sin^2(\theta) = 1$ , ovvero per  $\theta = 90^\circ$ . Così, quando sono importanti il tempo di volo o l'altezza (come nel salto in alto, nel salto con l'asta o nei calci d'inizio del football americano), è preferibile che la velocità iniziale sia inclinata di un angolo piuttosto ampio. D'altro canto, la gittata è massima quando  $\sin(2\theta) = 1$ , ovvero per  $\theta = 45^\circ$ . Per cui, quando lo scopo è raggiungere la massima distanza (per es. nel lancio del peso), è preferibile un angolo di lancio intorno ai  $45^\circ$ ... tenendo in considerazione che nell'analisi sopra abbiamo ignorato gli effetti della resistenza dell'aria.

Allora torniamo al salto in lungo... che angolo di lancio dovrebbe essere usato? In generale gli effetti dell'aria sono trascurabili (sempre che il vento non soffi troppo forte), così a prima vista sembra che si debba usare un angolo intorno ai  $45^\circ$ . Infatti, analisi dettagliate del salto in lungo (che includono gli effetti dell'aria, *etc.*) hanno mostrato che l'angolo di lancio ottimale per i saltatori

professionisti dovrebbe essere sui  $43^\circ$ . Comunque, misurazioni accurate dell'angolo applicato, di fatto, mostrano che i migliori saltatori spiccano il salto a soli  $20^\circ$  circa. Perché?

Il motivo sta nel fatto che, quando un atleta corre alla massima velocità, i suoi piedi rimangono in contatto con il suolo solo per 0,1 s alla volta. Quindi essendo  $F\Delta t = \Delta p$ , questo intervallo è talmente breve che persino la forza massima della gamba non è sufficiente a variare la quantità di moto del saltatore abbastanza da permettergli di saltare con un'inclinazione di  $45^\circ$ . La strategia, allora, sta nel concentrarsi sulla velocità massima: aumentare  $V_0$  al fine di superare il limite fondamentale dell'angolo di lancio non proprio ottimale e quindi manipolare il CM durante il volo per allungare il salto di ogni centimetro possibile.

<p><b>Lezione 6</b></p> <p><b>PUNTI PRINCIPALI:</b></p>	<p><a href="#"><u>Lezione 7</u></a></p> <p><b>ANTEPRIMA:</b></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Il CM si muove sempre seguendo una traiettoria parabolica (se la gravità è l'unica forza esterna) ma il moto del CORPO può essere alterato in volo cambiando la posizione del CM relativa al corpo.</li> <li>• Tutte le equazioni vettoriali possono essere scritte componente per componente.</li> <li>• Il moto dei proiettili dipende solo dal vettore velocità iniziale (sempre se la gravità è l'unica forza esterna).</li> </ul>	<p>Proiettili lanciati da una certa altezza e proiettili lanciati concentrandosi sulla precisione anziché sulla distanza.</p>